

QAM 변조방식을 갖는 직교 시공간 블록 부호의 심볼 오류

김 상 효* , 강 익 선* , 노 종 선*

Closed-form Expression for the Symbol Error Probability of Orthogonal Space-Time Block Codes with Quadrature Amplitude Modulation

Sang-Hyo Kim*, Ik-Seon Kang*, and Jong-Seon No*

요 약

본 논문에서는 Alamouti[1], Tarokh[14], Xia[11]에 의해 도입된 직교 시공간 부호를 포함한 임의의 선형 직교 시공간 블록 부호에 대해, 느린 레일라이 페이딩 채널(slow Rayleigh fading channel)의 쌍간 오류(pairwise error probability)의 정확한 표현이 2개의 전송된 부호어 행렬(codeword matrices) 사이의 부호어 심볼 거리(codeword symbol distance)가 아니라, 2개의 메시지 벡터(message vector) 사이의 메시지 심볼 거리(message symbol distance)의 식으로 유도된다. 1차원 성분의 심볼 오류를 이용하여, 선형 직교 시공간 부호의 심볼 오류의 정확한 폐형의 표현이 QPSK, 16-QAM, 64-QAM과 256-QAM에 대해 유도된다.

ABSTRACT

In this paper, for any linear orthogonal space-time block including the orthogonal space-time codes introduced by Alamouti[1], Tarokh[14], and Xia[11], the exact expression for the pairwise error probability in the slow Rayleigh fading channel is derived in terms of the message symbol distance between two message vectors rather than the codeword symbol distance between two transmitted codeword matrices. Using the one-dimensional component symbol error probability, the exact closed form expressions for the symbol error probability of linear orthogonal space-time codes are derived for QPSK, 16-QAM, 64-QAM, and 256-QAM.

I. 서 론

Alamouti는 2×2 복소 직교 설계를 채택한 2개의 전송안테나를 가지는 간단한 전송 다이버시티 방법을 제안했다. Alamouti의 방법을 보다 많은 전송 안테나의 개수에 대해 일반화한 시공간 블록 부호가 [14]에서 소개되었다. 직교 시공간 블록 부호는 full diversity를 보장하고, 복호 복잡도가 부호어 행렬의 메시지 심볼의 개수에 선형적으로 증가하는 이점을 가진다.

많은 연구들이 시공간 부호의 정확한 성능 분석보다는 더 좋은 성능을 갖는 부호의 설계 기준 또는 부호의 탐색에 초점이 맞추어져 왔다 [5], [6], [13]. 최근에 Simon[9], Taricco와 Biglieri[12], Byun[2] 등이 각자 시공간 부호의 쌍간 오류의 정확한 표현에 대한 연구를 수행했고, 몇몇 시공간 트렐리스 부호에 대한 비트 오류의 근사를 구했다. 또한 Hochwald[6]는 유니터리 시공간 변조에 대한 쌍간 오류의 정확한 표현에 대한 연구를 수행했다. Lu, Wang,

* 서울대학교 전기·컴퓨터공학부 부호및암호 연구실(jsno@snu.ac.kr)

논문번호: 020522-1209, 접수일자: 2002년 12월 9일

※본 연구는 BK21과 정보통신부 지정 ITRC 프로그램의 지원으로 수행되었습니다.

Kumar, Chugg[8]는 또한 정확한 쌍간 오율과 몇몇 시공간 블록 부호에 대한 BPSK, QPSK 변조에서의 정확한 비트 오율을 유도했다. 이와 독립적으로, 우리는 QPSK, 16-QAM, 64-QAM, 256-QAM의 변조를 갖는 임의의 직교 시공간 블록 부호의 비트 오율과 심볼 오율의 정확한 폐형(closed-form)의 표현을 구했다.

QAM과 직교 시공간 블록 부호는 고속의 데이터 전송을 가능하게 하기 때문에, 차세대 무선 통신 시스템의 표준으로 고려되고 있다. 본 논문에서는 Alamouti[1], Tarokh[14], Xia[11]에 의해 소개되었던 직교 시공간 부호를 포함한 선형 직교 시공간 블록 부호에 대해서, 느리게 변하는 레일리 페이딩 채널(slow-varying Rayleigh fading channel)에서 임의의 선형 시공간 부호의 심볼 오율의 정확한 폐형 표현을 QPSK, 16-QAM, 64-QAM, 256QAM 변조에 대해서 유도한다.

II. 정확한 쌍간 오율

시공간 부호는 무선통신 시스템이 다중 전송안테나를 통해 전송 다이버시티를 얻게 한다. 무선통신 시스템이 L_t 개의 전송안테나와 L_r 개의 수신안테나를 가진다고 가정한다. N 개의 행과 L_t 개의 열을 갖는 부호어 행렬 \mathbf{X} 는 $N \cdot L_t$ 개의 복소 심볼들로 구성된다. x_i^n 은 부호어 행렬 \mathbf{X} 의 n 번째 행, i 번째 열의 원소를 표시한다.

