

# 구조물의 동적해석을 위한 효율적인 벡터중첩법

## Efficient Vector Superposition Method for Dynamic Analysis of Structures

김 병 완\*  
Kim, Byoung Wan

정 형 조\*\*  
Jung, Hyung Jo

김 운 학\*\*\*  
Kim, Woon Hak

이 인 원\*\*\*\*  
Lee, In Won

### 국문요약

본 논문에서는 구조물의 효율적인 동적해석을 위한 수정된 Lanczos 벡터중첩법을 제안하였다. 제안방법은 강성행렬에 직교하는 Lanczos 벡터를 생성하는 수정된 Lanczos 알고리즘에 기초하고 있다. 단일입력하중을 받는 구조물의 해석에 있어서 제안한 Lanczos 벡터중첩법은 기존의 Lanczos 벡터중첩법과 동일한 정확도와 효율성을 갖는 반면 다중입력하중을 받는 구조물의 경우 제안방법이 기존의 방법보다 더욱 효율적이다. 수치예제를 통해 제안방법의 효율성을 검증하였다.

주요어 : 구조물의 동적해석, 벡터중첩법, Lanczos 벡터

### ABSTRACT

Modified Lanczos vector superposition method is proposed for efficient dynamic analysis of structures. The proposed method is based on the modified Lanczos algorithm that generates stiffness-orthonormal Lanczos vectors. The proposed Lanczos vector superposition method has the same accuracy and efficiency as the conventional Lanczos vector superposition method in the analysis of structures under single input loads. On the other hand, the proposed method is more efficient than the conventional method in the analysis of structures under multi-input loads. The effectiveness of the proposed method is verified by analyzing two numerical examples.

Key words : dynamic analysis of structures, vector superposition method, Lanczos vector

## 1. 서 론

구조물의 동적해석 방법에는 직접적분법과 벡터중첩법이 있다. 그 중 벡터중첩법은 구조물의 자유도를 축소시켜 해석 시간을 줄이는 경우 자주 채택되는 방법이다. 벡터중첩법 중 가장 널리 사용되는 것은 고유벡터중첩법(모드중첩법)이며 고유벡터중첩법은 구조물의 고유치해석이 필수적으로 선행된다. 그러나, 구조물의 고유치해석은 고유벡터중첩법의 해석시간의 대부분을 차지할 정도로 상당한 수치연산을 요구한다. Wilson 등<sup>(1)</sup>은 구조물의 고유치해석을 수행하지 않는 Ritz 벡터중첩법을 제안하였다. Ritz 벡터중첩법은 Ritz 알고리즘<sup>(1)</sup>과 축소된 시스템의 고유치 해석으로부터 생성되는 Ritz 벡터를 통해 운동방정식을 축소된 대각행렬 형태로 변환한다. Ritz 벡터중첩법은 구조물의 고유치해석을 수행하지 않으므로 고유벡터중첩법보다 효율적이며 단일입력하중(지진하중 등)을 받는 구조물을 해석할 경우 하중분포벡터를 초기 Ritz 벡터로 사용하므로 하중분포에 대한 정보가 없는 고유벡터중첩법에 비해 정확도가 더 우수하다. 많은 연구가<sup>(2)-(7)</sup>들이 구조물의 동적해석에 Ritz 벡터중첩법을 성공적으로 적용하였다.

Nour-Omid와 Clough<sup>(8)</sup>는 Ritz 벡터중첩법과 유사한 Lanczos 벡터중첩법을 제안하였다. Lanczos 벡터중첩법은 Lanczos

알고리즘<sup>(9)</sup>으로부터 생성되는 Lanczos 벡터를 통해 운동방정식을 축소된 형태로 변환한다. Lanczos 벡터중첩법 또한 구조물의 고유치해석을 수행하지 않으며 본질적인 개념, 정확도, 효율성 등이 Ritz 벡터중첩법과 유사하다. 다만, 축소된 운동방정식이 삼대각행렬 형태이고 축소된 시스템의 고유치해석을 수행하지 않는다는 점에서 약간의 차이가 있다. Lanczos 벡터중첩법 또한 많은 연구가<sup>(6),(7),(10)-(12)</sup>들에 의해 활발히 논의되거나 적용되었다. 한편, Nour-Omid와 Clough<sup>(10)</sup>는 다중입력하중을 받는 구조물의 해석을 위해 Block Lanczos 벡터중첩법을 제시하였다. 그러나, 그들은 그 방법이 입력하중의 수가 10보다 작을 경우에만 효율적이라고 언급하였으며 그것은 입력하중의 수가 10이 넘는 실제적인 구조물(이동하중을 받는 교량, 파랑하중을 받는 대형 해양구조물, 풍하중을 받는 고층 빌딩 등)의 해석의 경우 본래의 Lanczos 벡터중첩법을 사용하는 것이 더 유리함을 의미한다.

