

회절광학소자의 최적 설계를 위한 Iterative Fourier Transform Algorithm의 수렴성에 관한 연구

(A study on the Convergence of Iterative Fourier Transform Algorithm for Optimal Design of Diffractive Optical Elements)

金輝*, 楊秉春*, 朴珍洪*, 李竝浩**

(Hwi Kim, Byungchoon Yang, Jinhong Park, and ByoungHo Lee)

요약

Iterative Fourier transform algorithm (IFTA)은 회절광학소자 (DOE)의 위상 분포를 구하기 위한 반복적 수치 해석 알고리즘으로서 회절광학소자의 위상 분포는 반복 과정을 통하여 국소 최적해로 수렴하게 된다. IFTA의 수렴은 위상 분포 초기치, 관측면에서의 자유도의 허용 범위 및 알고리즘에 내재된 매개 변수들의 설정 값에 영향을 받는다. 본 논문에서는 IFTA의 내부적 매개 변수인 완화 변수(relaxation parameter)가 IFTA의 수렴에 미치는 영향을 분석하고 이를 토대로 보다 정확한 최적화 해를 얻기 위한 유전 알고리즘과 IFTA의 하이브리드 알고리즘을 제안한다.

Abstract

Iterative Fourier transform algorithm, (IFTA) is the iterative numerical algorithm for the design of the diffractive optical elements (DOE), by which the phase distribution of a DOE converges on a local optimal solution. The convergence of IFTA depends on several factors as initial phase distribution, the structure of the degree of freedom on the observation plane, and the values of internal parameters. In this paper, we analyze the dependence of the convergence of IFTA on an internal parameter of IFTA, the relaxation parameter, and propose a new hybrid scheme of genetic algorithm and IFTA to obtain more accurate solution.

Keywords : Iterative Fourier transform algorithm, diffractive optical element, relaxation parameter, genetic algorithm

I. 서론

* 正會員, ** 學生會員, 서울대학교 電氣工學部
(National Research Laboratory of Holography Technologies, School of Electrical Engineering, Seoul National University)

※ 본 연구는 보건복지부 과제(과제번호 400-2002-0080)의 지원에 의해 이루어졌습니다.

接受日:2002年2月7日, 수정완료일:2003年4月24日

회절광학소자(Diffractive Optical Element: DOE)는 이차원 회절 격자로서 입사한 빛을 회절시켜 관측면에 원하는 회절 이미지를 생성하는 소자이다. DOE의 설계는 원하는 회절 이미지를 관측면에 나타내기 위하여 입사면에서의 빛 분포를 알아내고 이러한 분포를 가능하게 하는 이차원 격자 구조를 설계하는 것이다. DOE의 설계는 일반적으로 광축 근사 스칼라 회절 이론을

기반으로 하고 프레넬(Fresnel) 변환이 포함된 비선형 적분 방정식으로 표현되는 설계 방정식의 해를 구하는 과정이 수반된다. DOE의 설계 방정식을 해석적으로 푸는 방법은 알려져 있지 않으며 실제로 방정식을 완전히 만족하는 해석적인 해가 존재하지 않을 수도 있다. 이 때문에 수치 해석적인 기법을 통하여 방정식의 근사해를 최적화하는 방법이 많이 연구되고 있다. Iterative Fourier Transform Algorithm(IFTA)은 Gerchberg와 Saxton에 의해 제안되었는데 IFTA의 초기 형식을 GS 알고리즘^{1, 2)}이라고 부르기도 한다. 또한 입사면과 관측면에서의 오차를 반복 과정을 통해 줄여 나가는 IFTA의 방법적인 측면을 고려하여 오차 감소 알고리즘(error reduction algorithm)이라고도 한다. 하지만 각각의 반복단계에서 FFT(Fast Fourier Transform)기반의 푸리에 변환과 그 역변환을 사용하기 때문에 IFTA(Iterative Fourier Transform Algorithm)이라고 부르는 것이 상례이다. IFTA의 초기 형식인 GS 알고리즘에서 나타나는 정체 현상(stagnation)을 극복하기 위하여 Gerchberg-Papoulis 알고리즘^{3, 4)}과 Wyrowski의 2단계 IFTA⁵⁾, Fienup의 위상 복원 알고리즘(phase retrieval algorithm)⁶⁾ 등에서는 GS알고리즘의 기본형식에 설계 자유도 개념을 도입하였는데 현재는 DOE의 설계에서 관측면에서의 위상 자유도 및 진폭 자유도의 사용이 일반화되었다. 이러한 알고리즘들은 모두 기본적으로 각각의 반복단계에서 푸리에 변환과 그 역변환을 반복적으로 사용함으로써 오차를 감소하는 방식을 따르지만 자유도의 설정과 알고리즘의 운용면에서 초기의 GS알고리즘보다는 개선된 형식을 갖추고 있다.

기존의 IFTA의 운용에서는 내재적 매개 변수인 완화 변수를 고정된 상수로 놓는 것이 일반적이는데, 이는 선형 방정식의 반복적 해법과는 달리 IFTA가 비선형성으로 인하여 각각의 반복 단계에서 완화 변수의 최적치를 해석적으로 구하는 것이 불가능하기 때문이다. 반복항의 초기치가 주어지고 완화 변수(relaxation parameter)가 일정한 상수로 고정된 경우 반복 과정을 통해 IFTA의 반복항의 오차가 단조 감소하여 알고리즘이 국소적으로 수렴한다는 사실은 알려져 있지만 실제로 IFTA를 통해 얻을 수 있는 최소 오차를 알 수 있는 방법은 알려지지 않았다. 따라서 기존에는 난수 발생기로 생성한 서로 다른 다수의 위상 초기치에 대하여 IFTA를 실행하고 여기서 얻은 해들 중에서 설계

조건으로부터 오차가 가장 작은 해를 선택하는 방식이 일반적인 DOE 설계 과정이다. 반복적인 수치해석 방법 이외에 유전 알고리즘^{8, 9)}이나 시뮬레이티드 어닐링과 같은 확률론적 최적화 알고리즘⁷⁾을 사용하여 DOE의 위상 분포를 직접적으로 구하는 방법들도 보고되고 있는데 실제의 2차원 DOE 설계에서 이들 확률론적 최적화 방법들은 막대한 계산 시간을 필요로 하며 국소해 근방에서의 미세 조정 능력이 약하다는 평가를 받고 있다.

본 논문에서는 IFTA의 내부 매개 변수인 완화 변수가 IFTA의 수렴성에 미치는 영향을 이론적으로 분석하고 완화 변수가 IFTA의 수렴을 효과적으로 조절할 수 있음을 보였다. 완화 변수의 스케줄링 최적화를 위하여 확률론적 최적화 알고리즘인 유전 알고리즘과 기존의 IFTA의 방법론을 결합한 하이브리드 알고리즘을 제안한다. 유전 알고리즘의 탐색체로 DOE의 위상 분포를 놓는 기존의 접근과는 달리 IFTA의 완화 변수의 집합을 유전 알고리즘의 탐색체로 설정하고 이 완화 변수의 집합에 대응하는 IFTA의 설계 결과를 목적 함수로 설정하면 유전 알고리즘으로 하여금 가장 바람직한 해를 얻을 수 있는 최적 완화 변수의 스케줄을 찾아내도록 할 수 있다. 본 논문의 II장에서는 스칼라 회절 이론과 Landweber 반복법을 DOE 설계를 위한 IFTA를 전개하고 IFTA의 각 단계의 반복항의 오차의 완화 변수에 대한 의존성을 분석한다. III장에서는 II장의 분석을 토대로 완화변수 스케줄링에 관해 논한다. 비선형 해공간에서 국소 최적해를 찾는 최적화 기법인 유전 알고리즘과 IFTA의 결합을 통한 완화 변수의 스케줄링 방법을 제안하고 이의 결과를 다른 완화변수 스케줄링 전략의 결과와 비교 분석한다. 또한 알고리즘에 의한 완화 변수 스케줄링의 결과를 제시하고 속도 향상을 위한 병렬 계산 방식을 논한다.

II. Iterative Fourier transform algorithm와 완화 변수

1. Iterative Fourier transform algorithm

DOE는 이차원 위상 격자로서 DOE에 입사한 빛은 공간 위상이 변조되어 관측면에 회절 이미지를 형성시킨다. 즉, DOE의 설계는 관측면에 원하는 회절 이미지를 나타내기 위하여 입사면에서의 위상 변조의 구조를 알아내고 이러한 위상 변조를 가능하게 하는 표면 격

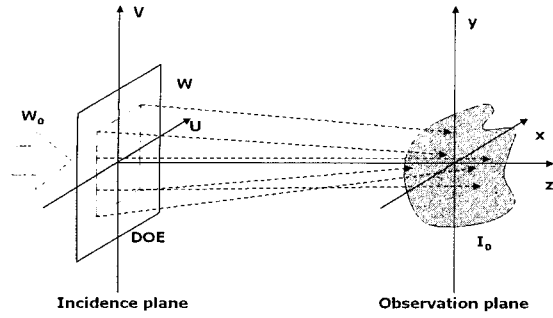


그림 1. 회절광학소자(DOE)에 의한 회절 이미지의 형성
Fig. 1. An illustration of generating a diffraction image by using a diffractive optical element (DOE).