시간 n 에서, \mathbf{X} 의 각 행에 있는 L_t 개의 심볼이 L_r 개의 전송안테나를 통해 동시에 전송된다. 이때, $1 \leq n \leq N$ 이며 각각의 부호어 행렬은 N 심볼 시간 동안 전송된다. 우리는 느린 레일리 페이딩 채널만을 고려하므로, 페이딩은 부호어 행렬이 전송되는 동안 일정하다고 가정한다. $\alpha_{i,j}$ 는 i 번째 전송안테나로부터 j 번째 수신안테나로의 채널 계수라고 하고, 이것은 평균이 0이고 분산이 1인 독립 복소 가우시안 확률 변수라고 한다. $\mathbf{A} = [\alpha_{i,j}]$ 는 $L_t \times L_r$ 채널 행렬이라 하고 이것은 수신기에 알려져 있다고 가정한다. 시간 n 에서, j 번째 수신안테나에 수신된 신호는 y_j^n 이라 표시한다. w_j^n 은 평균이 0이고 분산이 1인, 똑같이 독립적으로 분포된

(i.i.d.) 복소 가우시안 잡음이라 하자. \mathbf{Y} 와 \mathbf{W} 는 각각 y_j^n 들과 w_j^n 들로 구성되는 $N \times L_r$ 행렬이라 한다. 그러므로, 우리는 다음을 얻는다.

$$\mathbf{Y} = \sqrt{\frac{\rho}{E_m}} \mathbf{X} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{W}$$

여기서 ρ 는 평균 신호 대 잡음비(SNR)를 나타내고 E_m 은 한 심볼 기간 동안 L_t 개의 전송안테나로부터 전송되는 평균 에너지를 나타낸다.

본 논문에서는 정방형과 직사각형의 직교 시공간 블록 부호를 고려한다. 여기서의 부호어 행렬은 열간 직교성(columnwise orthogonality)을 만족한다. 즉, 부호어 행렬에서 각 열은 임의의 다른 열과 직교한다. \mathbf{s} 를 다음과 같이 주어지는 길이가 L_s 인 메시지 벡터라 한다.

$$\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_{L_s}) \quad (1)$$

b_s 는 메시지 심볼 s_k 당 비트 수라고 한다. QAM은 2차원 신호 공간에서 정의되므로, (1)의 L_s 차원 복소 메시지 벡터를 다음과 같은 $2L_s$ 차원 실수 벡터로 분리해서 생각하는 것이 편리하다.

$$\mathbf{s}' = (s_{1,x}, s_{1,y}, s_{2,x}, s_{2,y}, \dots, s_{L_s,x}, s_{L_s,y}) \quad (2)$$

여기서 $s_k = s_{k,x} + js_{k,y}$, $1 \leq k \leq L_s$ 이다.

$C(\cdot)$ 은 L_s 항(tuple) 복소 메시지 벡터로부터 다음과 같이 주어지는 열마다 직교하는 $N \times L_r$ 시공간 블록 부호어 행렬로의 사상(mapping)이라 한다.

$$\mathbf{X} = C(\mathbf{s})$$

부호어 행렬 $C(\mathbf{s})$ 의 각 원소들이 메시지 심볼 s_k 들과 그것들의 공액복소수의 선형 조합이라고 하고, 선형 시공간 블록 부호라고 부른다.

다음을 포함한 다양한 선형 복소 직교 시공간 부호가 [1], [11], [14]에서 소개되었다.

$$C_1 = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ -s_2^* & s_1^* \end{pmatrix},$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \frac{s_3}{\sqrt{2}} \\ -s_2^* & s_1^* & \frac{s_3}{\sqrt{2}} \\ \frac{s_3^*}{\sqrt{2}} & \frac{s_3^*}{\sqrt{2}} & \frac{(-s_1 - s_1^* + s_2 - s_2^*)}{2} \\ \frac{s_3^*}{\sqrt{2}} & -\frac{s_3^*}{\sqrt{2}} & \frac{(s_2 + s_2^* + s_1 - s_1^*)}{2} \end{pmatrix},$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & 0 & s_4 \\ -s_2^* & s_1^* & 0 & s_3 & s_5 \\ s_3^* & 0 & -s_1^* & s_2 & s_6 \\ 0 & s_3^* & -s_2^* & -s_1 & s_7 \\ s_4^* & 0 & 0 & -s_7^* & -s_1^* \\ 0 & s_4^* & 0 & s_6^* & -s_2^* \\ 0 & 0 & s_4^* & s_5^* & -s_3^* \\ 0 & -s_5^* & -s_6^* & 0 & s_1 \\ s_5^* & 0 & s_7^* & 0 & s_2 \\ -s_6^* & -s_7^* & 0 & 0 & s_3 \\ s_7 & -s_6 & -s_5 & s_4 & 0 \end{pmatrix}$$