본 논문은 입력하중의 수가 10 이상인 구조물의 해석에 있어서, 기존의 Lanczos 벡터중첩법보다 더 효율적인 수정된 Lanczos 벡터중첩법을 제안하고 있다. 기존의 방법이 질량행렬에 직교하는 Lanczos 벡터를 사용하는 반면, 제안방법은 강성행렬에 직교하는 Lanczos 벡터를 사용함으로써 변환하중벡터 구성 시 기존의 방법보다 연산회수가 감소된다. 제안방법의 효율성의 검증을 위해 예제구조물에 대한 수치해석을 수행하였다.

## 2. 구조물의 동적해석을 위한 Lanczos 벡터중첩법

구조물의 동적해석에 있어서 운동방정식은 Rayleigh 감쇠를

\* 한국과학기술원 건설 및 환경공학과, 박사과정(대표저자 : kimbw@kaist.ac.kr)

\*\* 정회원 · 세종대학교 토목환경공학과, 조교수

\*\*\* 정회원 · 국립한경대학교 토목공학과, 교수

\*\*\*\* 정회원 · 한국과학기술원 건설 및 환경공학과, 교수

본 논문에 대한 토의를 2003년 8월 30일까지 학회로 보내 주시면 그 결과를 게재하겠습니다.  
(논문접수일 : 2003. 2. 28 / 심사종료일 : 2003. 4. 29)

고려할 경우 식 (1)과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + (\alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K})\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (1)$$

$\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}$ 는 각각  $n$ 차의 질량행렬, 강성행렬이고  $\mathbf{f}$ 는 하중벡터,  $\mathbf{u}$ 는 변위벡터이다.  $\alpha$ 와  $\beta$ 는 Rayleigh 감쇠계수이다. 식 (1)을 풀기 위한 기존의 Lanczos 벡터중첩법과 제안한 Lanczos 벡터중첩법의 내용을 기술하면 다음과 같다.

### 2.1 기존의 방법

Lanczos 벡터중첩법은 식 (2)와 같은 Lanczos 점화식으로부터 생성되는 Lanczos 벡터를 사용한다.

$$\delta_i \mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{x}_i - \gamma_i \mathbf{x}_i - \delta_{i-1} \mathbf{x}_{i-1} \quad (i=1,2,\dots) \quad (2)$$

$\mathbf{x}_i$ 는  $i$ 번째 Lanczos 벡터이고  $\gamma$ 와  $\delta$ 는 계수이다. Lanczos 벡터는 식 (3)처럼 질량행렬에 대해 직교한다.

$$\mathbf{x}_i^T \mathbf{M} \mathbf{x}_j = \delta_{ij} \quad (3)$$

여기에서  $\delta_{ij}$ 는 Kronecker 델타이다. 식 (2)로부터 Lanczos 벡터를 생성하는 알고리즘을 표 1에 제시하였다. Lanczos 알고리즘으로부터 생성된  $m$  ( $\ll n$ )개의 Lanczos 벡터로부터 행렬  $\mathbf{X} (= [\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_m])$ 를 구성할 수 있으며 이때  $\mathbf{X}$ 는 식 (3)에 의해 다음과 같은 관계식을 만족한다.

$$\mathbf{X}^T \mathbf{M} \mathbf{X} = \mathbf{I} \quad (4)$$

$\mathbf{I}$ 는  $m$ 차 단위행렬이다. 한편, 식 (2)를 행렬과 벡터 형태로 표현하면 다음과 같다.

$$\mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{X} - \mathbf{X} \mathbf{T} = \delta_m \mathbf{x}_{m+1} \mathbf{e}_m^T \quad (5)$$

여기에서  $\mathbf{e}_m$ 은  $m$ 차 단위행렬의  $m$ 번째 열벡터이고  $\mathbf{T}$ 는 식 (6)과 같은 삼대각행렬이다.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \delta_1 & & & & \\ \delta_1 & \gamma_2 & \delta_2 & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \delta_{m-2} & \gamma_{m-1} & \delta_{m-1} \\ & & & & \delta_{m-1} & \gamma_m \end{bmatrix} \quad (6)$$

식 (5)의 양변에  $\mathbf{X}^T \mathbf{M}$ 을 선승하고 식 (3)과 식 (4)를 이용하면 다음의 관계식이 도출된다.

$$\mathbf{X}^T \mathbf{M} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{X} = \mathbf{T} \quad (7)$$

식 (1)에서  $\mathbf{u} = \mathbf{X} \mathbf{q}$ 로 변환한 후 양변에  $\mathbf{X}^T \mathbf{M} \mathbf{K}^{-1}$ 를 선승하면 식 (4)와 식 (7)로부터 다음과 같은 삼대각행렬 형태의 축소된 운동방정식을 유도할 수 있다.

$$\mathbf{T} \ddot{\mathbf{q}} + (\alpha \mathbf{T} + \beta \mathbf{I}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{q} = \mathbf{X}^T \mathbf{M} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f} \quad (8)$$