자 구조(surface relief structure)를 최적화하는 것이다. IFTA는 관측면에 원하는 회절 이미지를 나타내기 위한 입사면에서의 빛의 위상 분포를 근사적으로 구하는 수치 해석 알고리즘이다.

<그림 1>은 DOE에 의한 회절 이미지의 생성 방식을 보여준다. 입사면에 빛 \$W_0\$이 입사하면 DOE에 의해 회절 되어 관측면에서 회절 이미지가 나타난다. 관측면에서 생성하고자 하는 회절 이미지의 세기 분포를 \$I_0\$라고 하고 \$Fr\$를 DOE 면으로부터 광축을 따라 거리 \$z\$에 있는 관측면까지의 프레넬 변환^[10]이라고 하면, DOE의 기본 방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$I_0 = |Fr [W_0 T_{DOE}]|^2 = |Fr [A_0 \exp(i\Phi)]|^2 \quad (1)$$

여기서 \$T_{DOE}\$는 DOE의 투과 함수(transmittance), \$\Phi\$는 DOE의 위상 분포이고 \$A_0\$는 입사광의 진폭이다. 식 (1)을 만족하는 위상 분포 \$\Phi\$는 입사광 \$W_0\$이 DOE에 입사한 경우 관측면에 세기 분포 \$I_0\$를 갖는 회절 이미지 만드는 DOE의 위상 분포가 된다. 식 (1)의 비선형 적분 방정식은 관측면에서의 설계 자유도^[5]를 고려하여 식 (2)와 같이 제약조건을 수반한 신호 영역에서의 최소 자승법으로 다시 쓸 수 있다. 설계 자유도란 관측면에서 회절광의 위상에 제한을 두지 않는 위상 자유도와 관측면을 신호 영역과 잡음 영역으로 나누어 신호 영역에서의 회절 이미지의 세기 분포만을 오차 함수 계산에 포함하고 신호 영역이외의 영역, 즉 잡음 영역에서의 회절 이미지의 세기 분포는 임의로 놓는 관측면 위상 자유도를 말한다.

$$J(F_n) = \iint \|D_n F_n - F_0\|^2 dx dy$$

제약조건: \$|Fr^{-1}(F_n)| = A_0, n = 0, 1, 2, \dots\$ (2)

여기에서 \$F_0\$는 \$\sqrt{I_0}\$이고 \$F_n\$은 \$n\$번째 반복 단계에서 관측면의 회절광이다. \$J\$는 \$n\$번째 반복 단계에서 얻은 회절 이미지 \$|F_n|\$와 목적 회절 이미지 \$F_0\$의 오차로 정의된다. 연산자 \$D_B\$는 관측면에서 신호 영역과 잡음 영역을 구분하는 역할을 한다. 이를 통해 설계에서 \$D_B\$는 회절 효율과 회절 이미지의 균일도 사이에 존재하는 타협점(trade off)을 조절할 수 있다^[11]. 잡음 영역을 크게 하여 설계 자유도를 늘리면 회절 이미지의 균일도가 향상되지만 잡음 영역에서의 잡음이 증가하여 회절 효율이 떨어지고 잡음 영역을 작게 하여 설계 자유도를 줄이면 잡음의 양이 줄어들어 회절 효율은 향상되지만 회절 이미지의 균일도가 저하된다. \$D_B\$의 정의는 식 (3)과 같다. (좌표는 <그림 1> 참조)

$$D_B F = \begin{cases} F & (x, y) \in S \\ 0 & (x, y) \notin S \end{cases} \quad (3)$$

여기에서 \$S\$는 신호 영역이다. 관측면의 위상 자유도를 고려하고 변분법과 Landweber 반복 형식^[11-13]을 식 (2)의 최소 자승 형식에 적용하면 IFTA를 유도 할 수 있다. 식 (2)는 변분법에 의해 선형화 할 수 있는데 식 (2)에 대하여 변분을 취하면

$$\begin{aligned} \delta J &= J(F_n + \delta F_n) - J(F_n) \\ &= \iint [|F_0| - |D_n(F_n) + \delta F_n|]^2 - [|F_0| - |D_n F_n|]^2 dx dy \\ &= \iint [|F_0| \exp(i\Psi_n) - D_n(F_n) - \delta F_n]^2 - [|F_0| \exp(i\Psi_n) - D_n F_n]^2 dx dy \\ &= \iint -F_0 \delta F_n^* + D_n F_n \delta F_n^* - \delta F_n F_0^* + \delta F_n D_n F_n^* dx dy \\ &= \iint 2 \operatorname{Re} \{ -|F_0| \exp(i\Psi_n) + D_n F_n \} \delta F_n^* dx dy \end{aligned} \quad (4)$$

과 같이 전개된다. 여기에서 \$\Psi_n = \operatorname{Arg}(F_n)\$이다. 식 (4)의 전개에서는 \$F_0\$와 \$\delta F_n\$의 위상이 임의로 설정될 수 있는 점을 고려하여 두 항이 모두 \$n\$번째 반복 단계의 관측면 회절광 \$F_n\$의 위상을 갖도록 하였다. 이렇게 함으로써 식 (4)의 피적분항에 존재하는 절대값 기호를 없앨 수 있다. Landweber 반복법은 오차의 변분량 \$\delta J\$이 음의 방향으로 최대를 하는 반복항의 변분 \$\delta F_n\$을

반복 단계에서의 F_n 의 증분으로 취하는 방식이다. Landweber 반복법에 의해 δF 를 음의 방향으로 최대로 하는 변분량 δF_n 은 식 (4)로 부터

$$\delta F_n = -\lambda_n (D_\beta F_n - |F_0| \exp(i\Psi_n)) \quad (5)$$

임을 알 수 있다. 여기서 λ_n 은 n번째 반복 단계에서의 증분의 크기를 조절하는 완화 변수이다. 한편, 식 (2)의 제약 조건은 입사면에서 빛의 진폭에 대한 경계 조건을 의미하는데 일반적으로 식 (5)에서 구한 증분을 적용한다고 하여 입사면에서의 경계 조건을 자동적으로 만족시키지 못한다. n 번째 반복 단계에서 증분 δF_n 에 의해 개선되는 양을 \bar{F}_n 이라고 하면,

$$\begin{aligned} \delta F_n &= \bar{F}_n - F_n \\ \bar{F}_n &= F_n - \lambda_n (D_\beta F_n - |F_0| \exp(i\Psi_n)) \end{aligned} \quad (6)$$

와 같은 관계가 만족된다. 다음으로 식 (2)의 비선형 제약조건을 만족하도록 하면서 F_n 의 오차를 감소하도록 하는 연산자를 도입한다. 이를 정제 연산자(refinement operator)라고 부르기로 한다. 정제 연산자에 의해 식 (6)에서 구해진 \bar{F}_n 은 입사면에서의 제약조건을 만족하도록 수정된다. 우선 입사면에서의 제약 조건을 표현하는 연산자 D_A 는 다음과 같이 정의된다. (좌표 (u, v) 는 <그림 1> 참조)

$$D_A W = \begin{cases} A_0 \exp[\text{Arg}(W)] & (u, v) \in \Omega \\ 0 & (u, v) \notin \Omega \end{cases} \quad (7)$$

여기에서 Ω 는 DOE의 개구(aperture) 내부 영역이다. 정제 연산자를 $FrD_A Fr^{-1}(\cdot)$ 로 정의하고 식 (6)의 \bar{F}_n 에 적용하면 입사면에서의 경계 조건을 만족하면서 오차가 감소된 회절광 F_{n+1} 을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$F_{n+1} = FrD_A Fr^{-1}(\bar{F}_n) \quad (8)$$

입사면에서의 경계조건 D_A 를 만족하는 변분량은 $\delta F_n = F_{n+1} - F_n$ 임을 알 수 있다. 위의 논의한 IFTA를 식 (9)와 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} \bar{F}_n &= [1 - \lambda_n D_\beta] F_n + \lambda_n |F_0| \exp(i\Psi_n) = \\ &\begin{cases} \lambda_n F_0 \exp(i\Psi_n) + (1 - \lambda_n) F_n & (x, y) \in S \\ F_n & (x, y) \notin S \end{cases} \\ F_{n+1} &= FrD_A Fr^{-1}(\bar{F}_n) \end{aligned} \quad (9)$$

여기에서 Ψ_n 은 F_n 의 위상이다. 그리고 입사면과 관측면의 복소파들 사이의 관계도 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$W_n(u, v) = A_0(u, v) \exp(i\Phi_n(u, v)) \quad (10)$$

$$F_n(x, y) = B_n(x, y) \exp(i\Psi_n(x, y)) \quad (11)$$

$$F_n(x, y) = Fr[W_n(u, v)] \quad (12)$$

$$A_{n+1}(u, v) \exp(i\Phi_{n+1}(u, v)) = Fr^{-1}[\bar{F}_n(x, y)] \quad (13)$$

여기에서, W_n 은 입사면의 복소파, A_0 는 입사광의 진폭, B_n 은 관측면의 복소파의 진폭이고 Φ_n 은 입사면의 복소파의 위상이다. 는 구하고자 하는 DOE의 위상 분포이다.