명백히 위의 행렬들은 열간 직교성을 가진다. 선형 직교 시공간 부호의 열간 직교성을 이용하여 하나의 $L_t \times L_t$ 복소 행렬은 다음과 같이 유도될 수 있다.

$$C(\mathbf{s})^H C(\mathbf{s}) = \text{diag} \left\{ \sum_{k=1}^{L_t} g_{k,1} \cdot |s_k|^2, \dots, \sum_{k=1}^{L_t} g_{k,L_t} \cdot |s_k|^2 \right\} \quad (3)$$

여기서 $(\cdot)^H$ 는 복소 행렬의 Hermitian이고, $\text{diag}\{\}$ 는 대각행렬이다. 대각 성분들은 $C(\mathbf{s})$ 의 열의 제곱한 크기들(squared magnitudes)이다. 그리고, $g_{k,i}$ 는 i 번째 전송안테나에서 에너지의 관점에서 심볼 $|s_k|^2$ 의 중복도를 나타낸다.

선형 직교 시공간 부호는 $g_{k,i}$ 값에 따라 분류할 수 있다. $g_{k,i}$ 값이 상수일 때, 즉 모든 k 와 i 에 대해 $g_{k,i} = g$ 이면 선형 직교 시공간 부호는 동질적(homogeneous)이라 하고, 그렇지 않으면 비동질적(nonhomogeneous)이라 하자. C_1 과 C_2 는 동질적

이고, C_3 는 비동질적임을 분명히 알 수 있다. 동질적인 부호에 대해, (3)은 다음과 같이 간단히 나타낼 수 있다.

$$C(\mathbf{s})^H C(\mathbf{s}) = g \sum_{k=1}^{L_t} |s_k|^2 \cdot I,$$

여기서 I 는 $L_t \times L_t$ 항등행렬이다. E_s 를 s_k 의 평균 심볼 에너지라 하자. 그러면 한 심볼 기간 동안 모든 전송안테나로부터 전송되는 평균 에너지 E_m 은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$E_m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{L_t} \sum_{k=1}^{L_t} g_{k,i} \cdot E_s$$

그리고, 이것은 동질적인 선형 시공간 부호에 대해 다음과 같이 간단히 나타낼 수 있다.

$$E_m = g \frac{L_t L_s}{N} E_s$$

최근에 Simon[9], Taricco와 Biglieri[12], Byun[2]은 각자 독립적으로 시공간 부호의 정확한 쌍간 오류의 폐형 표현을 구했다. \mathbf{X} 와 \mathbf{X} 이 2개의 서로 다른 $N \times L_t$ 부호어 행렬이라 하자. [2], [8], [9]에서의 결과에 따르면, \mathbf{X} 가 \mathbf{X} 로 복호되는 쌍간 오류는 다음과 같이 주어진다.

$$P(\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \prod_{i=1}^{L_t} \left[1 + \frac{\gamma}{4 \sin^2 \theta} \sum_{n=1}^N |x_i^n - \hat{x}_i^n|^2 \right]^{-L_t} d\theta \quad (4)$$

여기서 $\gamma = \frac{\rho}{E_m}$ 이다. C 는 선형 직교 시공간 부호라고 하자. $\mathbf{p} = \{p_1, p_2, \dots, p_{L_t}\}$, $\mathbf{q} = \{q_1, q_2, \dots, q_{L_t}\}$ 는 서로 다른 메시지 벡터라 하고, $C(\mathbf{p})$, $C(\mathbf{q})$ 는 각각 대응하는 부호어라 하자. $\mathbf{X} = C(\mathbf{p})$, $\mathbf{X} = C(\mathbf{q})$ 이라 하자. $C(\cdot)$ 의 열간 직교성에 의해 차 행렬(difference matrix) $\mathbf{X} - \mathbf{X}$ 도 또한

열간 직교성을 가진다. (3)을 이용하여 (4)를 다음과 같이 변형할 수 있다.

$$P(C(p) \rightarrow C(q)) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \prod_{i=1}^{L_i} \left[1 + \frac{\gamma}{4 \sin^2 \theta} \cdot \sum_{k=1}^{L_i} g_{k,i} |p_k - q_k|^2 \right]^{-L_i} d\theta \quad (5)$$

여기서 $\gamma = \frac{\rho}{E_m}$ 이다. (5)에서 쌍간 오울에 대한 정확한 표현은 2개의 전송된 부호어 행렬 사이의 부호어 심볼 거리(codeword symbol distance)가 아니라 2개의 메시지 벡터들 사이의 메시지 심볼 거리(message symbol distance)의 식으로 유도됨을 알 수 있다.

