

## 배경회전하에서 형성되는 주기적 유동의 3차원 수치해석과 실험

서 용 권\* · 박 재 현\*

(2002년 12월 4일 접수, 2003년 2월 17일 심사완료)

### Three-Dimensional Numerical Computation and Experiment on Periodic Flows under a Background Rotation

Yong Kweon Suh and Jae Hyun Park

**Key Words:** Rotating Flows(회전유동), Background Rotation(배경회전), Ekman Pumping(에크만 펌핑), Rectangular Container(직사각형 용기)

#### Abstract

We present numerical and experimental results of periodic flows inside a rectangular container under a background rotation. The periodic flows are generated by changing the speed of rotation periodically so that a time-periodic body forces produce the unsteady flows. In numerical computation, a parallel-computation technique with MPI is implemented. Flow visualization and PIV measurement are also performed to obtain velocity fields at the free surface. Through a series of numerical and experimental works, we aim to clarify, if any, the fundamental reasons of discrepancy between the two-dimensional computation and the experimental measurement, which was detected in the previous study for the same flow model. Specifically, we check if the various assumptions prerequisite for the validity of the classical Ekman pumping law are satisfied for periodic flows under a background rotation.

#### 1. 서 론

본 연구는 액체가 담긴 직사각형 용기를 회전시켜 충분한 시간 동안 스피너-업(spin-up) 시킨 뒤, 용기의 회전속도를 주기적으로 변화시켰을 때, 용기 내에 나타나는 비정상(unsteady) 유동의 특성을 실험 및 수치해석 방법으로 조사한 것이다. 서와 김,<sup>(1)</sup> 서 등<sup>(2)</sup>은 본 유동모델의 2차원 수치해석과 가시화 실험을 수행한 바 있다. 그러나 Ekman 분출모델에 의한 수치해석 결과는 오직

낮은 로스비수에서만 잘 맞았다. 한편, Suh & Choi<sup>(3)</sup>는 van Heijst 등<sup>(4)</sup>에 의해서 처음 연구된 직사각형 용기 내의 단순한 스피너-업 유동 모델에 대한 연구를 통해서 개선된 Ekman 분출모델을 제안한 바 있으며, 이 경우는 높은 로스비수에서도 수치해석 결과는 실험 결과와 잘 맞았다.

위 두 가지 연구를 통해, 본 연구자 그룹은 단순한 스피너-업 유동과 주기적인 회전 유동에 있어서 Ekman 분출모델의 타당성이 다름을 확인할 수 있었다.

직사각형 혹은 원통 용기 내의 단순한 스피너-업 유동과는 달리 주기적인 외력이 가해지는 직사각형 혹은 원통 용기 내의 유동은 변화가 복잡하고 지속적이며 로스비수와 레이놀즈수의 변화에 따라서 주기적 혹은 비주기적인 특성을 보인다.<sup>(1,2)</sup> 이는 실제 해양이나 기상에서 일어나는 유동의

\* 책임저자, 회원, 동아대학교 기계산업시스템공학부

E-mail : yksuh@mail.donga.ac.kr

TEL : (051)200-7648 FAX : (051)200-7656

\* 회원, 동아대학교 대학원 기계공학과

특성에 더욱 가깝다고 할 수 있다. 따라서 상기 두 가지 유동모델에 적용된 Ekman 분출모델의 로스비수에 따른 정확성의 차이에 대해 물리적으로 분석할 필요가 있다.

본 연구의 목적은 중횡비가 2인 직사각형 용기 내의 주기 유동을 3차원적으로 수치해석한 결과와 실험 결과를 비교하여 로스비수와 레이놀즈수에 따른 유동의 특성을 파악하여 Ekman 분출모델을 사용한 2차원 수치해석 결과와 가시화실험 결과의 차이를 분석하고 높은 로스비수와 레이놀즈수의 경우에 대한 보다 나은 Ekman 분출모델의 개발을 위한 기초 자료를 확보하는 데 있다.