한편, 에너지 보존법칙에 따라 식 (10)과 식 (11)이 성립한다.

$$\iint_{-\infty}^{\infty} |Fr[W]|^2 dx dy = \iint_{-\infty}^{\infty} |W|^2 du dv \quad (14)$$

$$\iint_{-\infty}^{\infty} |Fr^{-1}[F]|^2 du dv = \iint_{-\infty}^{\infty} |F|^2 dx dy \quad (15)$$

식 (9)에서 완화 변수는 신호 영역에서 와의 선형 결합 비율을 나타내고 있다. 이면 이 되어 오차가 감소하지 않는다. 다음 장에서는 IFTA의 수렴 증명을 통해 IFTA의 단조 감소 조건을 고찰하도록 한다.

2. IFTA의 단조 수렴 조건

이 장에서는 II장 1절에서 유도한 IFTA의 단조 수렴성을 증명하고 단조 수렴을 위한 완화 변수의 값의 충분 조건에 대해 논한다. 분석에 필요한 항들을 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$W_n(u, v) = (A_0 \exp(i\Phi_n))[u, v] \quad (16.1)$$

$$F_n(x, y) = (B_n \exp(i\Psi_n)) [x, y] \quad (16.2)$$

$$\bar{W}_n(u, v) = (A_n \exp(i\Phi_n)) [u, v] \quad (16.3)$$

$$\bar{F}_n(x, y) = ((\lambda_n F_0 + (1 - \lambda_n D_B) B_n) \exp(i\Psi_n)) [x, y] \quad (16.4)$$

$$F_n = B_n \exp(i\Psi_n) = Fr [W_n] \quad (16.5)$$

$$A_{n+1} \exp(i\Phi_{n+1}) = Fr^{-1} [\bar{F}_n] \quad (16.6)$$

$$(1 - \lambda_n) \hat{A}_0 \exp(i\hat{\Phi}) = Fr^{-1} [(1 - \lambda_n D_B) F_n] \quad (16.7)$$

IFTA가 단조 수렴하기 위해서는 아래에서 전개한 부등식 (17)이 성립하여야 하고 단조 수렴이 되도록 하는 완화 변수의 범위가 단조 수렴의 충분 조건이 된다. 또한 식의 전개에서 나타나는 피적분 항들간에 부등식 (17)이 성립하면 되는 것이다.

$$\begin{aligned} \lambda^2 \int \int_{-\infty}^{\infty} \|F_{n+1} - F_0\|^2 dx dy &= \int \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda B_{n+1} \exp(i\Psi_{n+1}) \\ &\quad - \lambda F_0 \exp(i\Psi_{n+1})|^2 dx dy \\ &\leq \int \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda B_{n+1} \exp(i\Psi_{n+1}) - \lambda F_0 \exp(i\Psi_n)|^2 dx dy \\ &= \int \int_{-\infty}^{\infty} |-\lambda B_{n+1} \exp(i\Psi_{n+1}) - (1 - \lambda D_B) B_n \exp(i\Psi_n) \\ &\quad + (1 - \lambda D_B) B_n \exp(i\Psi_n) + \lambda F_0 \exp(i\Psi_n)|^2 dx dy \\ &= \int \int_{-\infty}^{\infty} |A_{n+1} \exp(i\Phi_{n+1}) - (1 - \lambda) \hat{A}_0 \exp(i\hat{\Phi}) - \lambda A_0 \exp(i\Phi_{n+1})|^2 dudv \\ &\leq \int \int_{-\infty}^{\infty} |A_{n+1} \exp(i\Phi_{n+1}) - (1 - \lambda) \hat{A}_0 \exp(i\hat{\Phi}) - \lambda A_0 \exp(i\Phi_n)|^2 dudv \\ &= \int \int_{-\infty}^{\infty} |[\lambda F_0 + (1 - \lambda D_B) B_n] \exp(i\Psi_n) \\ &\quad - (1 - \lambda D_B) B_n \exp(i\Psi_n) - \lambda B_n \exp(i\Psi_n)|^2 dx dy \\ &= \lambda^2 \int \int_{-\infty}^{\infty} |F_0 - F_n|^2 dx dy = \lambda^2 \int \int_{-\infty}^{\infty} |F_0 - |F_n||^2 dx dy \end{aligned} \quad (17)$$

식 (17)의 전개에서 다섯번째 줄의 부등식

$$\int \int_{-\infty}^{\infty} |A_{n+1} \exp(i\Phi_{n+1}) - (1 - \lambda) \hat{A}_0 \exp(i\hat{\Phi}) - \lambda A_0 \exp(i\Phi_{n+1})| dudv$$

$$\leq \int \int_{-\infty}^{\infty} |A_{n+1} \exp(i\Phi_{n+1}) - (1 - \lambda) \hat{A}_0 \exp(i\hat{\Phi}) - \lambda A_0 \exp(i\Phi_n)| dudv \quad (18)$$

을 만족하게 하는 완화 변수 λ 의 범위를 구하면 된다. 이를 위해 식 (18)의 우변의 피적분항의 제곱에서 좌변의 피적분항의 제곱을 빼고 정리하면,

$$\begin{aligned} RHS - LHS &= 2\lambda A_0 \left\{ A_{n+1} (1 - \cos(\Phi_n - \Phi_{n+1})) \right. \\ &\quad \left. + (1 - \lambda) \hat{A}_0 (\cos(\Phi_n - \hat{\Phi}) - \cos(\Phi_{n+1} - \hat{\Phi})) \right\} \end{aligned} \quad (19)$$

식 (19)에서 이려면 완화 변수 λ 가

$$0 \leq \lambda \leq 1 + \frac{A_{n+1} (1 - \cos(\Phi_n - \Phi_{n+1}))}{\hat{A}_0 (\cos(\Phi_n - \hat{\Phi}) - \cos(\Phi_{n+1} - \hat{\Phi}))} \quad (20)$$

을 만족하면 된다. 잡음 영역에 분포한 에너지가 신호 영역에 분포하고 있는 에너지보다 충분히 작다면 식 (16.7)에서 알 수 있는 바와 같이 Φ_n 과 Φ 의 차이가 근소하여

$$\cos(\Phi_n - \hat{\Phi}) - \cos(\Phi_{n+1} - \hat{\Phi}) > 0 \quad (21)$$

이 됨을 알 수 있다. 따라서, 신호 영역에 분포하는 에너지가 잡음 영역에 분포하는 에너지보다 충분히 큰 경우에 IFTA가 단조 수렴하기 위한 완화 변수 λ_n 의 충분 조건은 λ_n 이 범위 $0 \leq \lambda_n \leq 1$ 에 있는 것이다. 위의 논의에서는 부등식 (17)의 전개에서 나타나는 적분의 피적분항간의 대소 관계를 통하여 IFTA의 단조 수렴을 증명하였고 단조 수렴하기 위한 전제 조건으로서 식 (21)을 가정하였다. 식 (16.7)에서 보는 바와 같이 연산자 D_B 가 관측면의 전영역을 신호 영역으로 설정하는 경우 식 (21)은 언제나 성립하지만 D_B 에 의해 잡음 영역과 신호 영역이 분리되어 있다면 잡음 영역과 신호 영역의 에너지 분배량에 따라 식 (21)이 반드시 성립하지 않을 수도 있다. 그러나 초기치의 적절한 선택에 의해 IFTA의 처음 반복부터 신호 영역에 대부분의 에너지를 집중케 할 수 있고 잡음 영역에서 최소 레벨 이하의 범위에서 진폭 자유도가 허용되도록 하면 식 (21)은 성립한다.

3. 완화 변수에 대한 오차 함수 의존성

이 장에서는 식 (2)의 오차함수 J 와 완화변수의 관계를 분석하여 완화 변수가 IFTA의 수렴 특성에 미치는 영향을 논한다. IFTA의 $n+1$ 번째 반복 단계에서 평가되는 오차 함수는 식 (22)와 같이 쓸 수 있다. 식 (23)은 IFTA의 $n+1$ 번째 반복 단계에서 얻어진 관측면에서의 회절광 F_{n+1} 과 n 번째 반복 단계의 회절광 F_n 의 관계를 완화 변수 λ_n 를 매개 변수로 하여 나타낸 것이다.

$$J(F_{n+1}, \lambda_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \left| D_B F_{n+1} - F_0 \right|^2 dx dy \quad (22)$$

$$F_{n+1} = Fr D_A Fr^{-1} \left((1 - \lambda_n D_B) F_n + \lambda_n F_0 \exp(i\Psi_n) \right) \quad (23)$$

식 (22)와 식 (23)을 통해 IFTA의 각각의 반복단계에서 J 의 완화 변수 λ_n 에 대한 의존성을 조사할 수 있다. 여기에서, 식 (14)와 같이 정의되는 새로운 함수 J_n 을 도입한다.

$$J_n = \int_{-\infty}^{\infty} \left| Fr(A_0 \exp(i\Pi)) - F_0 \exp(i\Psi_n) \right|^2 dx dy \quad (24)$$