동질적인 부호에 대해, 위 식은 다음과 같이 더 간단히 나타낼 수 있다.

$$P(C(p) \rightarrow C(q)) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \prod_{i=1}^{L_i} \left[1 + \frac{\gamma \cdot g}{4 \sin^2 \theta} \sum_{k=1}^{L_i} |p_k - q_k|^2 \right]^{-L_i} d\theta \quad (6)$$

[10]의 결과를 이용하면 (6)은 다음과 같이 폐형 표현으로 쓸 수 있다.

$$P(C(p) \rightarrow C(q)) = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \sqrt{\frac{\delta}{1+\delta}} \sum_{m=0}^{L_i \cdot L_i - 1} \binom{2m}{m} \left(\frac{1}{4(1+\delta)} \right)^m \right\} \quad (7)$$

여기서 $\delta = \frac{\gamma g}{4} \sum_{k=1}^{L_i} |p_k - q_k|^2$ 이다. 이것은 다음 장에서 동질적인 선형 직교 시공간 부호의 정확한 심볼 오울을 유도하는데 사용된다.

III. 직교 시공간 블록 부호의 정확한 심볼 오울

3.1. 직교 시공간 블록 부호의 심볼 복호

C 가 선형 직교 시공간 부호라 하고, 부호어 $\mathbf{X} = C(\mathbf{s})$ 가 전송된다고 가정하자. 여기서 $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_{L_i})$ 는 메시지 벡터이다. $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_{L_r}]$ 가 알려진 느린 페이딩 채널 \mathbf{A} 를 통해서 수신된 신호 행렬이라 하자. 여기서 $\mathbf{y}_j = (y_j^1, y_j^2, \dots, y_j^{N_j})^T$ 이다. 최대우도 복호기(maximum-likelihood decoder)는 다음과 같이 주어지는 결정계량(decision metric)을 최소화하는 부호어 행렬 $\mathbf{X} = [\hat{x}_i^n]$ 을 선택한다.

$$D = \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^{L_i} \left| y_j^n - \sqrt{\frac{\rho}{E_m}} \sum_{i=1}^{L_i} a_{i,j} \cdot \hat{x}_i^n \right|^2 \quad (8)$$

$\mathbf{A}' = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{L_r}] = \sqrt{\rho/E_m} \mathbf{A}$ 이라 하자.

여기서

$$\mathbf{a}_j = \left(\sqrt{\frac{\rho}{E_m}} a_{1,j}, \dots, \sqrt{\frac{\rho}{E_m}} a_{L_r,j} \right)^T$$

이다. 직교 시공간 부호의 열간 직교성을 이용하여 (8)의 결정계량은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$D = \sum_{j=1}^{L_r} \left| \mathbf{y}_j - \mathbf{X} \mathbf{a}_j \right|^2 = \sum_{k=1}^{L_i} H_k \left| \frac{b_k}{H_k} - \hat{s}_k \right|^2 + C$$

여기서 양의 실수 H_k 는 다음과 같이 주어진다.

$$H_k = \frac{\rho}{E_m} \sum_{j=1}^{L_r} \sum_{i=1}^{L_i} g_{k,i} |a_{i,j}|^2$$

그리고, b_k 는 수신된 신호 y_j^n 과 알려진 채널 계수 $a_{i,j}$ 의 함수이다. 그것은 [7]에서 엄밀하게 유도되었다. $b_k' = \frac{b_k}{H_k}$ 이라 하면, 이것은 수신된 신호 y_j^n 과 알려진 채널 계수 $a_{i,j}$ 에 종속된다. 결정계량 D 는 다음과 같이 간략화된다.

$$D = \sum_{k=1}^{L_i} H_k |b_k' - \hat{s}_k|^2 + C = \sum_{k=1}^{L_i} H_k D_k + C$$

여기서 심볼 결정계량 D_k 는 다음과 같이 정의된다.

$$D_k = |b'_k - \hat{s}_k|^2 \quad (10)$$

H_k 값들과 C 는 메시지 심볼 \hat{s}_k 에 독립적이므로, 최대우도 결정계량(maximum likelihood decision metric) D 는 독립적으로 각각 심볼 결정계량 D_k 를 최소화함으로써 최소화될 수 있다. 즉, 메시지 벡터 $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_{L_s})$ 의 각 심볼을 독립적으로 복호하는 것이 가능함을 의미한다.

비슷한 방법으로 결정계량 D_k 는 다음과 같이 됨을 보일 수 있다.

$$D_k = |b'_k - \hat{s}_k|^2 = \left| s_k + \frac{e_k}{H_k} - \hat{s}_k \right|^2$$

여기서 e_k 는 잡음 항 w_j^n 과 채널 계수 $a_{i,j}$ 의 함수이다. 이것은 각 b'_k 이 대응하는 심볼 s_k 에만 종속됨을 의미한다.