2. 유동모델과 지배방정식

2.1 유동모델

Fig. 1은 본 연구에서 사용된 유동모델과 좌표계를, Fig. 2는 시간에 따른 용기의 각속도 변화를 나타낸 것이다.  $H$ 는 수심,  $L$ 은 용기의 세로방향( $y^*$ -방향) 길이,  $aL$ 은 용기의 가로방향( $x^*$ -방향) 길이이며,  $a$ 는 용기의 중횡비이다. 동점

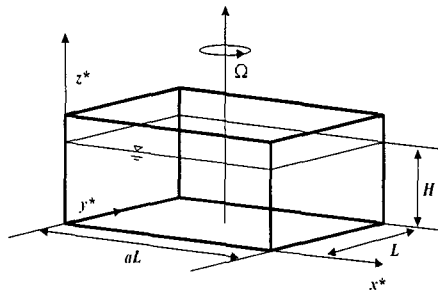


Fig. 1 Schematic diagram of the model basin

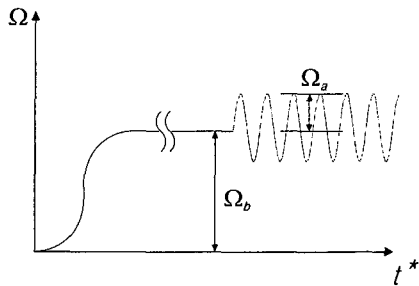


Fig. 2 Angular velocity of the turn table

성계수  $\nu$ 인 유체가 담긴 직사각형 용기는  $x^* = aL$ ,  $y^* = L/2$  인 중앙 축 둘레로 회전하며 (Fig. 1), 회전각속도는  $\Omega(t) = \Omega_b + \Omega_a \sin \omega^* t$  와 같이 배경회전(background rotation)  $\Omega_b$ 에 진폭  $\Omega_a$ , 각속도  $\omega^*$ 로 변동하는 각속도가 덧붙여진다(Fig. 2).

2.2 지배방정식

속도를  $L\Omega_a$  로, 시간을  $1/\Omega_a$ 로, 길이를  $L$ 로, 그리고 압력을  $\rho L^2 \Omega_a \Omega_b$ 로 무차원화한 3차원 지배방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - 2 \left\{ \frac{1}{\epsilon} + f \right\} v = -\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \nabla^2 u + y \frac{df}{dt} \tag{2a}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + 2 \left\{ \frac{1}{\epsilon} + f \right\} u = -\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \nabla^2 v - x \frac{df}{dt} \tag{2b}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{Re} \nabla^2 w \tag{2c}$$

여기서  $t$ 는 무차원 시간,  $x, y, z$ 는 용기와 같이 회전하는 무차원 좌표계를 나타내며  $f = \sin \omega t$ 는 무차원 회전각속도의 변동 성분을 나타낸다. 식 (2a), (2b), (2c) 및 기하학적 관계에서 사용된 무차원 변수는 다음과 같다.

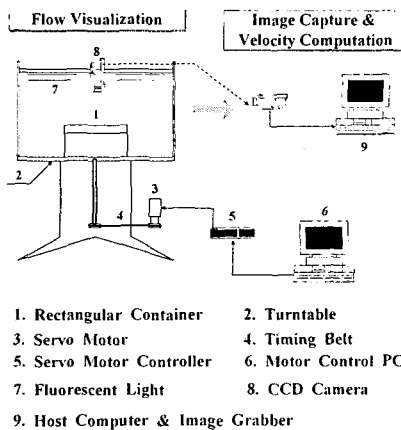
$$\epsilon = \frac{\Omega_a}{\Omega_b}, Re = \frac{L^2 \Omega_a}{\nu}, \omega = \frac{\omega^*}{\Omega_a}, h = \frac{H}{L}. \tag{3}$$

여기서  $\epsilon$ 는 로스비수(Rossby number),  $Re$ 는 레이놀즈수(Reynolds number),  $h$ 는 무차원 수심이다. 로스비수는 배경회전의 빠르기에 대한 용기 내 상대운동의 빠르기의 비를 나타낸다.