J_n 은 IFTA의 n 번째 반복 단계에서 얻어진 회절광 F_n 의 위상을 보존하고 진폭만 F_0 로 치환한 함수와 진폭 A_0 , 위상 분포 Π 를 갖는 복소파의 프레넬 변환과의 오차를 나타낸다. J 가 회절광의 절대값만을 고려한 오차 함수인 것과는 달리 J_n 은 진폭과 위상을 모두 고려한 오차 함수이다. J_n 을 최소로 만드는 위상함수 Φ 의 전역 최적점을 Φ_n^+ 이라고 하자. Φ_n^+ 은 오차함수 J 를 최소로 하는 위상분포의 전역 최적점과는 다를 수 있다. 위상함수로 Φ_{n+1}^+ 를 갖는 회절광학소자에 의해 회절된 빛을 \tilde{F}_{n+1} 라고 하면

$$\tilde{F}_{n+1} = Fr \left[A_0 \exp(i\Phi_{n+1}^+) \right] \quad (25)$$

이고 삼각 부등식의 관계로부터 다음과 같은 부등식이 성립함을 알 수 있다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| D_B F_{n+1} - \tilde{F}_{n+1} \right|^2 dx dy \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| D_B F_{n+1} - F_0 \right|^2 dx dy$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| D_B F_{n+1} - \tilde{F}_{n+1} + \delta \right|^2 dx dy \quad (26)$$

식 (26)에서 δ 은 $\delta = \left| \tilde{F}_{n+1} - F_0 \exp(i\Psi_{n+1}) \right|$ 이다.

다음으로 새로운 평가 함수 \tilde{J} 을 식 (27)과 같이 정의하면

$$\tilde{J} = \int_{-\infty}^{\infty} \left| D_B F_{n+1} - \tilde{F}_{n+1} \right|^2 dx dy \quad (27)$$

δ 이 작을 때, $n+1$ 번째 IFTA 반복 단계에서 완화 변수에 대한 \tilde{J} 의 거동을 통해 근사적으로 J 의 완화 변수 의존성을 평가 할 수 있다. 즉 δ 이 작을 경우 J 는 \tilde{J} 와 비슷한 모양새로 완화 변수를 따를 것이다. II.2에서 언급한 바와 같이 초기 위상 분포의 적절한 선택을 통해 IFTA의 처음 반복부터 신호 영역 안으로 빛의 에너지 대부분을 모을 수 있으므로 식 (27)의 계산에서 D_B 의 영향은 작다. 이를 고려하고 프레넬 변환의 선형성과 식 (14)과 식 (15)의 에너지 보존법칙을 이용하면 다음과 같이 \tilde{J} 를 전개할 수 있다.

$$\begin{aligned} \tilde{J}(F_{n+1}, \lambda_n; \tilde{F}_{n+1}) &\cong \int_{-\infty}^{\infty} \left| F_{n+1} - \tilde{F}_{n+1} \right|^2 dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| Fr D_A Fr^{-1} \left((1 - \lambda_n D_B) F_n + \lambda_n F_0 \exp(i\Psi_n) \right) - Fr \left(A_0 \exp(i\Phi_{n+1}^+) \right) \right|^2 dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| D_A Fr^{-1} \left((1 - \lambda_n D_B) F_n + \lambda_n F_0 \exp(i\Psi_n) \right) - A_0 \exp(i\Phi_{n+1}^+) \right|^2 du dv \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| D_A Fr^{-1} \left((1 - \lambda_n) F_n + \lambda_n (1 - D_B) F_n + \lambda_n F_0 \exp(i\Psi_n) \right) - A_0 \exp(i\Phi_{n+1}^+) \right|^2 du dv \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| D_A \left((1 - \lambda_n) A_0 \exp(i\Phi_n) + \lambda_n (A'_{n+1} \exp(i\Phi'_{n+1}) + A_{n+1} \exp(i\Phi_{n+1})) \right) - A_0 \exp(i\Phi_{n+1}^+) \right|^2 du dv \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| D_A \left((1 - \lambda_n) A_0 \exp(i\Phi_n) + \lambda_n \hat{A}_{n+1} \exp(i\hat{\Phi}_{n+1}) - A_0 \exp(i\Phi_{n+1}^+) \right) \right|^2 du dv \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| D_A \left((1 - \lambda_n) A_0 \exp(i(\Phi_n - \Phi_{n+1}^+)) + \lambda_n \hat{A}_{n+1} \exp(i(\hat{\Phi}_{n+1} - \Phi_{n+1}^+)) - A_0 \right) \right|^2 du dv \end{aligned} \quad (28)$$

식 (28)에서 $A'_{n+1} \exp(i\Phi'_{n+1})$ 와 $\hat{A}_{n+1} \exp(i\hat{\Phi}_{n+1})$ 는 각각 식 (29)와 식 (30)과 같다.

$$A'_{n+1} \exp(i\Phi'_{n+1}) = Fr^{-1} \left((1 - D_B) F_n \right) \quad (29)$$

$$\hat{A}_{n+1} \exp(i\hat{\Phi}_{n+1}) = A'_{n+1} \exp(i\Phi'_{n+1}) + A_{n+1} \exp(i\Phi_{n+1}) \quad (30)$$

또한, 식 (28)의 마지막 식에서는 $\exp(i\Phi) D_A W =$

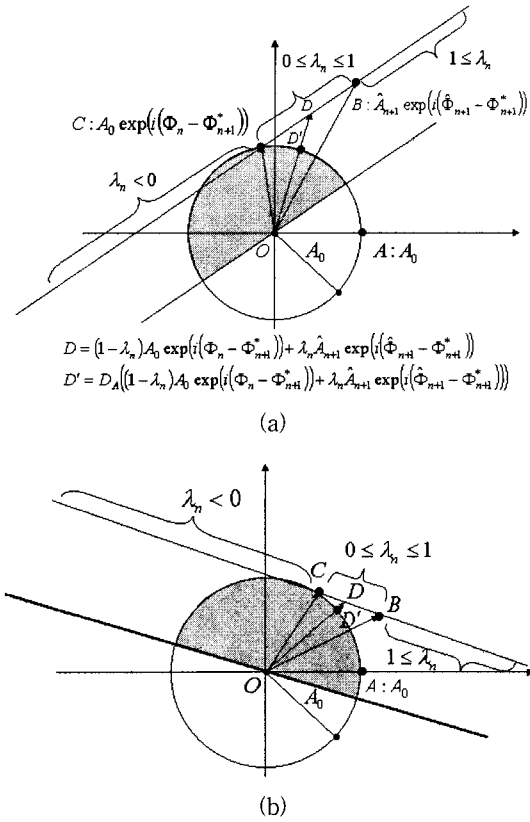


그림 2. \tilde{J} 의 피적분 함수의 복소 평면 도해. (a)는 적당한 완화 변수 λ_n 에 대하여 점 D' 가 전역 최적점 A 에 도달할 수 없는 경우(type I)이고 (b)는 이러한 λ_n 이 존재하는 경우(type II)이다.

Fig. 2. Illustration of the integrand of \tilde{J} on the complex plane. (a) shows the case in which no relaxation parameter λ_n exists such that D' can reach global optimum point A (type I). (b) shows the case in which a fit relaxation parameter exists so that D' can reach the global optimum point A (type II).

$D_A(W \exp(i\Phi))$ 의 관계를 이용하였다.

식 (28)에서 얻은 적분식의 피적분 함수의 완화변수에 대한 의존성을 알기 위하여 피적분 함수를 복소 평면 위에 도해하면 <그림 2>와 같다.

<그림 2>는 입력면의 임의의 점 (u, v) 에서 피적분 함수의 구성 함수들의 샘플 값을 복소 평면상의 점으로 나타낸 것이다. 점 A 는 점 (u, v) 에서의 전역 최적점 $A_0 \exp(i\Phi_{n+1}^*)$ 을 나타낸다. 피적분 함수에서 연산

자 D_A 의 피연산 함수의 값은 <그림 2>에서 점 D 로 나타나고 점 C 와 점 B 의 선형 결합이 된다. IFTA의 수렴성에 의해 점 B 가 점 C 보다 위상차의 관점에서 전역 최적점 A 에 더 가깝다고 할 수 있다.

따라서 점 B 는 원점에서 점 C 와 전역 최적점 A 를 잇는 선분이 이루는 π 보다 작은 사이각의 사이에 위치하게 된다. 피연산 함수에 연산자 D_A 가 적용된 후의 값은 점 D 와 원점을 연결한 선분이 원점을 중심으로 반지름이 A_0 인 원과 만나는 점 D' 로 표시된다. 완화 변수 λ_n 과 원 안 어두운 영역에 속하는 부분의 원주 위의 점 D' 은 일대일로 대응한다. 식(28)의 피적분 함수는 복소 평면 상에서 점 A 와 점 D' 와의 거리의 제곱에 해당한다.