$b'_k = b'_{k,x} + j b'_{k,y}$, $\hat{s}_k = \hat{s}_{k,x} + j \hat{s}_{k,y}$, $e_k = e_{k,x} + j e_{k,y}$ 이라 하자. 그러면 심볼 결정계량 D_k 는 2개의 성분 결정계량 $D_{k,x}$ 와 $D_{k,y}$ 의 합으로 분리해서 표현할 수 있다. 즉, $D_k = D_{k,x} + D_{k,y}$. 여기서

$$D_{k,x} = |b'_{k,x} - \hat{s}_{k,x}|^2 = \left| s_{k,x} + \frac{e_{k,x}}{H_k} - \hat{s}_{k,x} \right|^2$$

$$D_{k,y} = |b'_{k,y} - \hat{s}_{k,y}|^2 = \left| s_{k,y} + \frac{e_{k,y}}{H_k} - \hat{s}_{k,y} \right|^2$$

따라서, 각 s_k 의 실수부분과 허수부분이 같은 $\frac{b_s}{2}$ 개수의 비트들로부터 독립적으로 부호화되는 2차원의 신호 공간 상에서 정의되는 변조방식이 주어지면, $s_{k,x}$ 와 $s_{k,y}$ 는 수신기에서 독립적으로 결정될 수 있다. 예를 들어, 16-QAM에서 2개의 비트가 각각 심볼 s_k 의 실수부분과

허수부분에 할당된다.

3.2. 1차원 성분 심볼 오류 함수

이 장에서 우리는 성분 오류 함수(component error function)라 부르는 쌍간 1차원 성분 심볼 오류 함수(pairwise one-dimensional component symbol error function)를 찾을 것이다. $d_k(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ 가 두 개의 vector \mathbf{a} , \mathbf{b} 사이의 해밍 거리라 하자.

$s_{k,x} \neq \hat{s}_{k,x}$ 와 $d_k(\mathbf{s}', \hat{\mathbf{s}}') = 1$ 을 만족하는 벡터 \mathbf{s} , $\hat{\mathbf{s}}$ 를 생각한다. 여기서 \mathbf{s} , $\hat{\mathbf{s}}$ 는 (2)에서 정의되었다. 즉, 오직 하나의 성분 $s_{k,x}$ 만 다른 2개의 메시지 벡터를 생각한다. (5)를 이용하여 $C(\mathbf{s})$ 와 $C(\hat{\mathbf{s}})$ 사이의 쌍간 오류는 다음과 같이 주어진다.

$$P(C(\mathbf{s}) \rightarrow C(\hat{\mathbf{s}})) = P(s_{k,x} \rightarrow \hat{s}_{k,x})$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \prod_{i=1}^{L_i} \left[1 + \frac{\gamma}{4 \sin^2 \theta} \sum_{k=1}^{L_i} g_{k,i} |s_{k,x} - \hat{s}_{k,x}|^2 \right]^{-L_i} d\theta$$

따라서 우리는 성분 오류 함수를 2차원 신호 공간상의 두 성좌점(constellation point) $(a_{k,x}, c_{k,y})$ 과 $(b_{k,x}, c_{k,y})$ 사이의 거리 $l = |a_{k,x} - b_{k,x}|$ 의 함수로 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$Q_{k,x}(l)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \prod_{i=1}^{L_i} \left[1 + \frac{\gamma}{4 \sin^2 \theta} g_{k,i} \cdot l^2 \right]^{-L_i} d\theta \quad (11)$$

비슷한 방법으로 성분 오류 함수 $Q_{k,y}(l)$ 은 2차원 신호 공간상의 두 점 $(c_{k,x}, a_{k,y})$, $(c_{k,x}, b_{k,y})$ 사이의 거리 $l = |a_{k,y} - b_{k,y}|$ 의 함수로 정의할 수 있다. $Q_{k,x}(l)$ 와 $Q_{k,y}(l)$ 가 같음은 분명하다. $Q_{k,x}(\cdot)$ 은 l 과 $\gamma = \frac{\rho}{E_m}$ 의 함수로 나타낼 수 있다.

동질적인 선형 직교 시공간 부호의 경우에, 성분 오류 함수 $Q_{k,x}(d)$, $Q_{k,y}(d)$ 는 모든 k 에 대해 같은 형태를 가지므로 $Q_c(d)$ 로 쓸 수 있고, (7)에서 모든 $g_{k,i}$ 가 같은 값을 가지므로 다음과 같이 폐형으로 단순화할 수 있다.

$$Q_c(d) = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \sqrt{\frac{g\gamma \cdot \beta^2}{4 + g\gamma \cdot \beta^2}} \sum_{m=0}^{L_i \cdot L_i - 1} \binom{2m}{m} \left(\frac{1}{4 + g\gamma \cdot \beta^2} \right)^m \right\} \quad (12)$$

비동질적인 선형 직교 시공간 부호에 대해서는 (11)의 성분 오류 함수 $Q_{k,x}(d)$ 은 수치적으로 적분을 해서 구해야 한다.