수평단면의 무차원 공간평균 운동에너지는 다음과 같이 정의된다.

**Table 1** Parametric values for each computational case

case	1	2	3
$Re$	1548	2356	2356
$\omega$	0.4	0.4	0.4
$\epsilon$	0.2	0.2	0.3
$h$	0.4	0.4	0.4



**Fig. 3** Schematic arrangement of the turntable & the PIV system

$$E(z, t) = \frac{1}{A} \int (u^2 + v^2) dx dy \quad (4)$$

여기서  $A (= a)$ 는 유동장의 무차원 면적이다.

### 3. 수치해석 및 실험 방법

#### 3.1 수치해석 방법

Table 1은 수치해석을 수행한 3가지 경우에 대한 4가지의 파라미터를 나타낸 것이다. 본 연구에서는 레이놀즈수와 로스비수를 변화시켰으며  $\omega$ 와  $h$ 는 0.4로 고정시켰다. 본 연구에서는 또한 중회비를  $a=2$ 에 국한 시켰다. 격자수는  $I \times J \times K = 150 \times 75 \times 30$ 이다. 지배방정식을 공간에 대해서는 중심차분으로 차분화하였고, 시간에 대해서는 양적인 오일러(Explicit Euler)법으로 처리하였으며, 무차원 시간 증분은 레이놀즈수에 따라 0.001~0.005의 범위에서 정하였다. 병렬연

산을 위해 압력방정식은 PCGM(pre-conditioned conjugate gradient method)를 사용하여 풀었고 수렴의 가속을 위한 전처리로 D-ILU법을 사용하였다. 속도 경계조건으로서, 각 벽면에 대해서 접촉 조건(no-slip condition)과 비침투 조건(impermeable condition)을, 자유표면에는 무응력 조건(no-stress condition)을 적용하였다. 압력경계조건은 이러한 속도 및 응력 조건을 식(2a)~(2c)에 적용한 결과로부터 유도된다.

#### 3.2 실험 방법

Fig. 3은 실험장치를 도시한 것으로 회전 테이블은 속도 가변형의 전동기에 의해 속도가 제어된다.

우선, 가로×세로=0.3×0.15[m] 크기의 직사각형 용기가 수평으로 놓인 회전 테이블을  $\Omega_b$ 의 속도로 일정하게 회전시킨 뒤, 용기내의 유체가 상대운동을 하지 않을 때까지 기다린다. 다음, 어느 시점에서 테이블의 회전 속도를 진폭  $\Omega_a$ , 각 속도  $\omega^*$ 로 주기적으로 변화시킨다. case 1, 2, 3의 각각에 대해서  $\Omega_b$ 는 3.29[rpm], 5[rpm], 3.34[rpm]이며  $\Omega_a$ 는 0.663[rpm], 1[rpm], 1[rpm]이고  $\omega^*$ 는 0.263[rpm], 0.4[rpm], 0.4[rpm]이다. 유동 가시화를 위해서 사용한 입자는 아크릴 파우더이며 입자의 촬영에는 CCD 카메라(Lavision Co.)를 사용하였으며, 자료 저장에는 프레임 그래버를 내장한 PC를 사용하였다. 이 실험의 해석 알고리즘은 'Window with CBC'이다.

### 4. 결과 및 검토

#### 4.1 유동의 주기성

유동의 주기적 특성을 파악하기 위해서 시간에 따른 자유표면의 공간평균 운동에너지를 구하였으며 그 결과는 Fig. 4와 같다. case 1, 2, 3의 모든 경우에서 유동은 초기에 천이유동을 보이지만 약 3 주기 후부터는 주기성을 보인다. 본 연구에서 제시한 결과는 모두 주기성을 보이는 구간에서 얻어진 것이다.