이제, 완화변수 λ_n 과 선분 AD' 의 길이와의 관계를 알아보자. 점 A 의 좌표를 $(A_0, 0)$, 점 B 의 좌표를 (x_2, y_2) , 점 C 의 좌표를 (x_1, y_1) 라고 하면 점 D 는 점 B 와 C 의 내분점이므로 $((1 - \lambda_n)x_1 + \lambda_n x_2, (1 - \lambda_n)y_1 + \lambda_n y_2)$ 이고 점 D' 은 원점과 점 D 를 잇는 선분과 원이 만나는 점이다. 원점에서 점 D' 로의 벡터가 x 축의 양의 방향과 시계 반대 방향으로 이루는 각도를 θ 라고 하면 선의 기울기를 $\tan \theta$ 라 했을 때, $\tan \theta$ 는

$$\tan \theta = \frac{(1 - \lambda_n)y_1 + \lambda_n y_2}{(1 - \lambda_n)x_1 + \lambda_n x_2} \quad (31)$$

이고 D' 는 $(A_0 \cos \theta, A_0 \sin \theta)$ 이다. 여기서 (x_1, y_1) 과 (x_2, y_2) 는 각각

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) &= A_0 (\cos(\Phi_n - \Phi_{n+1}^*), \sin(\Phi_n - \Phi_{n+1}^*)) \\ (x_2, y_2) &= A_{n+1} (\cos(\Phi_{n+1} - \Phi_{n+1}^*), \sin(\Phi_{n+1} - \Phi_{n+1}^*)) \end{aligned} \quad (32)$$

이다. 점 D' 의 위치에 따라 각도 θ 를 정리하면

i) D' 가 제 1사분면 위에 있을 때

$$\theta = \arctan \left(\frac{(1 - \lambda_n)y_1 + \lambda_n y_2}{(1 - \lambda_n)x_1 + \lambda_n x_2} \right) \quad (33)$$

ii) D' 가 제 2사분면 또는 제 3사분면 위에 있을 때

$$\theta = \pi + \arctan \left(\frac{(1-\lambda_n)y_1 + \lambda_n y_2}{(1-\lambda_n)x_1 + \lambda_n x_2} \right) \quad (34)$$

iii) D' 가 제 4사분면 위에 있을 때

$$\theta = 2\pi + \arctan \left(\frac{(1-\lambda_n)y_1 + \lambda_n y_2}{(1-\lambda_n)x_1 + \lambda_n x_2} \right) \quad (35)$$

이다. 점 B 와 점 C 를 잇는 직선이 x 축과 이루는 각도를 θ_1 이라고 하면 완화 변수 λ_n 이 변함에 따라 점 D' 의 위상 θ 가 변하는 범위는 $0 \leq \theta_1 \leq \pi/2$ 일 때 (<그림 2 (a)>)와 $3\pi/2 \leq \theta_1 \leq 2\pi$ (<그림 2(b)>)인 경우로 나누어 볼 수 있다. 이외의 경우는 이 두 가지 경우의 x 축 대칭이 되므로 점 A, B, C, D 간의 위치 관계는 다음과 같은 두 가지 경우로 분류할 수 있다. 점 D' 의 위상 θ 의 범위는

i) $0 \leq \theta_1 \leq \pi/2$ 일 때

$$\theta_1 < \theta < \theta_1 + \pi \quad (36)$$

ii) $3\pi/2 \leq \theta_1 \leq 2\pi$ 일 때

$$\theta_1 < \theta \leq 2\pi, 0 \leq \theta < \theta_1 - \pi \quad (37)$$

이다.

<그림 2>를 통해 알 수 있는 바와 같이 <그림 2(a)>의 $0 \leq \theta_1 \leq \pi/2$ 인 경우는 점 D' 를 국소 최적점인 A 와 일치시킬 수 있는 완화 변수가 존재하지 않는 반면 <그림 2(b)>의 경우에는 D' 를 국소 최적점인 A 와 일치시킬 수 있는 완화 변수가 반드시 존재한다. 완화 변수가 변함에 따라 점 D' 는 <그림 2>의 어두운 영역의 원주 위를 움직일 수 있다.

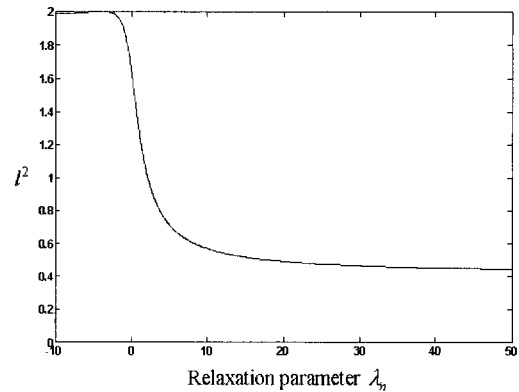
전역 최적점 A 의 좌표는 이므로 선분 DA 의 길이의 제곱 l^2 은 다음과 같다.

$$l^2 = 2A_0^2(1 - \cos\theta) \quad (38)$$

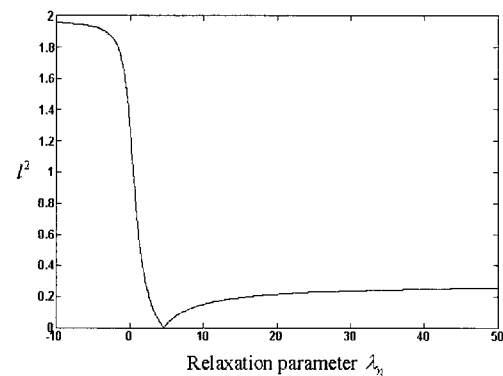
위 관계를 이용하여 $0 \leq \theta_1 \leq \pi/2$ (<그림 2 (a)>)와 $3\pi/2 \leq \theta_1 \leq 2\pi$ (<그림 2(b)>)인 경우 각각에 대한 선분 DA 의 길이의 제곱 l^2 , 즉 평가 함수 \tilde{J} 의 피

적분 항이 완화 변수에 따라 변하는 모양을 <그림 3(a)>와 <그림 3(b)>에 나타내었다. <그림 2(a)>의 경우에 해당하는 샘플을 type I이라고 하고 <그림 2(b)>의 경우에 해당하는 샘플을 type II라고 하면 type I의 경우 <그림 3(a)>에서 보는 바와 같이 완화 변수가 커질수록 평가 함수 \tilde{J} 의 피적분 항의 크기가 감소하는데 비하여 type II의 경우는 <그림 3(b)>에서 보듯이 피적분 항의 크기를 0으로 만드는 단 하나의 완화 변수 값이 존재하고 이 점을 중심으로 피적분 항의 크기가 매끈하게 아래로 볼록한 형태를 보인다.

IFTA의 처음 반복과정에서는 최적해와 오차가 큰 type I의 샘플이 상대적으로 오차가 작은 type II의 샘플보다 많고 IFTA의 반복이 진행되면 type II의 샘플



(a)



(b)

그림 3. 완화변수와 \tilde{J} 의 피적분 함수와의 관계 (a) type I의 경우, (b) type II의 경우

Fig. 3. Relation between the relaxation parameter and the integrand of \tilde{J} (a) the case of the type I, (b) the case of type II.

들이 type I의 샘플보다 더 많아 질것으로 예상된다. 따라서 IFTA의 반복 초기에 완화변수의 값을 무한히 크게 하여 다수를 차지하고 있는 type I의 샘플들을 급격히 전역 최적점 근방으로 급격히 수렴시킬 수 있어 수렴 속도를 향상시킬 수 있다. 이러한 효과의 컴퓨터 시뮬레이션 결과를 다음 장에서 논하였다. 지금까지는 평가 함수 \tilde{J} 의 피적분 항의 완화 변수에 대한 의존성을 분석하였는데 이로부터 평가 함수 \tilde{J} 가 완화 변수에 따라 변하는 모양을 설명할 수 있다. II장 2절 IFTA 수렴 증명에서 모든 오차 함수 J 의 피적분 항이 1보다 작은 완화변수에 대해서는 단조감소 함을 보였다. IFTA의 단조감소의 충분조건에서 $\lambda_n = 0+$ 에서 $\partial J / \partial \lambda_n \leq 0$ 이므로 \tilde{J} 의 모든 피적분 함수의 샘플들의 크기가 단조감소하는 영역은 $0 \leq \lambda_n \leq \varepsilon$ 인 영역을 반드시 포함하게 된다. 따라서 <그림 3>에서 보듯이 $\lambda_n = 0+$ 근방에서는 λ_n 이 커짐에 따라 단조감소 함을 알 수 있다. 완화 변수에 대한 \tilde{J} 의 피적분 항 샘플들의 이러한 거동은 샘플들의 합인 적분 \tilde{J} 가 완화 변수에 대하여 <그림 4>에서 보는 것과 같이 아래로 매끈하게 볼록인 형태로 거동하게끔 한다. <그림 5>에서는 DOE의 설계 과정에서 실제로 오차 함수 J 의 크기를 완화 변수의 값을 변화시켜 보면서 얻은 결과를 보였다. 완화 변수에 대한 J 의 거동이 위에서 분석한 \tilde{J} 의 거동을 따르고 있음을 볼 수 있다. 지금까지의 분석을 통해 <그림 5>에서 나타낸 모양새는 IFTA의 오차 함수 J 의 완화 변수에 대한 일반적인 의존성을 나타내고 있다고 볼 수 있다. <그림 5>에서 점선은 입사면에서의 초기 위상 분포를 0으로 한 경우에 완화변수에 따른 정규화된 오차함수의 변화를 나타낸다. 또 마크 표시가 되어 있는 그래프는 국소 최적점에 거의 다다른 IFTA의 후기 반복 과정에서 얻은 결과이다. 국소 최적점 근방에서는 오차함수가 완화변수에 대하여 크게 변하지 않는 것을 볼 수 있다.