지진하중과 같은 단일입력하중이 재하될 경우  $\mathbf{f} = \mathbf{a}p$ 로 표현할 수 있다.  $\mathbf{a}$ 는 시간과 무관한 하중분포벡터이고  $p$ 는 시간에 따라 변하는 하중함수로서 스칼라 값이다. 단일입력하중의 경우 Lanczos 벡터중첩법은 하중분포에 대한 정보를 반영하기 위해  $\mathbf{K}^{-1} \mathbf{a}$ 를 초기 Lanczos 벡터로 사용하므로<sup>(8)</sup> 식 (8)의 우변은 다음과 같이 변형된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^T \mathbf{M} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f} &= \mathbf{X}^T \mathbf{M} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{a} p = \mathbf{X}^T \mathbf{M} \delta_0 \mathbf{x}_1 p \\ &= \delta_0 \mathbf{X}^T \mathbf{M} \mathbf{X} \mathbf{e}_1 p = \delta_0 \mathbf{e}_1 p \end{aligned} \quad (9)$$

여기에서  $\mathbf{e}_1$ 은  $m$ 차 단위행렬의 첫번째 열벡터이다. 따라서, 단일입력하중을 받는 경우의 최종적인 운동방정식은 다음과 같다.

$$\mathbf{T} \ddot{\mathbf{q}} + (\alpha \mathbf{T} + \beta \mathbf{I}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{q} = \delta_0 \mathbf{e}_1 p \quad (10)$$

다중입력하중이 재하될 경우  $\mathbf{f} = \mathbf{A} \mathbf{p}$ 의 형태이다.  $\mathbf{A}$ 는  $k$ 개의 열벡터로 구성된 하중분포행렬이고,  $\mathbf{p}$ 는  $k$ 개의 하중함

표 1 기존의 Lanczos 알고리즘 및 수정된 Lanczos 알고리즘

Conventional Lanczos algorithm	Modified Lanczos algorithm
1. Pick starting vector $\mathbf{x}$	1. Pick starting vector $\mathbf{y}$
2. $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x} / \delta_0$ , $\delta_0 = (\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x})^{1/2}$	2. $\mathbf{y}_1 = \mathbf{y} / \eta_0$ , $\eta_0 = (\mathbf{y}^T \mathbf{K} \mathbf{y})^{1/2}$
3. For $i=1, 2, \dots$ , repeat:	3. For $i=1, 2, \dots$ , repeat:
a. $\bar{\mathbf{x}}_i = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{x}_i$	a. $\xi_i = \mathbf{y}_i^T \mathbf{M} \mathbf{y}_i$
b. $\gamma_i = \mathbf{x}_i^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{x}}_i$	b. If $i=m$ , then terminate the loop
c. If $i=m$ , then terminate the loop	c. $\bar{\mathbf{y}}_i = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{y}_i$
d. $\tilde{\mathbf{x}}_i = \bar{\mathbf{x}}_i - \gamma_i \mathbf{x}_i - \delta_{i-1} \mathbf{x}_{i-1}$ ( $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ )	d. $\tilde{\mathbf{y}}_i = \bar{\mathbf{y}}_i - \xi_i \mathbf{y}_i - \eta_{i-1} \mathbf{y}_{i-1}$ ( $\mathbf{y}_0 = \mathbf{0}$ )
e. $\hat{\mathbf{x}}_i = \tilde{\mathbf{x}}_i - \sum_{k=1}^i (\tilde{\mathbf{x}}_i^T \mathbf{M} \mathbf{x}_k) \mathbf{x}_k$	e. $\hat{\mathbf{y}}_i = \tilde{\mathbf{y}}_i - \sum_{k=1}^i (\tilde{\mathbf{y}}_i^T \mathbf{K} \mathbf{y}_k) \mathbf{y}_k$
f. $\delta_i = (\hat{\mathbf{x}}_i^T \mathbf{M} \hat{\mathbf{x}}_i)^{1/2}$	f. $\eta_i = (\hat{\mathbf{y}}_i^T \mathbf{K} \hat{\mathbf{y}}_i)^{1/2}$
g. $\mathbf{x}_{i+1} = \hat{\mathbf{x}}_i / \delta_i$	g. $\mathbf{y}_{i+1} = \hat{\mathbf{y}}_i / \eta_i$

Note :  $m$  = desired number of Lanczos vectors

수로 구성된 하중함수벡터이다.  $k$ 는 입력하중의 수를 나타낸다. 따라서, 다중입력하중의 경우 운동방정식은 다음과 같다. (11)

$$\mathbf{T}\ddot{\mathbf{q}} + (\alpha\mathbf{T} + \beta\mathbf{I})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{q} = \mathbf{X}^T\mathbf{M}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{p}$$

### 2.2 제안방법

제안한 Lanczos 벡터중첩법은 질량행렬에 직교하는 Lanczos 벡터 대신 강성행렬에 직교하는 Lanczos 벡터를 사용한다. 수정된 Lanczos 점화식과 직교조건은 식 (12) 및 식 (13)과 같다.

$$\eta_i \mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{y}_i - \xi_i \mathbf{y}_i - \eta_{i-1} \mathbf{y}_{i-1} \quad (i=1,2,\dots)$$

$$\mathbf{y}_i^T \mathbf{K} \mathbf{y}_j = \delta_{ij}$$

$\mathbf{y}_i$ 는  $i$ 번째 Lanczos 벡터이고  $\xi$ 와  $\eta$ 는 계수이다. 식 (12)로부터 수정된 Lanczos 벡터를 생성하는 알고리즘을 표 1에 정리하였다. 수정된 알고리즘으로부터  $m(\ll n)$ 개의 Lanczos 벡터를 생성하고 그 벡터로 구성된 행렬을  $\mathbf{Y}=[\mathbf{y}_1 \mathbf{y}_2 \dots \mathbf{y}_m]$ 라 하면 식 (13)과 식 (12)는 다음과 같이 행렬과 벡터 형태로 다시 표현할 수 있다.