3.3. 직교 시공간 블록 부호의 정확한 심볼 오류

이 장에서는 QAM 변조방식을 갖는 선형 직교 시공간 부호의 정확한 심볼 오류율 (11)의 성분 오류 함수 $Q_{k,x}(\cdot)$ 을 이용하여 유도한다. QPSK, 16-QAM, 64-QAM, 256-QAM의 심볼 오류율을 계산하기 위해서 그림 1에서 보듯이 세 가지 다른 형태의 심볼 오류율을 고려해야 한다.

$P_s(C)$ 가 직교 시공간 부호 C 의 심볼 오류율이라 하고, $P_s(s_k)$ 는 직교 시공간 부호에서의 메시지 심볼 s_k 에 대한 심볼 오류율이라 하자.

분명히 $P_s(C)$ 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$P_s(C) = \frac{1}{L_s} \sum_{k=1}^{L_s} P_s(s_k)$$

그리고 동질적인 직교 시공간 부호에 대해 이것은 다음과 같이 간단히 쓸 수 있다.

$$P_s(C) = P_s(s_k)$$

따라서, $P_s(C)$ 를 구하기 위해서는 $P_s(s_k)$ 를 구하기만 해도 충분하다. 그리고, R_a, R_b, R_c 는 심볼 s_k 가 각각 p_a, p_b, p_c 인 경우에 대한 결정영역(decision region)이라 한다.

그림 1.(a)에서 메시지 심볼 s_k 를 위한 성좌점 p_a 가 전송된다고 가정한다. P_k^a 가 s_k 에 대한 그림 1.(a)의 경우의 심볼 오류율이라 하자. 분명히 심볼 오류 P_k^a 은 (10)의 b'_k 이 그림 1.(a)에서 빗금 친 영역에 위치할 확률이다. b'_k 이

결정한계(decision boundary) D_1 또는 D_2 를 넘어서 위치할 확률은 각각 $Q_{k,x}(2d)$ 와 $Q_{k,y}(2d)$ 로 표현할 수 있다. 그림 1.(a)에서 b'_k 이 두 번 빗금 친 영역에 위치할 확률은 $Q_{k,x}(2d) \cdot Q_{k,y}(2d)$ 으로 표현할 수 있다. $Q_{k,x}(2d)$ 와 $Q_{k,y}(2d)$ 가 서로 같다는 사실을 이용하면, 우리는 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} P_k^a &= Q_{k,x}(2d) + Q_{k,y}(2d) - Q_{k,x}(2d) \cdot Q_{k,y}(2d) \\ &= 2Q_{k,x}(2d) - Q_{k,x}(2d)^2 \end{aligned}$$

유사하게 그림 1.(b) 경우의 심볼 오류 P_k^b 는 다음과 같이 유도된다.

$$P_k^b = 3Q_{k,x}(2d) - 2Q_{k,x}(2d)^2$$

그리고, 그림 1.(c) 경우의 심볼 오류 P_k^c 는 다음과 같다.

$$P_k^c = 4Q_{k,x}(2d) - 4Q_{k,x}(2d)^2$$

명백하게 QPSK, 16-QAM, 64-QAM, 256-QAM의 각 메시지 심볼 s_k 의 심볼 오류율은 위 세 가지 경우 중의 하나로 주어진다. A_a, A_b, A_c 가 각각 그림 1. (a), (b), (c)에서 보여진 경우에 대응하는 성좌점의 개수라 하자. 그러면 우리는 다음을 얻는다.

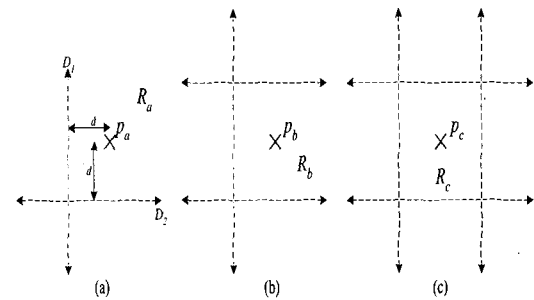


그림 1. QAM의 심볼 오류 영역의 세 가지 다른 형태

표 6. 다양한 QAM에서 세 가지 다른 형태의 성좌점 개수

	A_a	A_b	A_c	L
QPSK	4	0	0	4
16-QAM	4	8	4	16
64-QAM	4	24	36	64
256-QAM	4	56	196	256

$$P_s(s_k) = \frac{1}{L} (A_a \cdot P_k^a + A_b \cdot P_k^b + A_c \cdot P_k^c)$$

그리고 각 변조 방법에 대한 심볼 오류 $P_s(C)$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$P_s(C) = \frac{1}{L \cdot L_s} \sum_{k=1}^{L_s} (A_a \cdot P_k^a + A_b \cdot P_k^b + A_c \cdot P_k^c)$$