III. 완화 변수 스케줄링

1. 최급 강하법(the steepest descent method)에 의한 IFTA의 수렴성 향상
앞에서 분석한 바와 같이 일반적으로 IFTA의 오차

함수의 크기는 완화변수에 대하여 아래로 볼록하고 매끈하게 변하는 구간이 존재한다. (<그림 4> 참조) 따라서 최급 강하 방식의(the steepest descent manner) 완화변수 스케줄링을 적용할 수 있을 것이다. 이는 매 반복 단계에서 오차의 감소를 최대로 하는 완화변수를 선택함으로써 IFTA의 수렴속도를 증가시키는 것이다. 일반적인 반복적 비선형 최적화 알고리즘에서 완화 변수에 대한 오차함수의 의존성도 비선형이므로 완화변수를 해석적으로 결정하는 것이 불가능하다. 따라서 최급 강하를 위한 완화 변수는 실험적인 방법으로 결정할 수 밖에 없는데 IFTA의 경우는 완화변수에 대하여 오차함수가 아래로 오목하고 매끈한 연속 구간이 존재하므로 최급 강하를 유도하는 완화변수를 간단하고 빠르게 검색하여 찾을 수 있다. <그림 6>에서 최급 강하 완화변수를 찾는 간단한 알고리즘을 소개하였다. 5 스텝으로 된 검색 윈도우의 각 스텝에는 일정한 차이를 갖는 완화변수의 값이 저장되어 있고 각각의 완화변수에 대한 오차함수의 값을 비교한다. α_4 의 오차함수의 값이 최소인 경우에는 오른쪽으로 3 스텝만큼 검색 윈도우를 이동한 후 다시 각각의 완화변수에 대한 오차함수를 비교하고 α_0 의 오차함수의 값이 최소인 경우는 왼쪽으로 3 스텝만큼 검색 윈도우를 이동한다. 이러한 과정을 반복하여 오차함수의 최소점이 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 중 어느 하나에서 발생할 때까지 검색하면, 최소점에 해당하는 완화 변수가 최급 강하 완화 변수가 된다.

컴퓨터 시뮬레이션에서는 샘플링 격자의 크기는 64×64 행렬을 사용하였고 물리적인 크기는 2.4mm×

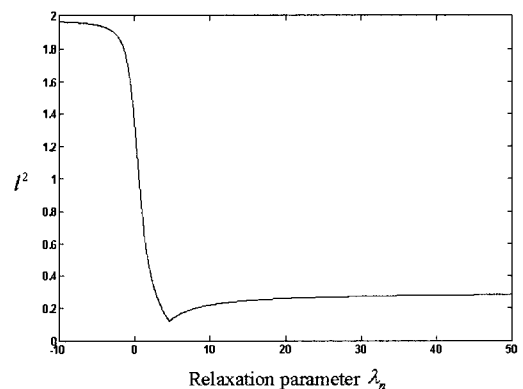


그림 4. 완화변수에 대한 평가 함수 \tilde{J} 의 의존성
Fig. 4. The dependence of the evaluation function \tilde{J} on the relaxation parameter.

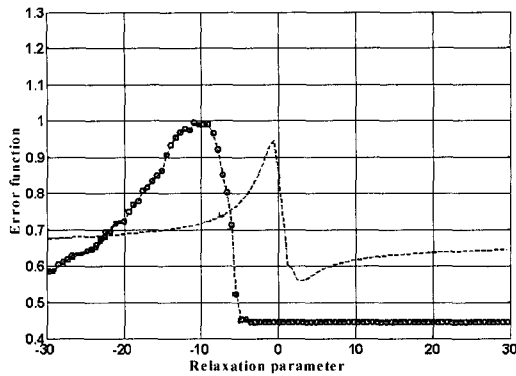


그림 5. 완화변수와 오차함수의 관계(점선은 IFTA 반복 초기단계, Mark 점선은 IFTA 반복 후기단계)
 Fig. 5. The relation between the relaxation parameter and the error function(Dotted line: early IFTA iteration step, Marked dotted line: latter IFTA iteration step)

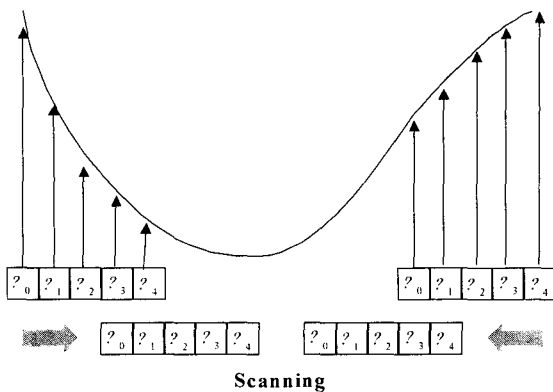


그림 6. 최급 강하 완화변수 검색 알고리즘
 Fig. 6. Algorithm of searching the steepest descent relaxation parameter.

2.4mm, 파장은 532nm, 초점거리 1m, 회절광학소자의 개구는 반지름 1mm인 원형이고 성형하고자 하는 회절 이미지는 가로 세로 4.4mm×4.4mm 정사각형으로 하였다. <그림 7>에서 완화변수를 고정할 경우와 최급 강하 방식에 의한 IFTA의 수렴을 비교하였다. 실선은 고정 완화변수의 경우의 수렴을, 점선은 최급 강하 방식의 수렴을 나타낸다. 최급 강하 방식에 의하여 IFTA는 더 작은 오차를 갖는 해로 수렴하였으며 20번의 반복을 통해 이미 국소 최적점에 수렴하고 있음을 볼 수 있다. 반면, 완화변수를 고정할 경우는 최급 강하법에 비해 수렴 오차가 크다.

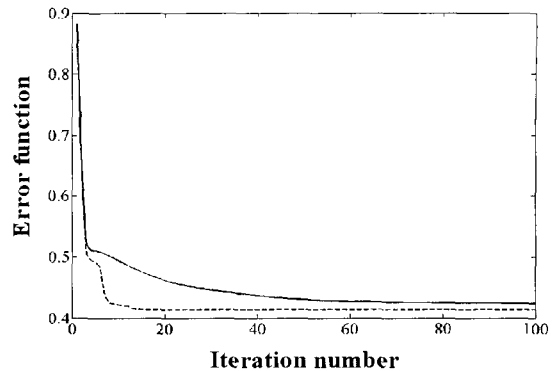


그림 7. 최급 강하법에 따른 수렴성 향상(실선은 완화변수가 상수인 경우, 점선은 매 반복 단계에서 최급 강하법에 따라 완화변수를 결정할 경우)
 Fig. 7. Improvement of the convergence by use of the steepest descent method(Solid line: constant relaxation parameter, Dotted line: the steepest descent method).

2. 큰 값을 갖는 완화 변수의 효과

일반적으로 반복적 알고리즘의 수렴점은 초기치에 따라 달라진다. 전역 최적점으로의 수렴을 보장하는 초기 위상 분포를 구한다는 것은 일반적으로 불가능하다. IFTA의 수렴점에서의 오차가 작은 초기 위상을 구하는 것은 어려운 일이기 때문에 임의의 랜덤 위상 분포를 초기치로 하여 IFTA를 여러 번 반복 실행한 후 오차의 크기가 가장 작은 해를 선택하는 것이 일반적이다. <그림 3>과 <그림 4>에서 알 수 있듯이 완화변수가 절대값이 큰 양수이거나 음수인 경우 IFTA는 현재의 반복 과정을 통해 오차 함수를 감소하게 하지 않는다. <그림 2(a)>에서 보듯이 단위원 내부의 어두운 부분이 전역 최적점 A를 포함하지 않는 type I의 위치 관계의 경우는 완화 변수의 값이 클수록 전역 최적점과의 오차가 감소한다. IFTA의 반복 초기 과정에서 완화 변수의 크기를 무한히 크게 할 경우 바로 다음의 반복 과정에서 단위원 내부의 어두운 영역이 전역 최적점 A를 포함하는 type II의 위치 관계로 샘플의 성질을 전환할 수 있는 가능성을 제공한다. 이는 IFTA의 초기 위상 분포에 내포되어 있는 정체현상(stagnation)의 요소를 개선하는 효과라고 할 수 있다. Type II의 샘플들의 경우 완화 변수가 큰 경우 오히려 전역 최적점과의 오차가 커지게 되는데 이러한 작용은 초기 반복 과정에서 샘플들간의 오차를 균등하게 하고 대부분의 샘플을 type II로 전환하는 효과를 갖는다고 볼 수