$$\mathbf{Y}^T \mathbf{K} \mathbf{Y} = \mathbf{I} \quad (14)$$

$$\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{Y} - \mathbf{Y}\mathbf{S} = \eta_m \mathbf{y}_{m+1} \mathbf{e}_m^T \quad (15)$$

식 (15)에서  $\mathbf{S}$ 는 다음과 같은 삼대각행렬이다.

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \xi_1 & \eta_1 & & & & \\ \eta_1 & \xi_2 & \eta_2 & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \eta_{m-2} & \xi_{m-1} & \eta_{m-1} \\ & & & & \eta_{m-1} & \xi_m \end{bmatrix} \quad (16)$$

식 (15)의 양변에  $\mathbf{Y}^T \mathbf{K}$ 를 선승하고 식 (13)과 식 (14)를 이용하면 다음을 얻는다.

$$\mathbf{Y}^T \mathbf{M} \mathbf{Y} = \mathbf{S} \quad (17)$$

식 (1)에서  $\mathbf{u} = \mathbf{Y}\mathbf{r}$ 로 변환하고 양변에  $\mathbf{Y}^T$ 를 선승하면 식 (14)와 식 (17)의 관계로부터 삼대각행렬 형태의 축소된 운동방정식을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\mathbf{S}\ddot{\mathbf{r}} + (\alpha\mathbf{S} + \beta\mathbf{I})\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} = \mathbf{Y}^T \mathbf{f} \quad (18)$$

지진하중과 같은 단일입력하중이 재하될 경우  $\mathbf{f} = \mathbf{a}\mathbf{p}$ 로 표현되며 기존의 방법과 마찬가지로  $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{a}$ 를 초기 Lanczos 벡터로 사용할 수 있다. 따라서, 식 (18)의 우변은 다음과 같이 변형된다.

$$\mathbf{Y}^T \mathbf{f} = \mathbf{Y}^T \mathbf{K} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{a} \mathbf{p} = \mathbf{Y}^T \mathbf{K} \eta_0 \mathbf{y}_1 \mathbf{p} = \eta_0 \mathbf{Y}^T \mathbf{K} \mathbf{Y} \mathbf{e}_1 \mathbf{p} = \eta_0 \mathbf{e}_1 \mathbf{p} \quad (19)$$

따라서, 단일입력하중을 받는 경우의 최종적인 운동방정식은 다음과 같다.

$$\mathbf{S}\ddot{\mathbf{r}} + (\alpha\mathbf{S} + \beta\mathbf{I})\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} = \eta_0 \mathbf{e}_1 \mathbf{p} \quad (20)$$

식 (10)과 식 (20)은 본질적으로 동일한 형태이므로, 단일입력하중의 해석에 있어서, 기존의 방법과 제안방법은 거의 동일한 성능을 가지고 있다. 다중입력하중이 재하될 경우  $\mathbf{f} = \mathbf{A}\mathbf{p}$ 의 형태이므로 운동방정식은 다음과 같다.

$$\mathbf{S}\ddot{\mathbf{r}} + (\alpha\mathbf{S} + \beta\mathbf{I})\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} = \mathbf{Y}^T \mathbf{A} \mathbf{p} \quad (21)$$

다중입력하중을 받는 경우의 기존방법의 운동방정식(식 (11))과 비교할 때 변환하중벡터(운동방정식의 우변)의 구성이 더 단순화되었음을 알 수 있다. 식 (21)의 우변에서  $\mathbf{Y}^T \mathbf{K}$ 의 계산에 소요되는 연산회수는  $nmk$ 이다. 반면, 식 (11)의 우변에서  $\mathbf{X}^T \mathbf{M} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{A}$ 의 계산에 소요되는 연산회수는  $\{2nh(m+k) + nm(k+1)\}$ 이다.  $h$ 는 질량 및 강성행렬의 반띠폭이다.  $nmk$ 가  $\{2nh(m+k) + nm(k+1)\}$ 보다 작은 것은 자명하다. 따라서, 다중입력하중의 경우에는, 제안방법이 기존의 방법보다 더욱 효율적이다.

### 3. 수치예제

제안방법의 효율성을 검증하기 위해 단경간 보<sup>(13)</sup>와 다경간 교량<sup>(14)</sup>에 대한 수치해석을 수행하였다. 단일입력하중이 재하된 경우와 다중입력하중이 재하된 경우를 구분하여 해석함으로써 두 경우에 대한 결과의 차이를 논하였다. 또한, 제안방법의 결과와 더불어 고유벡터중첩법, Ritz 벡터중첩법, 기존의 Lanczos 벡터중첩법의 결과를 고찰함으로써 제안방법과 타 방법의 정확도와 해석시간을 비교하였다. 정확도는 식 (22)와 같은 정규화된 RMS(Root Mean Square) 오차로부터 파악하였다.

