

A Solution Method of a Three-Player Game for Application to an Electric Power Market

李 光 浩*
(Kwang-Ho Lee)

Abstract—In models of imperfect competition of deregulated electricity markets, the key task is to find the Nash equilibrium(NE). The approaches for finding the NE have had two major bottlenecks: computation of mixed strategy equilibrium and treatment of multi-player games. This paper proposes a payoff matrix approach that resolves these bottlenecks. The proposed method can efficiently find a mixed strategy equilibrium in a multi-player game. The formulation of the NE condition for a three-player game is introduced and a basic computation scheme of solving nonlinear equalities and checking inequalities is proposed. In order to relieve the inevitable burden of searching the subspace of payoffs, several techniques are adopted in this paper. Two example application problems arising from electricity markets and involving a Cournot and a Bertrand model, respectively, are investigated for verifying the proposed method.

Key Words : Electric Power Market, Bimatrix Game, Payoff Matrix, Mixed Strategy, Nash Equilibrium

1. 서 론

전력의 생산과 판매에 경쟁을 도입하여 소비자에게 질 높은 서비스와 낮은 가격의 전력에너지를 공급하고자 하는 노력이 많은 나라에서 이루어지고 있다. 하지만 전력산업의 특징으로 말미암아 완전경쟁을 유도하는 것은 매우 힘든 일이다. 발전 사업자들은 기업 이득을 극대화하기 위한 전략을 사용하기 때문에 완전경쟁에서 나타나는 이상적인 가격 보다 높은 가격이 형성된다.

전력시장에서 가격이 형성되는 메커니즘을 분석하고자 게임이론이 도구로서 연구되고 있는데 공통적인 주요 과제는 내쉬 균형점을 찾는 것이다[1-3]. 송전선로 제약 등 전력계통에서의 다양한 제약조건에 의해 내쉬균형을 찾는 것이 어려워져서 해법에 대한 관심이 높아지고 있다[4][5]. 이를 위한 접근 방식을 크게 4가지로 구분하면 수리계획법 응용[1][6][7], 보수행렬법[8-10], 진화알고리즘 적용[11], 그리고 소모적 탐색법[12]이 시도되고 있다. 하지만 제약조건 반영에 따른 복합(mixed)전략의 계산 이외에도 전력거래 해석에서 균형점 계산의 어려움은 다수참여 게임의 해법에서도 나타난다[10]. 일반적으로 전력시장에서의 발전사업에 참여하는 기업은 두 개 이상에서 약 열 개 내외 정도이기 때문에 다수참여 게임에 대한 모형화와 해법이 필요하다.

수리계획 접근법에서는 선형상보문제[7], 균형조건의 최적화[1], 혹은 전통적인 최적화 기법[6] 등을 활용하여 다수참여 게임으로의 적용을 시도하고 있지만 보수(payoff)함수가

미분가능과 오목(concave) 특성을 전제로 하기 때문에 제약조건이 반영됨으로서 이러한 특성이 만족되지 않을 때에는 정확한 내쉬 균형점을 구할 수가 없다. 진화알고리즘과 소모적 탐색법에서는 보수함수에서 미분가능성과 볼록 특성이 요구되지는 않는다. 하지만 확률값으로 나타나는 복합전략을 직접 계산할 수는 없다.

반면 보수행렬법에서는 2인 참여 게임의 경우 Lemke 알고리즘[13]을 사용하여 복합전략에 해당되는 광역(global)해를 구할 수가 있다. 하지만 3인 이상 다수참여 게임에서의 내쉬균형 조건은 비선형으로 나타나기 때문에 Lemke 알고리즘은 더 이상 사용될 수가 없다.

본 연구에서는 다수참여 게임에서의 균형점 조건에 대한 새로운 표현방식과 정식화를 제안하고 균형점 전략을 계산하기 위해 경험적 기법이 포함된 해법을 제시한다. 기본적인 접근 방식이 보수행렬법이기 때문에 복합전략의 계산이 가능하고 비선형의 균형점 조건을 풀기 때문에 다수가 참여하는 경우에도 적용이 가능하다. 따라서 내쉬균형 전략을 계산하는데 있어서 '복합전략'과 '다수참여'라는 두 가지의 주요 난관을 극복할 수가 있다.

전략 수립의 근거가 되는 보수함수는 참여자의 수만큼 존재하며 각 함수의 독립변수 또한 참여자의 수만큼 존재한다. 2인 참여 게임의 경우에는 이산화(discretize) 과정을 통해 두 개의 행렬이 구성되지만 3인 이상인 경우에는 더 이상 행렬로 표현되지 못한다. 다수참여 게임에서는 2차원에서의 행렬에 해당되는 고차원에서의 개념이 필요하다. 이를 위해 본 연구에서는 3인 게임에서 보수함수 이산화를 입방체의 '큐브(cube)'로 모형화하고 내쉬균형 조건과 이에 필요한 계산식을 새롭게 정의한다. 제안한 정의와 표현법은 3인 이상의 게임에 대해서도 확장이 가능하다.