case 1과 2의 결과를 비교해 보면 일반적인 유

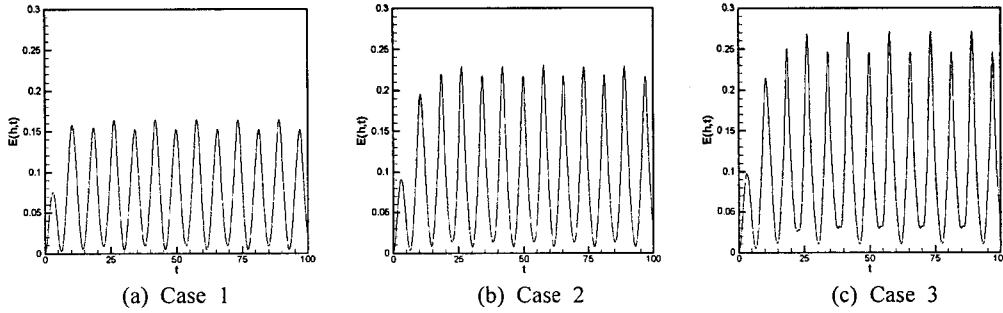


Fig. 4 Time history of the spatially averaged kinetic energy

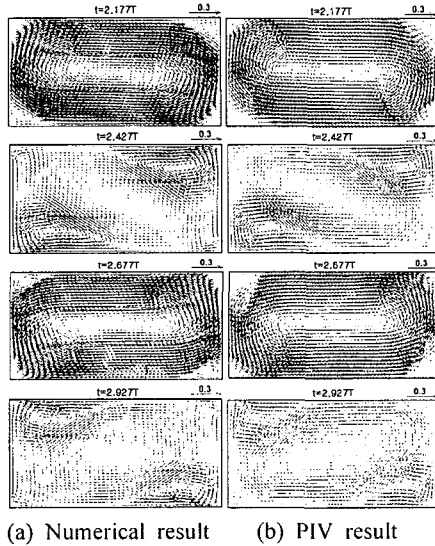


Fig. 5 Velocity vectors on the free surface for the case 2

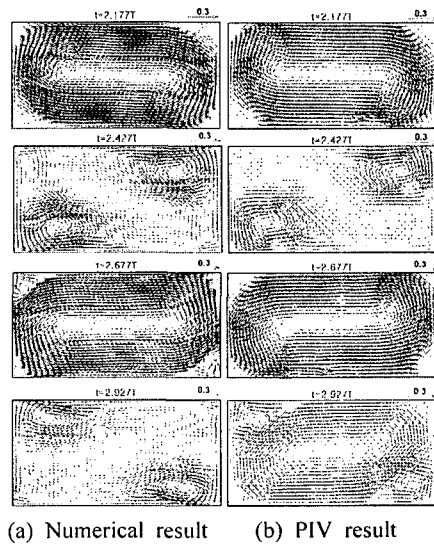


Fig. 6 Velocity vectors on the free surface for the case 3

동과 마찬가지로, 레이놀즈수가 증가함에 따라 유동이 강해짐을 알 수 있다. 또한 case 2와 3의 결과를 통해서 로스비수의 증가에 따라서 역시 유동이 강해짐을 확인할 수 있다. 고전 Ekman 분출 법칙에 따르면 로스비수가 낮을 경우에 Ekman 분출속도는  $\sqrt{\epsilon/Re}$ 에 비례하며 이를 와도 방정식(vorticity equation)에 대입하면  $d\xi/dt$ 는 점성항 외에  $-\xi/\sqrt{\epsilon Re}$ 에 비례하는 항이 나타난다(Suh & Choi<sup>(3)</sup>). 만약 점성항을 무시할 수 있다면, 와도의 감쇠계수(damping coefficient)는  $1/\sqrt{\epsilon Re}$ 이 된다. 이 결과로부터, 레이놀즈수나

로스비수가 증가할 경우, 감쇠계수  $1/\sqrt{\epsilon Re}$ 가 감소하며 따라서 Fig. 4의 결과에서처럼 유동이 강해진다.