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{\frac{1}{T_d} \int_0^{T_d} (\mathbf{u}_{exact} - \mathbf{u})^T (\mathbf{u}_{exact} - \mathbf{u}) dt}}{\sqrt{\frac{1}{T_d} \int_0^{T_d} \mathbf{u}_{exact}^T \mathbf{u}_{exact} dt}} \quad (22)$$

식 (22)에서  $T_d$ 는 하중 지속시간이며 직접적분법의 결과를 참값으로 하였다.

#### 3.1 단경간 보

첫번째 예제구조물은 단경간 보이다. 유한요소모델, 입력하중, 제원 등을 그림 1과 표 2에 제시하였다. 단일입력하중으로서 보 중앙에 재하되는 sine 하중을 사용하였고 다중입력하중으로서는 19m/sec의 속도로 보 위를 지나가는 이동하중을 사용하였다. 이동하중이 재하될 경우 각 절점에 작용하는 등가하중함수는 이동속도, 도착시간, 인접 절점과의 거리

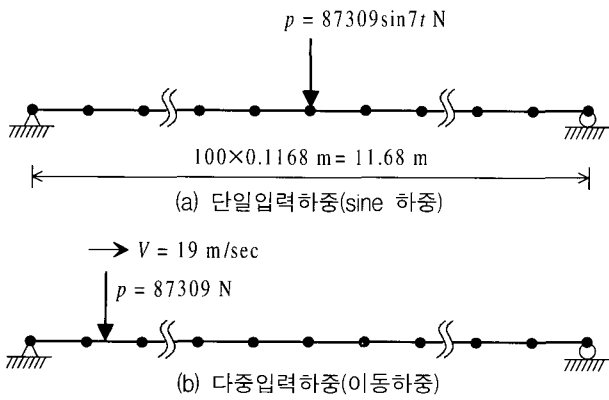


그림 1 단경간 보의 유한요소모델 및 입력하중

표 2 단경간 보의 제원

Material properties	
Youngs modulus(Pa)	$1.72 \times 10^8$
Section inertia(m <sup>4</sup> )	1.00
Section area(m <sup>2</sup> )	1.00
Mass density(kg/m <sup>3</sup> )	3105
Rayleigh damping coefficients	$\alpha = 0.6490, \beta = 3.17 \times 10^{-5}$
System data	
Number of nodes	101
Number of beam elements	100
Number of degrees of freedom(n)	200

에 따라 삼각과 형태로 계산할 수 있으며<sup>(13)</sup> 각 절점마다 이동하중의 도착시간이 다르므로 각 절점에 작용하는 등가하중함수 또한 모두 다르다. 즉, 이동하중은 다중입력하중의 일종이다. 본 예제구조물의 경우 이동하중이 99개의 절점 위를 지나므로 입력하중의 수는 99(> 10)이다.

해석 결과를 그림 2와 그림 3에 제시하였다. 그림 2는 벡터 수에 따른 각 방법들의 오차를 나타낸다. Ritz 벡터중첩법, 기존의 Lanczos 벡터중첩법, 제안방법의 정확도가 거의 동일하다. 단일입력하중의 경우 세 방법이 고유벡터중첩법보다 정확도가 더 우수하고 다중입력하중의 경우엔 고유벡터중첩법이 세 방법보다 정확도가 다소 우수하다.

그림 3은 벡터 수에 따른 각 방법의 해석시간을 나타낸다. Ritz 벡터중첩법, 기존의 Lanczos 벡터중첩법, 제안방법이 고유벡터중첩법보다 해석시간이 더 짧다. 벡터 수가 클 경우 기존의 Lanczos 벡터중첩법과 제안방법의 해석시간이 Ritz 벡터중첩법보다 다소 짧은 경우가 있는데 그것은 Ritz 벡터중첩법이 축소된 시스템에 대한 고유치해석을 부가적으로 수행하기 때문이다. 단일입력하중의 경우 기존의 Lanczos 벡터중첩법과 제안방법의 해석시간이 거의 동일하다. 다중입력하중의 경우 벡터 수가 작을 때 Ritz 벡터중첩법이