* 正 會 員 : 檀國大 電氣電子컴퓨터工學部 副教授·工博
 接受日字 : 2003年 2月 18日
 最終完了 : 2003年 4月 18日

선형의 균형조건에 대한 Lemke 알고리즘을 대신하는 비선형 조건에서의 해법은 이론적 근거와 경험적 기법이 결합되어 사용된다. 열등(dominated) 전략에 대한 탐색과 선형 조건에서의 동일개수 특성(equal-number of nonzero elements)[10]은 이론적 해법에 해당되며 이산화 간격의 조정 기법과 보수 함수 분포와 복합전략 분포와의 상관관계를 활용하는 기법은 경험적 해법에 해당된다.

사례연구에서는 소모적 탐색법을 사용하여 정확한 내쉬균형을 구하지 못했던 경우[12]와 동일한 계통조건에 대해 Cournot 모형 해석을 시도하였으며, 또한 3인이 참여하는 가격경쟁형 전력거래에 대해서 Bertrand 모형 해석을 시도하였다. 제안한 알고리즘을 적용하여 3인 게임의 내쉬균형 복합 전략을 계산하였으며 계산결과 균형조건식 해법에서 사용한 휴리스틱 기법이 타당함도 검증하였다.

2. 3인(Three Player) 게임의 정식화

2.1 쌍행렬(Bimatrix) 게임의 표현과 내쉬 균형

일반적인 2인 행렬 게임은 비영합(nonzero-sum) 게임이며 균형점 해석은 Lemke 알고리즘[13]으로 구해진다. 게임 참여자 P1과 P2가 각각 m개와 n개의 전략을 가진다는 것은 전력거래를 Cournot 모형으로 해석할 때 각각 m개와 n개의 전력거래량 중에서 선택할 수 있음을 의미한다. Bertrand 모형으로 해석한다면 전략변수는 이산화된 입찰가격이 된다.

이때 참여자가 얻는 이득은 각각 m×n 차원의 행렬, $A = [a_{ij}]$ 과 $B = [b_{ij}]$ 로 표현된다. 여기서 a_{ij} 는 P1이 전략 i를 선택하고 P2가 전략 j를 선택할 때 P1에게 주어지는 이득을 나타낸다. 따라서 P1이 전략 i에 대해 x_i 의 확률을 갖는 복합 전략을 열벡터 x 라 하고, P2의 복합전략을 열벡터 y 라 할 때, P1과 P2의 이득은 각각 x^tAy , x^tBy 이 된다. 이러한 전략 (x^*, y^*) 가 균형을 이루기 위한 조건은 다음과 같다.

- $x^{*t}e_m = 1, x^* \geq 0, y^{*t}e_n = 1, y^* \geq 0$, 여기서 e_m 과 e_n 는 모든 원소가 1의 값을 갖는 각각 m, n 차원의 열벡터이다.
- 어느 쪽도 한쪽의 전략만 변경해서 이득을 증가시킬수 없는 상태.

이와 같은 조건을 내쉬균형조건이라 하며 다음과 같은 수식으로 표현된다.

$$\begin{aligned} x^{*t}Ay^* &\geq x^tAy^*, \quad \forall x \in R^m, \quad s.t. \quad x^t e_m \geq 1, \quad x \geq 0 \\ x^{*t}By^* &\geq x^tBy^*, \quad \forall y \in R^n, \quad s.t. \quad y^t e_n \geq 1, \quad y \geq 0 \end{aligned} \quad (1)$$

2.2 3인 게임 보수의 표현과 연산

다수참여 게임에서의 보수는 모든 참여자의 전략에 따라 달라진다. 따라서 2인이 참여하는 경우의 보수는 2차원의 행렬로 나타나고 3인이 참여하는 경우는 3차원으로 표현된다. 본 연구에서 3인 참여 게임에 대한 보수의 표현과 정식화를 소개하지만 이는 3인 이상이 참여하는 경우에도 확장이 가능하다.

3인의 참여자 P1, P2, P3가 각각 N1, N2, N3 개의 단순전

략을 갖는다고 가정한다. 이 중에서 P1이 전략 i를 선택하고 P2가 전략 j를 선택하고 P3가 전략 k를 선택할 때 P1에게 주어지는 보수를 a_{ijk} , P2에게 주어지는 보수를 b_{ijk} , P3의 보수를 c_{ijk} 로 나타낸다. 따라서 이산화된 보수 함수는 3차원의 입방체로 표현이 가능하고 이를 보수 '큐브(cube)'라고 명명한다. 이 때의 보수큐브 A, B, C는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} A &= [a_{ijk}] \in R^{N_1 \times N_2 \times N_3}, \quad B = [b_{ijk}] \in R^{N_1 \times N_2 \times N_3}, \\ C &= [c_{ijk}] \in R^{N_1 \times N_2 \times N_3}. \end{aligned}$$

만약 n명이 참여하는 경우의 보수는 n 차원의 초월큐브(hypercube) 형태로 표현된다.