여기서 $L=2^{b_s} = A_a + A_b + A_c$ 로서 각 변조방법에서 성좌점의 총 개수이다. 변조방법에 따른 각 성좌점에서 A_a, A_b, A_c 의 값이 표1에 정리되어 있다. QPSK, 16-QAM, 64-QAM, 256-QAM의 선형 직교 시공간 부호의 심볼 오류는 다음과 같이 계산된다.

$$P_{s,QPSK} = \frac{1}{L_s} \sum_{k=1}^{L_s} P_k^a$$

$$= \frac{1}{L_s} \sum_{k=1}^{L_s} (2Q_{k,x}(2d) - Q_{k,x}^2(2d))$$

$$P_{s,16QAM} = \frac{1}{4L_s} \sum_{k=1}^{L_s} (P_k^a + 2 \cdot P_k^b + P_k^c)$$

$$P_{s,64QAM} = \frac{1}{16L_s} \sum_{k=1}^{L_s} (P_k^a + 6 \cdot P_k^b + 9 \cdot P_k^c)$$

$$P_{s,256QAM} = \frac{1}{64L_s} \sum_{k=1}^{L_s} (P_k^a + 14 \cdot P_k^b + 49 \cdot P_k^c)$$

여기서 $Q_{k,x}(\cdot)$ 은 (11)에서 정의되었다.

QPSK, 16-QAM, 64-QAM, 256-QAM의 동질적인 선형 직교 시공간 부호의 심볼 오류는 다음과 같이 간단히 나타낼 수 있다.

$$P_{s,QPSK} = P_k^a = 2Q_c(2d) - Q_c^2(2d)$$

$$P_{s,16QAM} = 3Q_c(2d) - \frac{9}{4}Q_c^2(2d)$$

$$P_{s,64QAM} = 4Q_c(2d) - \frac{49}{16}Q_c^2(2d)$$

$$P_{s,256QAM} = \frac{15}{4}Q_c(2d) - \frac{225}{64}Q_c^2(2d)$$

여기서 $Q_c(\cdot)$ 은 (12)에서 정의되었다.

3.4. Alamouti 구조 C_1 에 대한 심볼 오류의 성능 곡선

앞 장에서 유도된 심볼 오류의 폐형의 표현을 이용하여 Alamouti에 의해 제안된 동질적인 선형 직교 시공간 부호 C_1 의 심볼 오류를 도출한다. 그림 2는 QPSK, 그림 3은 16-QAM, 그림 4는 64-QAM, 그림 5는 256-QAM의 경우를 도출한 것이다. 각 경우에 심볼 오류는 평균 신호 대 잡음비

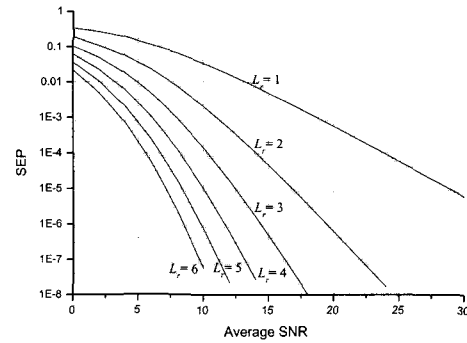


그림 2. QPSK변조 Alamouti구조의 심볼 오류

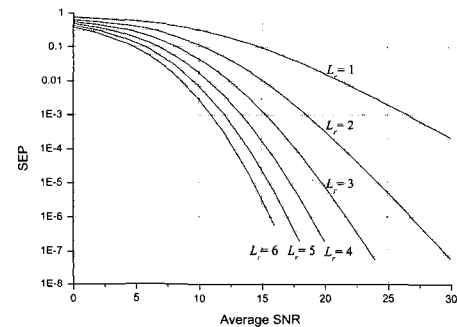


그림 3. 16-QAM변조 Alamouti구조의 심볼 오류

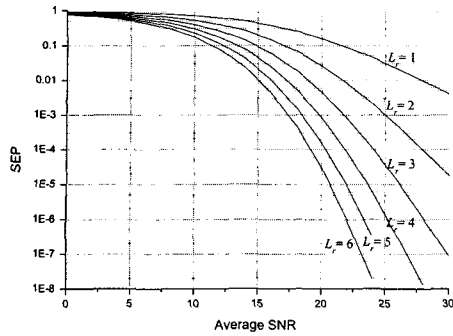


그림 4. 64-QAM변조 Alamouti구조의 심볼 오류

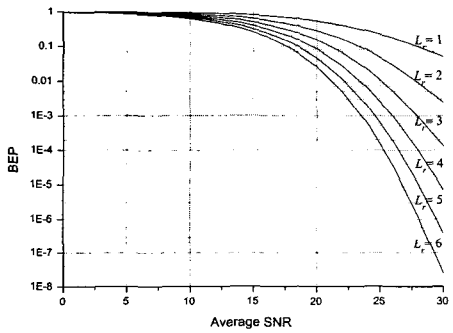


그림 5. 256-QAM변조 Alamouti구조의 심볼 오류

ρ 의 함수로 표현되어 도시되었고, 수신안테나의 개수가 1부터 6까지의 경우에 대해서 고려되었다.