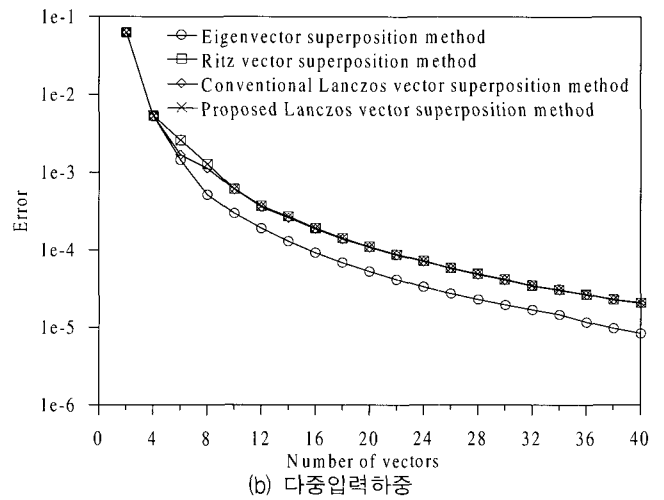
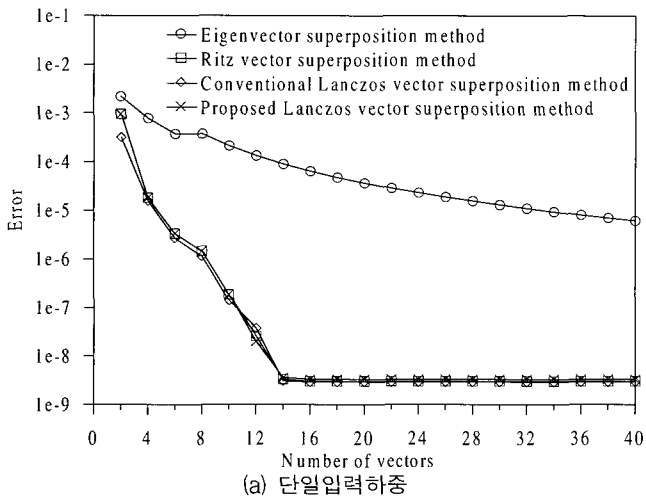


그림 2 단경간 보에 대한 오차 비교

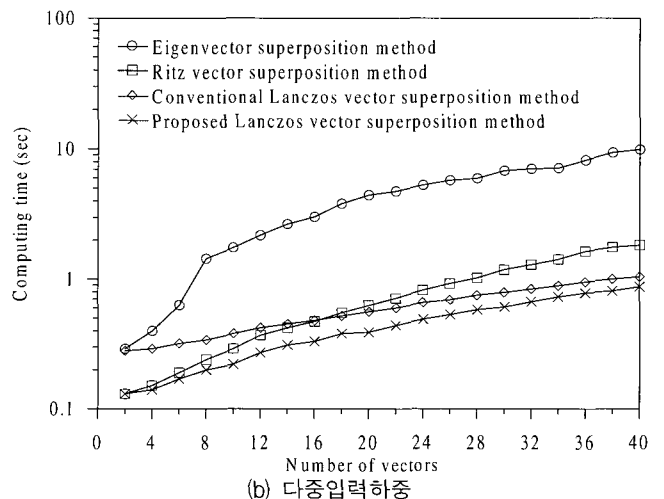
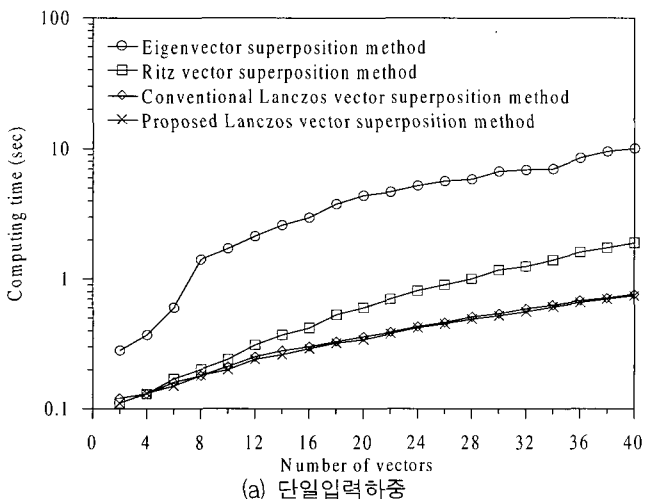


그림 3 단경간 보에 대한 해석시간 비교

기존의 Lanczos 벡터중첩법보다 더 효율적인데 그것은 변환하중벡터(식 (11)의 우변)의 계산 시간이 Ritz 벡터중첩법의 축소시스템 고유치의 계산 시간보다 길기 때문이다. 다중입력하중의 경우 변환하중벡터의 계산 시간을 줄인 제안방법이 네 방법 중 해석시간이 가장 짧음을 알 수 있다.

### 3.2 다경간 교량

두번째 예제구조물은 다경간 교량이다. 유한요소모델, 입력하중, 제원 등을 그림 4와 표 3에 제시하였다. 단일입력하중으로서 교축방향으로 가진된 El Centro 지진을 사용하였고

다중입력하중으로서는 33.333m/sec의 속도로 교량의 deck를 지나가는 이동하중을 사용하였다. 이동하중이 deck에 있는 89개의 절점 위를 지나므로 입력하중의 수는 89(> 10)이다. 해석결과를 그림 5와 그림 6에 제시하였다. 정확도 및 해석시간과 관련하여, 첫번째 구조물과 동일한 양상을 보임을 알 수 있다.