또한 본 연구에서는 수직높이에 따른 수평면상의 공간평균 운동에너지(식 (3))를 비교하였으며 그 결과, 바닥의 경계층 지역을 제외한 모든 수직 위치에서 수평면의 공간평균 운동에너지가 거의 같음을 알 수 있었으며 또한 자유표면의 공간평균 운동에너지가 가장 작지만 그 차이는 매우 작았다.

Fig. 5는 case 2, Fig. 6은 case 3에서 구한 자유표면에서의 속도벡터로서 수치해석 결과와 실

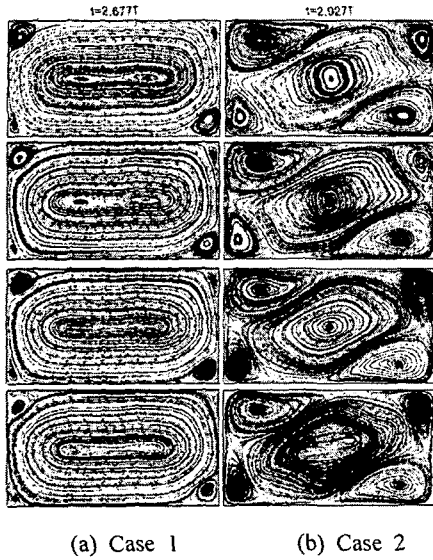


Fig. 7 Streamline plots on the horizontal planes at  $t=2.677T$  for the case 1(left frames) and  $t=2.927T$  for the case 2(right frames);  $z=h, 3h/4, 2h/4$  and  $h/4$ (from top to bottom)

험 결과를 비교한 것으로 두 결과가 잘 일치함을 알 수 있다. 특히 모서리에서 발생한 코너 보텍스는 레이놀즈수가 동일한 경우, 로스비수가 클 때 잘 발달된다는 것을 알 수 있으며 이는 앞에서 설명한 것처럼, 로스비수의 증가로 감쇄효과가 감소했기 때문이다.

Fig. 7은 case 1과 2의 경우에 대해서  $t$ 가 일정할 때 수직높이에 따른 수평단면 상의 유선을 나타낸 것이다. 두 경우 모두 수직높이와 관계 없이 유선은 거의 같으며 이와 같은 사실은 공간 평균 운동에너지의 결과로부터 예측된 것으로서, 수직높이에 따른 수평면의 속도성분( $u, v$ )의 변화는 거의 없다는 것을 알 수 있다. 이는 고전 Ekman 분출이론의 가정과 부분적으로 일치한다.

Fig. 8은 case 3의  $y=0.5$  지점의  $x-z$  단면의 속도벡터를 나타낸 것이다. 수평방향의 유속 성분은 수직높이의 변화에 따른 차이가 거의 없으며 이는 앞서 살펴본 결과(Fig. 7)와 일치한다.

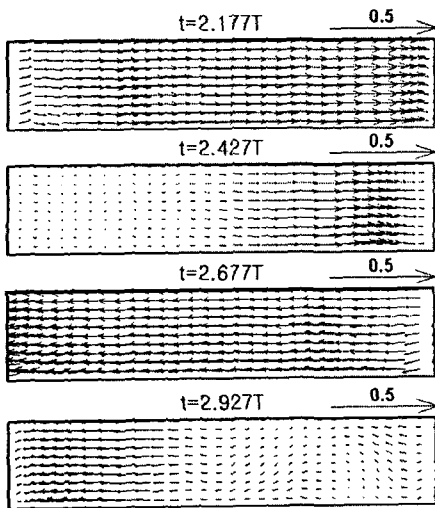


Fig. 8 Velocity vector plots on the vertical plane  $y=0.5$  for the case 3

#### 4.2 수직방향 속도의 분포

수평방향 속도( $u, v$ )가 수직위치와 거의 무관하면, 연속방정식 (1)에 의해  $w$ 는 원칙적으로 1차 함수가 되어야 한다.