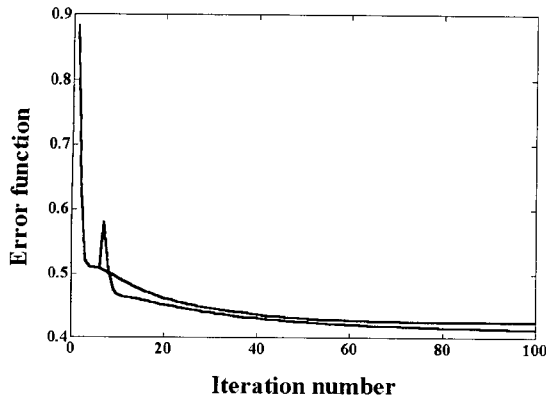


그림 8. 큰 값을 갖는 완화변수의 효과(실선은 완화변수가 상수인 경우, 점선은 IFTA의 초기 반복 단계에 큰 값을 갖는 완화변수를 배치한 결과)

Fig. 8. The effect of the large relaxation parameter (Solid line: constant relaxation parameter, Dotted line: large relaxation parameter)

있다. 따라서 IFTA에 의한 DOE의 위상 함수의 최적화 문제에서는 반복 과정 동안 IFTA의 단조 수렴을 보장하지 않는 구간에서 완화변수를 선택하여 IFTA의 수렴의 향상을 가능하게 할 수 있다. <그림 8>에서는 큰 값을 갖는 완화변수를 IFTA의 반복 초기 단계에 배치하여 얻은 결과와 가장 좋은 수렴특성을 갖는 고정 완화 변수 스케줄(본 논문에서는 $\lambda_n=1$)의 결과를 비교하였다. <그림 8>에서 점선은 큰 값의 완화변수를 배치하여 얻은 결과이고 실선은 고정된 완화 변수 스케줄에 의한 결과이다. 점선으로 표시된 수렴 곡선이 증가를 나타내는 부분에서 완화변수의 크기를 200으로 하였다. <그림 8>에서 보듯이 초기 반복과정에 배치된 큰 값의 완화변수로 인하여 IFTA의 수렴이 향상되었음을 알 수 있다.

3. 유전 알고리즘을 이용한 완화 변수 스케줄링

지금까지의 논의를 통해 완화 변수의 결정이 IFTA의 수렴 특성에 중요한 결정 조건이 되는 것임을 알 수 있었다. IFTA를 이용하여 회절광학소자의 위상 분포의 최적해를 구하기 위해서는 IFTA의 최적 활용이 필요하고 IFTA의 최적 활용에는 최적의 완화 변수의 스케줄링을 구하는 것이 요구된다. 완화 변수 스케줄링은 또 다른 하나의 비선형 최적화 문제로 볼 수 있다^[14]. 본 논문에서는 이 문제를 다루기 위하여 유전 알고리즘을 도입하였다. 유전 알고리즘을 IFTA의 메타 알고리즘으로 적용함으로써 완화 변수 스케줄링을 구하

는 하이브리드 형식을 제안한다. 유전 알고리즘에 의한 완화 변수 최적화의 장점은 비단 최적화하려는 함수가 IFTA의 오차 함수 J 인 경우 뿐 만 아니라 회절이미지의 균일도나 SNR과 같은 다른 설계 평가지수의 최적화에도 이용될 수 있다는 것이다. 기존의 고정 완화변수를 사용하는 경우 오차 함수는 물론 기타 다른 평가 지수들을 제어할 수 없었는데 본 논문에서 제안한 하이브리드 형식에서는 최적화 목적 함수의 설계에 따라 최적화를 실현할 수 있어 다양한 설계 요구 조건을 만족시킬 수 있는 것이다. DOE의 위상 최적화는 IFTA를 사용하고 유전 알고리즘을 통해 IFTA의 운용을 제어한다는 것이 본 논문에서 제안하는 하이브리드 알고리즘의 골자가 된다. 하이브리드 알고리즘에서 사용한 유전 알고리즘의 형식은 마이크로 유전 알고리즘(Micro-Genetic-Algorithm: MGA)^[8,9]이고 계산 시간을 줄이기 위하여 멀티 스레드 코딩으로 구현하였다. 유전 알고리즘을 이용한 완화변수 스케줄링은 병렬 작업을 통해 계산하기 용이하므로 리눅스 기반의 대규모 병렬 시스템에서 실현하는데도 적합하다. DOE 설계 및 컴퓨터 시뮬레이션을 위해 펜티엄 III 1GHz CPU 2개를 탑재한 dual CPU 시스템을 이용하였고 알고리즘은 Visual C++ 6.0으로 코딩하였다. 2개의 CPU를 동시에 사용하기 위하여 Cohen과 Woodring의 멀티스레드 라이브러리^[15]를 사용하였다. <그림 9>에서는 마이크로 유전 알고리즘의 구조도를 보였다. 실수 코딩과 미세조정 돌연변이 연산자^[7]를 갖는 MGA를 구현하였다. MGA는 작은 population size를 가지고도 동작하도록 고안되었기 때문에 IFTA와 같이 목적 함수의 계산 시간이 큰 경우에 적합하다. 하이브리드 알고리즘을 멀티 스레드로 병렬 구현한 경우와 싱글 스레드 방식으로 구현한 경우 알고리즘의 실행시간을 비교하여 보았다. 멀티 스레드 방식으로 구현한 코드는 싱글 스레드 방식으로 구현한 코드보다 2배 이상의 계산 속도를 얻을 수 있었다. 멀티스레드와 싱글 스레드 방식의 비교를 <그림 10>에 나타내었다. <그림 10(a)>에서는 population size에 따른 계산시간을 비교하였고 <그림 10(b)>에서는 완화 변수 스케줄링 벡터의 크기, 즉 최적화 하고자 하는 변수의 개수에 따른 계산 시간을 비교하였다. 제안된 하이브리드 DOE 설계 알고리즘의 경우 싱글 스레드 방식의 구현보다 멀티스레드 방식의 구현이 바람직함을 알 수 있다. 특히 IFTA의 완화변수 스케줄링에서는 목적 함수의 계산이 오래 걸리기 때문에 병렬 유

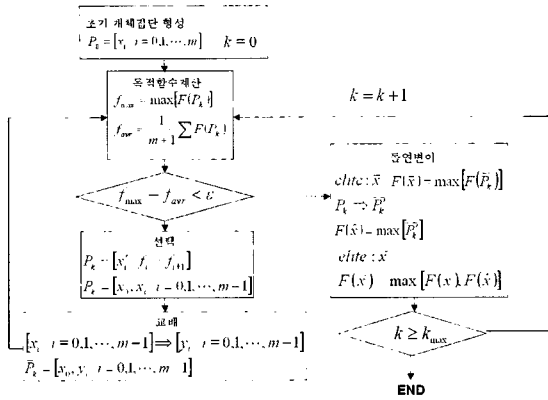


그림 9. 마이크로 유전 알고리즘의 구조도
Fig. 9. The structure of Micro Genetic Algorithm.

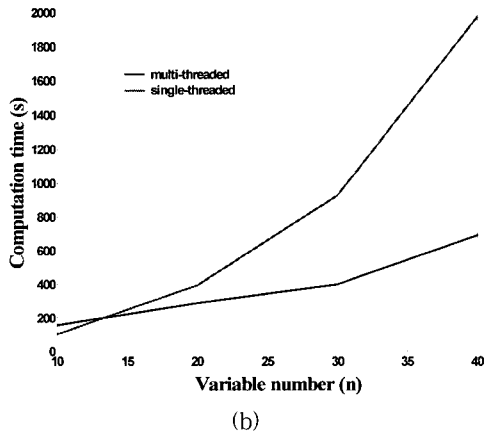
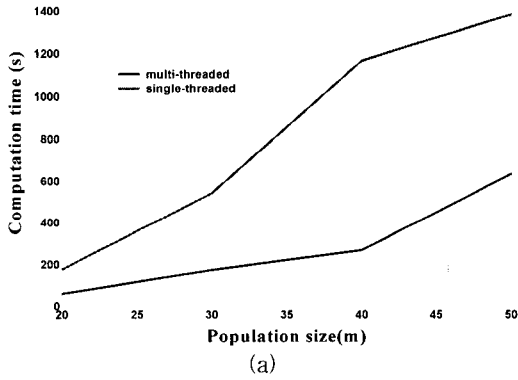


그림 10. 하이브리드 DOE 설계 알고리즘의 멀티 스레드 방식 구현과 싱글 스레드 방식 구현의 계산 시간 비교 (a) population size에 따른 비교, (b) 변수 개수에 따른 비교
Fig. 10. Comparison of Multithreaded implementation with single-threaded implementation for the proposed hybrid DOE design algorithm with varying (a) population size and (b) variable number.

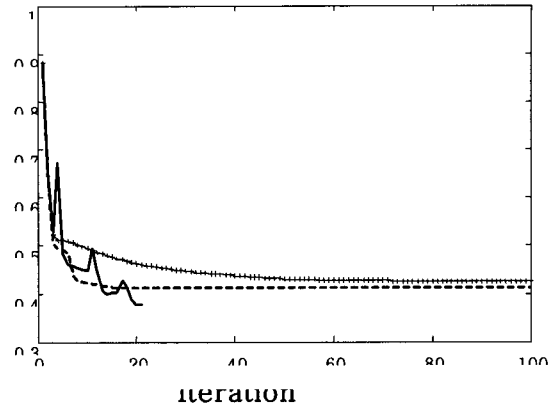


그림 11. 유전 알고리즘에 의해 완화 변수 스케줄링을 한 결과(실선)와 그림 7의 결과(---선과 +++선)의 비교
Fig. 11. Comparison of the result of the relaxation parameter scheduling obtained by using genetic algorithm with the results of Fig. 7 (--- line, +++ line).