### 4. 결 론

본 논문은 구조물의 효율적인 동적해석을 위한 수정된 Lanczos 벡터중첩법을 제안하였다. 제안방법의 이론적 고찰

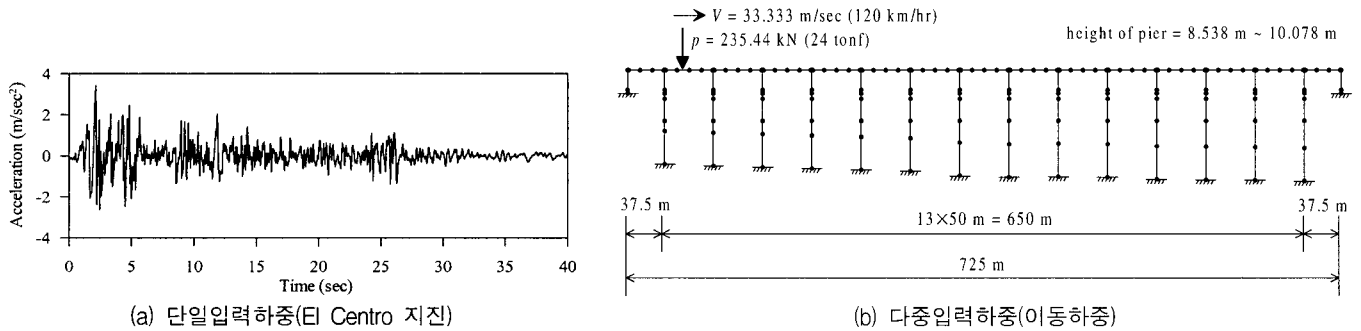


그림 4 다경간 교량의 유한요소모델 및 입력하중

표 3 다경간 교량의 제원

Material properties						
	Youngs modulus (GPa)	Section inertia, $I_{xx}$ (m <sup>4</sup> )	Section inertia, $I_{yy}$ (m <sup>4</sup> )	Torsion constant (m <sup>4</sup> )	Section area (m <sup>2</sup> )	Mass density (kgf/m <sup>3</sup> )
Decks	27.50	80.67	11.06	19.48	8.62	2300
		88.71	11.54	20.87	9.95	
		105.70	15.44	34.66	18.24	
Piers	23.24	92.17	14.29	11.87	14.00	2300
		100.00	25.01	66.73	24.50	
		84.42	23.60	52.94	17.00	
System data						
Number of nodes	177					
Number of beam elements	160					
Number of connection elements	16					
Number of degrees of freedom( $n$ )	870					

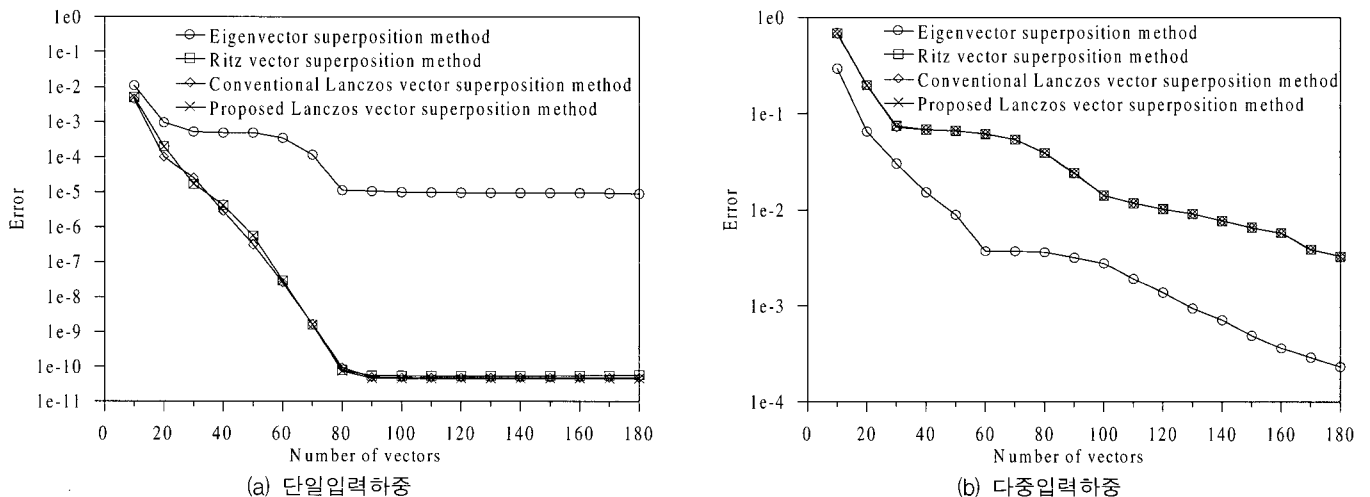
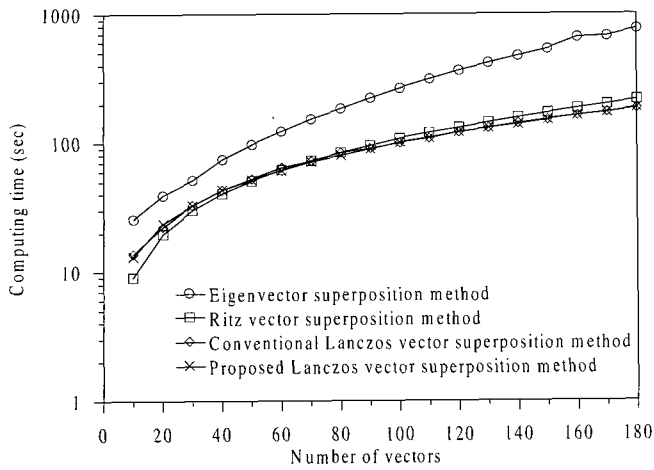
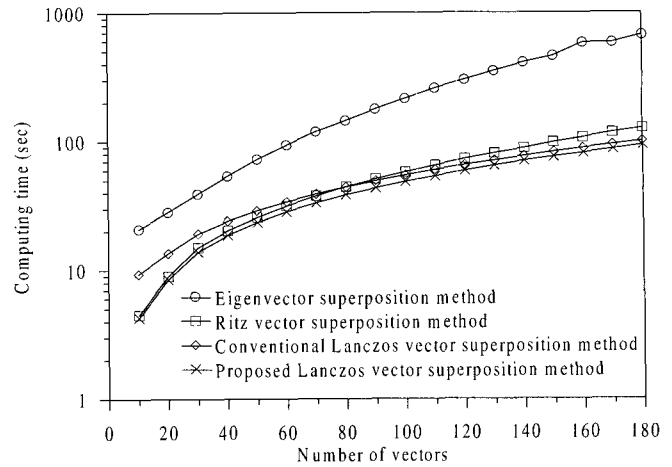