Fig. 9는  $y=0.75$ 에서 용기의  $x$ -방향의 세 지점에 대한 수직속도  $w$ 의 분포의 시간 변화를 아주 짧은 시간 동안 나타낸 것이다. 이 짧은 시간 동안 주유동은 Fig. 6에서 알 수 있는 바와 같이 중앙 지역은 반 시계 방향(cyclonic), 코너 지역은 시계 방향(anti-cyclonic)의 유동을 보인다. 따라서 용기의 중앙(Fig. 9(b))에서는 분출(pumping)이( $w > 0$ ), 코너(Fig. 9(a), (c))쪽에서는 흡입(suction) 현상( $w < 0$ )이 발생함을 이해할 수 있다. 하지만  $x=0.016$ 과 용기의 중앙부에서의 속도분포는 상당히 비선형이고, 특히 용기의 중앙부에서는 아주 짧은 시간 동안 수직속도 성분의 변화가 심하다는 것을 알 수 있다.

Fig. 10은 용기 내의 고정된 지점의 수직속도 성분을 시간 진행에 따라서 나타낸 것이다. Fig. 9의 결과와 마찬가지로 용기의 중앙부에서 짧은 시간 동안 수직속도의 변화가 심하게 나타남을

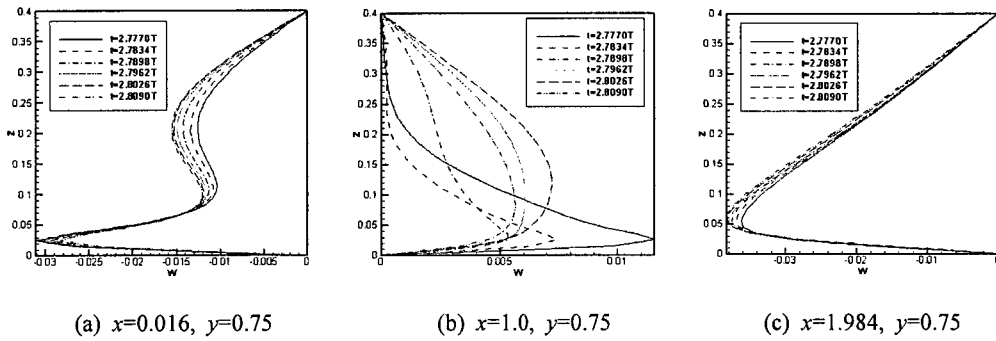


Fig. 9 Distribution of the vertical velocity  $w$  at three locations shown for the case 3 at six instants of time

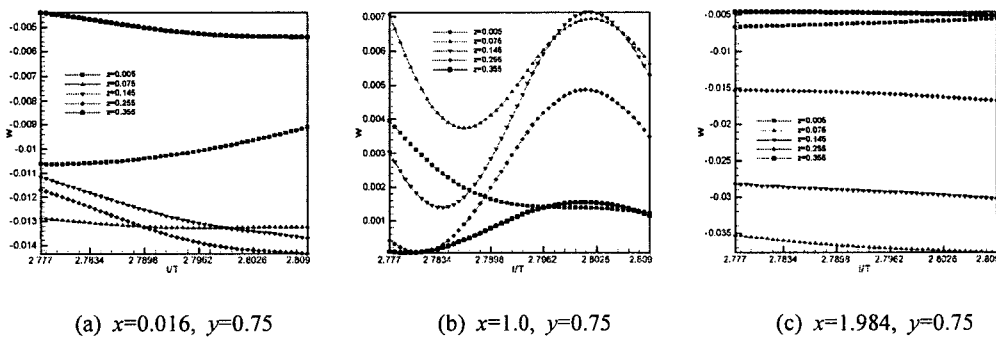


Fig. 10 Time history of the vertical velocity  $w$  for the case 3

알 수 있다(특히 (b)). 이와 같이 수직속도 성분이 지역에 따라서 상당히 비선형임에도 불구하고 수평속도 성분들은 수직 위치와 거의 무관하게 나타나는 이유로서는, 첫째  $w$ -속도 자체가 매우 작다는 것, 둘째 이러한 비선형 거동이 매우 짧은 시간 동안 발생한다는 사실이 되겠다. 그러나 높은 레이놀즈수와 높은 로스비수의 주기유동에 대한 효율적인 2차원 모델의 개발을 위해서는 이러한 수직속도 성분의 시간적, 공간적인 비선형성을 고려해야 할 필요가 있는지는 추후 추가적인 연구를 통해 밝혀져야 할 것이다.