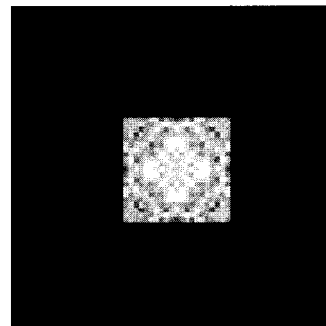
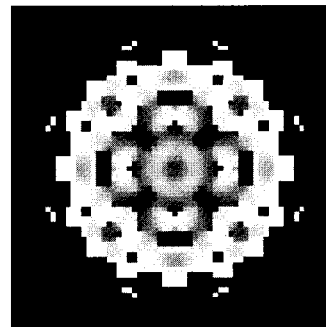


그림 12. 완화 변수 스케줄링에 의해 얻은 회절광학소자의 위상 분포(a)와 회절 이미지(b)
Fig. 12. Results of the diffractive optical element obtained with the relaxation parameter scheduling (a) phase distribution (b) diffraction image.

전 알고리즘의 실현이 중요하다. 또한 완화 변수 스케줄링을 하는 경우 IFTA가 30번의 반복 과정 안에서 수렴하기 때문에 유전 알고리즘을 합리적인 계산시간 내에 운용할 수 있다.

III장 2절에서 논한 바대로, IFTA는 n번째 반복 단계에서 오차 함수를 감소하게 하지 않는 큰 값을 갖는 완화 변수를 사용한 경우에 오차 함수를 감소 시키는 크기가 작은 완화변수를 사용한 경우보다 n+1번째 이후부터 더 향상된 수렴성을 보일 수 있다. 이러한 IFTA의 비선형적 특성을 고려하여 완화 변수의 크기는 -30부터 +30까지 충분히 넓은 범위를 변화게 하였다. 유전 알고리즘의 처음 population 집합에 완화 변수의 크기를 1로 고정한 고정 완화 변수 스케줄을 엘리트 염색체로 포함시켰다. <그림 11>에서 유전 알고리즘에 의한 완화 변수 스케줄링의 결과를 보였다. 20회 정도의 적은 반복 횟수를 통해 얻은 오차 함수의 크기가 최급 강하법으로 수렴한 오차의 크기 보다 작은 것을 볼 수 있다. <그림 12>에서는 하이브리드 알고리즘을 사용하여 설계한 DOE의 위상 분포와 회절 이미지를 보였다.

IV. 결 론

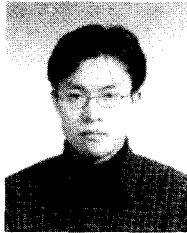
본 논문에서는 완화 변수가 IFTA의 수렴에 미치는 영향을 분석하였고 완화 변수가 IFTA의 수렴을 제어할 수 있음을 보였다. 이를 토대로 IFTA의 수렴성을 향상하기 위한 방법들을 논하였다. 고정 완화 변수를 사용하는 기존의 IFTA 운용의 한계를 극복하기 위하여 완화 변수 스케줄링을 제안하였다. 이론적 분석을 토대로 IFTA의 초기 반복과정에 크기가 큰 완화변수를 배치하는 것이 수렴성을 개선하는 효과를 보인다는 것을 알 수 있었다. 본 논문에서는 IFTA의 최적 운용을 위하여 유전 알고리즘을 이용한 IFTA 완화 변수 스케줄링을 제안하였다. 이론적 분석 및 시뮬레이션을 통해 고정 완화 변수를 사용하는 기존의 IFTA 운용 방법보다 제안된 하이브리드 알고리즘으로 보다 향상된 최적해를 얻을 수 있음을 증명하였다. 논문에서 구현된 하이브리드 DOE 설계 알고리즘은 대규모 병렬 시스템으로 이식이 용이하며 최적화 목적 함수를 구성하는데도 유연하여 기존의 오차 함수 뿐만 아니라 균일성이나 SNR등 다른 설계 지수들의 향상 등 다양한 목적에 맞는 최적화 작업에 응용이 가능하다.

참 고 문 헌

- [1] R. W. Gerchberg and W. O. Saxton, "A practical algorithm of the determination of the phase from image and diffraction plane pictures," *Optik*, vol. 35, no. 2, pp. 237~46, 1972.
- [2] V. A. Soifer, V. V. Kotlyar, and L. L. Doskolovich, *Iterative methods for diffractive optical elements computation*(Taylor & Francis Publishers, London, 1997).
- [3] R. W. Gerchberg, "Super resolution through error energy reduction," *Optica Acta.*, vol. 21, no. 9, pp. 709~720, 1972.
- [4] A. Papoulis, "A new algorithm in spectra analysis and band-limited signal extrapolation," *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. CAS-22, pp. 735~742, 1975.
- [5] F. Wyrowski, "Diffractive optical elements: iterative calculation of quantized blazed phase structures," *Journal of Optical Society of America A*, vol. 7, no. 6, pp. 961~969, 1990.
- [6] J. R. Fineup, "Phase-retrieval algorithm for a complicated optical system," *Applied Optics*, vol. 32, no. 10, pp. 1737~1746, 1993.
- [7] Z. Michalewicz, *Genetic Algorithms+Data Structures = Evolution Programs*, Berlin, 1992.
- [8] E. G. Jonson and M. A. G. Abushagur, "Microgenetic-algorithm optimization methods applied to dielectric gratings," *J. Opt. Am. A.*, vol. 12, pp. 1152~1160, 1995.
- [9] S. Rudnaya, *Analysis and Optimal Design of Diffractive Optical Elements*, Ph. D. thesis, Univ. of Minnesota, 1999.
- [10] J. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, 2nd ed.(McGraw-Hill Book Co., New York, 1996).
- [11] H. Kim, B. Yang, and B. Lee, "Iterative Fourier transform algorithm with Tikhonov's regularization for the optical design of diffractive optical elements," *International*

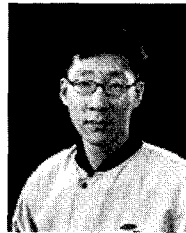
- Workshop on Optical Display and Information Processing, pp. 271~272, Gyeongju, Korea, May 2002.
- [12] H. W. Engl, M. Hanke, and A. Neubauer, Regularization of Inverse Problems(Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London,1996).
- [13] V. V. Kotlyar, P. G. Seraphimovich, and V. A. Soifer, "An iterative algorithm for designing diffractive optical elements with regularization", Opt. Las. Eng., vol 29, pp. 261~268, 1998.
- [14] 김휘, 양병춘, 박진홍, 이병호, "회절광학소자 설계를 위한 반복 푸리에 알고리즘의 최적활용에 대한 연구", 제8회 광전자 및 광통신 학술회의, FD2-2, pp. 357~358, 2001
- [15] A. M. Cohen and M. Woodring, Win32 Multithreaded Programming(O'Reilly & Associated Inc., Sebastopol, CA, 1998).

저 자 소 개



金 輝(學生會員)

2000년 : 서울대학교 전기공학부 졸업. 2003년 : 서울대학교 대학원 전기공학부졸업(석사). 2003년~현재 : 서울대학교 대학원 전기공학부 박사 과정. <주관심분야 : 회절 광학 및 홀로그래피, 광자 결정>



朴 珍 洪(正會員)

1992년 : 한국항공대학교 재료공학과 졸업. 2003년 : 서울대학교 대학원 전기공학부 졸업(석사). 2003년~현재 : 삼성전자 메모리사업부 반도체연구소 Photomask팀 책임 연구원. <주관심분야 : 회절 광학 및 홀로그래피, E-beam Lithography>



楊 秉 春(正會員)

1995년 : 서울대학교 전기공학과 졸업. 1997년 : 서울대학교 대학원 전기공학부졸업(석사) 2002년 : 서울대학교 대학원 전기공학부졸업(Ph.D.). 2003년~현재 : University of Connecticut post-doctoral

fellow. <주관심분야 : 광정보 처리, 홀로그래피 및 회절 광학, 광통신 소자.>



李 竝 浩(正會員)

1987년 : 서울대학교 전자공학과 졸업(문교부장관상 수상). 1989년 : 서울대학교 대학원 전자공학과 졸업(석사). 1993년 : University of California at Berkeley 전기 및 컴퓨터공학과 졸업(Ph.D.). 1994년

9월~현재 : 서울대학교 전기공학부 근무. 현 부교수. 1998년 : 대한전자공학회 해동논문상 수상. 1999년 : 대한전기학회 표창. 2000년 : 한국광학회 논문상 수상. 2000년 : IEEE Senior Member. 2001년 : 한국과학기술단체총연합회 우수논문상 수상. 2002년 : 제 5회 젊은과학자상(대통령상) 수상. 2002년 : 국제광공학회(SPIE) Fellow. 국내외 논문지 및 학술대회에 520 여 편의 논문 발표. <주관심분야 : 3차원 디스플레이, 회절광학소자 및 홀로그래피, 광섬유 격자 소자 등.>