IV. 결론

본 논문에서는 QAM 변조방식의 선형 직교 시공간 부호의 정확한 심볼 오류율을 유도했다. QAM의 동질적인 직교 시공간 부호에 대해, 심볼 오류율의 폐형 표현이 유도되었다. QAM의 이질적인 직교 시공간 부호에 대해, 정확한 심볼 오류율도 성분 오류 확률의 수치적인 적분을 통해 계산될 수 있다. 유도된 심볼 오류율은, 변조방법에서 신호 공간에서의 각 심볼의 이진 표현이 신호 공간의 각 차원으로 분리해서 표현될 수 있다면, 임의의 선형 직교 시공간 블록 부호에 대해서도 적용할 수 있다.

참고 문헌

- [1] S. M. Alamouti, "A simple transmitter diversity scheme for wireless communications," *IEEE J. Select. Areas Commun.*, vol. 16, pp. 1451-1458, Nov. 1998.
- [2] M. K. Byun, *Performance Analysis of Space-Time Coded Modulation Systems*, Ph.D. Dissertation, Seoul National University, Feb. 2001.
- [3] J. W. Craig, "A new, simple and exact result for calculating the probability of error for two-dimensional signal constellation," in *Proc. of IEEE MILCOM '91*, Boston, MA, pp. 25.5.1-25.5.5, 1991.
- [4] G. J. Foschini and M. Gans, "On the limits of wireless communication in a fading environment when using multiple antennas," *Wireless Personal Commun.*, vol. 6, pp. 311-335, Mar. 1998.
- [5] A. R. Hammons and H El Gamal, "On the theory of space-time codes for PSK modulation," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 46, no. 2, Mar. 2000
- [6] B. M. Hochwald and T. L. Marzetta, "Unitary space-time modulation for multiple-antenna communications in Rayleigh flat fading," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 46, no. 2, pp.543-564, Mar. 2000
- [7] X. Li, T. Luo, G. Yue, and C. Yin, "A squaring method to simplify the decoding of orthogonal space-time block codes," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 49, no. 10, pp.1700-1703, Oct. 2001.
- [8] H. Lu, Y. Wang, P. V. Kumar, and K. M. Chugg, "On the performance of space-time codes," preprint, Feb. 2002.
- [9] M. K. Simon, "Evaluation of average bit error probability for space-time coding based on a simpler exact evaluation of pairwise error probability," *J. Commun. and*

Networks, vol. 3, no. 3, pp. 257-263, Sept. 2001.

- [10] M. K. Simon and M. S. Alouini, *Digital Communication over Fading Channels: A Unified Approach to Performance Analysis*, New York, NY: John Wiley & Sons, Inc., Aug. 2000.
- [11] W. Su and X. G. Xia, "Two generalized complex orthogonal space-time block codes 7/11 and 3/5 for 5 and 6 transmit antennas," in the recent result session of *2001 IEEE Int. Symp. Inform. Theory*, Washington D.C., Jun. 2001
- [12] G. Taricco and E. Biglieri, "Exact pairwise error probability of space-time codes," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 48, pp. 510-513, Feb. 2002
- [13] V. Tarokh, N. Seshadri, and A. R. Calderbank, "Space-time codes for high data rate wireless communications: Performance analysis and code construction," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 44, pp. 744-765, Mar. 1998
- [14] V. Tarokh, H. Jafarkhani, and A. R. Calderbank, "Space-time block codes from orthogonal designs," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 45, pp. 1456-1467, Jul. 1999.

강 익 선(Ik-Seon Kang)



2001년 2월 : 서울대학교
전기공학부 공학사
2001년 3월~ 현재 : 서울대학교
대학원전기·컴퓨터공학부 석사
과정

<주관심분야> 오류정정부호, 시공간부호, 디지털통신

노 종 선(Jong-Seon No)

중신회원



1981년 2월 : 서울대학교
전자공학과 공학사
1984년 2월 : 서울대학교 대학
원 전자공학과 공학석사
1988년 5월: University of
Southern California, 전기공학

과 공학박사
1988년 2월~ 1990년 7월: Hughes Network
Systems, Senior MTS
1990년 9월~ 1999년 7월: 건국대학교 전자공학과
부교수
1999년 8월~ 현재: 서울대학교 전기·컴퓨터공학부
부교수

<주관심분야> 시퀀스, 오류정정부호, 시공간부호,
암호학, 이동통신

김 상 효(Sang-Hyo Kim)



1998년 2월 : 서울대학교
전기공학부 공학사
2000년 2월 : 서울대학교
대학원 전기공학부 공학석사
2000년 3월~현재 : 서울대학교
대학원 전기·컴퓨터공학부 박
사과정

<주관심분야> 오류정정부호, 시공간부호, 디지털통신