4.3 추가 검토 사항

위에서 제시한 유동은 비교적 낮은 로스비수에 대한 것이다. 만약 로스비수가 더욱 증가하면 Taylor-Proudman 가설이 성립되지 않으며 이에 따라 유체의 수직속도 성분이 더욱 증가하여 복잡한 3차원적 유동 양상을 보일 것으로 예측된다. 그러면, 와류의 신장(vortex stretching) 및 소규모화에 의해 유동의 감쇄효과는 더욱 증가할 것으로 예측된다. 이에 대해서는 추가적인 연구가 필요하다고 생각된다.

한편, 본 연구에서 배경회전의 크기는 비교적 작기 때문에 원심력에 따른 자유표면의 변형은 수 mm에 지나지 않는다. 따라서 자유표면의 변형에 따른 효과는 무시할 수 있다고 판단된다.

그리고 실제로 자유표면에는 이물질 혹은 계면활성제 등이 불가피하게 첨가되기 때문에 표면장력이나 표면탄성력 혹은 표면점성력 등이 순수한 액체의 물성치와는 다르다. 수치해석에서는 물론 이러한 것들을 고려하지 않았다. 그렇지만 이 물성치들의 영향은 자유표면 아래의 매우 얇은 경계층에 국한되어 나타나고 또 그 크기도 상대적으로 미약할 것으로 예측된다. 달리 표현하자면 본 연구에서의 수치해석 조건은 수심이 2H인 용기에 액체를 넣고 두경을 닫은 상태에서 용기를 회전시킨 것과 같다고 말할 수 있다. 그러나 실험에서는 중심부 단면의 가시화가 어렵기 때문에 자유표면이 있는 상태로 하여 실험한 것이다.

## 5. 결 론

회전요동하는 직사각형 용기 내의 주기유동에 관한 연구를 통하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) 레이놀즈수와 로스비수가 증가하면 유동은 강해진다.
- (2) 바닥의 경계층을 제외한 용기 내의 수평단면의 속도 성분은 수심의 변화에 따라서 크게 변하지 않으며 고전 Ekman 분출모델을 위한 가정과 일치한다.
- (3) 바닥의 경계층을 제외한 용기 내의 수직속

도 성분은 시간, 공간적으로 비선형이며 이것은 고전 Ekman 분출모델을 위한 가정에 어긋난다.

## 후 기

본 연구는 한국과학재단 목적기초연구(R01-2000-00290)지원으로 수행되었음.

## 참고문헌

- (1) Suh, Y.K. and Kim, Y.K., 1998, "Study on Fluids in a Rectangular Container Subjected to a Background Rotation with a Rotational Oscillation," *Proc. KSME 1998 Fall Annual Meeting B*, pp. 869~875.
- (2) Suh, Y.K., Choi, Y.H., Kim, S.K. and Lee, D.Y., 2000, "Study on Fluid in a Rectangular Container Subjected to a Background Rotation with a Rotational Oscillation Using PIV System," *Trans. KSME(B)*, Vol. 24, No. 6, pp. 845~851.
- (3) Suh, Y. K. & Y. H. Choi, 2002, "Study on the Spin-up of Fluid in a Rectangular Container Using Ekman Pumping Models," *J. Fluid Mech.*, Vol. 458, pp. 103~132.
- (4) van Heijst, G. J. F., Davies, P. A. & Davies R. G., 1990, "Spin-up in a Rectangular Containers," *Phys. Fluid*, Vol. 2, No. 2, pp. 150~159.