그림 5 다경간 교량에 대한 오차 비교



(a) 단일입력하중



(b) 다중입력하중

그림 6 다경간 교량에 대한 해석시간 비교

과 예제구조물에 대한 수치해석의 결과로부터 다음의 결론을 얻었다.

- (1) Ritz 벡터중첩법, 기존의 Lanczos 벡터중첩법, 제안방법의 정확도가 거의 동일하다.
- (2) Ritz 벡터중첩법, 기존의 Lanczos 벡터중첩법, 제안방법이 고유벡터중첩법보다 해석시간이 더 짧다. 벡터 수가 클 경우 기존의 Lanczos 벡터중첩법과 제안방법이 Ritz 벡터중첩법보다 다소 효율적이다. 단일입력하중을 받는 구조물을 해석할 경우 기존의 Lanczos 벡터중첩법과 제안방법의 해석시간이 거의 동일하다. 다중입력하중을 받는 구조물을 해석할 경우 벡터 수가 작을 때에는 Ritz 벡터중첩법이 기존의 Lanczos 벡터중첩법보다 더 효율적이고 벡터 수가 클 때에는 그 반대이며 제안방법이 네 방법 중 해석시간이 가장 짧다.
- (3) 제안한 Lanczos 벡터중첩법은 구조물의 효율적인 동적 해석의 한 방법으로 사용할 수 있으며 특히 다중입력하중을 받는 구조물의 해석에 있어서 효율적이다.

### 참고 문헌

1. Wilson, E. L., Yuan, M. W., and Dickens, J. M., "Dynamic analysis by direct superposition of Ritz vectors," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 10, 1982, pp. 813-821.
2. Bayo, E. P. and Wilson, E. L., "Use of Ritz vectors in wave propagation and foundation response," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 12, 1984, pp. 499-505.
3. Wilson, E. L., "A new method of dynamic analysis for linear and nonlinear systems," *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 1, 1985, pp. 21-23.
4. Leger, P. and Wilson, E. L., "Generation of load dependent Ritz transformation vectors in structural dynamics," *Engineering Computations*, Vol. 4, 1987, pp. 309-318.
5. Leger, P., "Load dependent subspace reduction methods for structural dynamic computations," *Computers and Structures*, Vol. 29, No. 6, 1988, pp. 993-999.
6. Ibrahimbegovic, A., Chen, H. C., Wilson, E. L., and Taylor, R. L., "Ritz method for dynamic analysis of large discrete linear systems with non-proportional damping," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 19, 1990, pp. 877-89.
7. Mehai, L., Paultre, P., and Leger, P., "Efficiency of modal analysis to compute the seismic response of dam-foundation systems with non-proportional damping," *Engineering Computations*, Vol. 12, 1995, pp. 333-342.
8. Nour-Omid, B. and Clough, R. W., "Dynamic analysis of structures using Lanczos co-ordinates," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 12, 1984, pp. 565-577.
9. Lanczos, C., "An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators," *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, Vol. 45, No. 4, 1950, pp. 255-282.
10. Nour-Omid, B. and Clough, R. W., "Block Lanczos method for dynamic analysis of structures," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 13, 1985, pp. 271-275.
11. Nour-Omid, B. and Regelbrugge, M. E., "Lanczos method for dynamic analysis of damped structural systems," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 18, 1989, pp. 1091-1104.
12. Chen, H. C. and Taylor, R. L., "Solution of viscously damped linear systems using a set of load-dependent vectors," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 19, 1990, pp. 653-65.
13. Pan, T. C. and Li, J., "Dynamic vehicle element method for transient response of coupled vehicle-structure systems,"

- ASCE Journal of Structural Engineering*, Vol. 128, No. 2, 2002, pp. 214-223.
14. Park, K. S., Jung, H. J., and Lee, I. W., "A comparative study on aseismic performances of base isolation systems for multi-span continuous bridge," *Engineering Structures*, Vol. 24, 2002, pp. 1001-1013.