식(1)에 해당되는 3인 게임에서의 내쉬균형조건을 표현하기 위해서는 보수큐브와 벡터와의 곱연산이 필요하다. 보수 큐브와 벡터의 곱연산 결과는 행렬로 표현된다. 이러한 관계를 나타내기 위해 다음과 같은 기호와 연산자를 정의한다.

$$\begin{aligned} A \otimes [x, \cdot, \cdot] &= [a_{jk}] \in R^{N_2 \times N_3}, \\ &\text{여기서 } x \in R^{N_1}, \quad a_{jk} = \sum_{i=1}^{N_1} a_{ijk}x_i \\ A \otimes [\cdot, y, \cdot] &= [a_{ik}] \in R^{N_1 \times N_3}, \\ &\text{여기서 } y \in R^{N_2}, \quad a_{ik} = \sum_{j=1}^{N_2} a_{ijk}y_j \\ A \otimes [\cdot, \cdot, z] &= [a_{ij}] \in R^{N_1 \times N_2}, \\ &\text{여기서 } z \in R^{N_3}, \quad a_{ij} = \sum_{k=1}^{N_3} a_{ijk}z_k \end{aligned}$$

하나의 큐브에 두 개의 벡터가 연속적으로 곱해지면 결과는 벡터로 표현된다. 이러한 관계를 다음의 기호로 정의한다.

$$\begin{aligned} A \otimes [\cdot, y, z] &= (A \otimes [\cdot, y, \cdot])z = (A \otimes [\cdot, \cdot, z])y \in R^{N_1}, \\ &\text{여기서 } y \in R^{N_2}, \quad z \in R^{N_3} \\ A \otimes [x, \cdot, z] &= (A \otimes [x, \cdot, \cdot])z = (A \otimes [\cdot, \cdot, z])^t x \in R^{N_2}, \\ &\text{여기서 } x \in R^{N_1}, \quad z \in R^{N_3} \\ A \otimes [x, y, \cdot] &= (A \otimes [x, \cdot, \cdot])^t y = (A \otimes [\cdot, y, \cdot])^t x \in R^{N_3}, \\ &\text{여기서 } x \in R^{N_1}, \quad y \in R^{N_2} \end{aligned}$$

하나의 큐브에 세 개의 벡터가 연속적으로 곱해지면 결과는 실수값으로 표현되며 이를 다음과 같이 나타낸다.

$$\begin{aligned} A \otimes [x, y, z] &= z^t (A \otimes [x, y, \cdot]) \\ &= y^t (A \otimes [x, \cdot, z]) = x^t (A \otimes [\cdot, y, z]) \in R, \\ &\text{여기서 } x \in R^{N_1}, \quad y \in R^{N_2}, \quad z \in R^{N_3} \end{aligned}$$

2.3 내쉬 균형 표현

쌍행렬 게임에서의 균형조건인 식(1)을 앞에서 정의한 큐브 연산을 이용하면 3인 게임의 균형조건으로 확장이 가능하다. 3인 게임에서의 전략 (x^*, y^*, z^*) 이 다음 조건을 만족하면 내쉬균형이다.

$$\begin{aligned} A \otimes [x^*, y^*, z^*] &\geq A \otimes [x, y^*, z^*], \quad \forall x \in R^{N_1}, \\ &s.t. \quad x^t e_{N_1} = 1, \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B \otimes [x^*, y^*, z^*] &\geq B \otimes [x^*, y, z^*], \quad \forall y \in R^{N_1}, \\
 \text{s.t. } y^t e_{N_1} &= 1, \quad y \geq 0 \\
 C \otimes [x^*, y^*, z^*] &\geq C \otimes [x^*, y^*, z], \quad \forall z \in R^{N_2}, \\
 \text{s.t. } z^t e_{N_2} &= 1, \quad z \geq 0
 \end{aligned} \tag{2}$$

쌍행렬 게임에서 식(1)의 부등식은 방정식으로 변환이 되고 선형상보(linear complementarity) 해법에 의해 해가 구해진다[13]. 하지만 3인 이상 게임에서의 균형조건은 식(2)에서와 같이 비선형 부등식으로 나타나기 때문에 Lemke 알고리즘으로 계산할 수가 없다. 본 연구에서는 식(2)를 비선형 연립방정식으로 변환하여 방정식의 해를 구하는 알고리즘을 제안한다.

2.4 내쉬 균형의 필요조건

내쉬균형 복합전략에서 일부의 전략만이 영이 아닌 확률을 갖는다. 즉 일부의 전략만이 확률적으로 선택되는 것이다. 이렇게 내쉬균형에서 영이 아닌 확률값으로 선택되는 전략을 핵심전략(kernel strategy)이라고 한다[14]. 전체 보수큐브에서 핵심전략에 해당되는 보수만을 모은 부분 큐브를 핵심 큐브라고 명명한다. 내쉬균형 복합전략 (x^*, y^*, z^*) 에서 핵심전략의 개수를 각각 $K_1 (\leq N_1)$, $K_2 (\leq N_2)$, $K_3 (\leq N_3)$ 라 하면 각 참여자의 핵심큐브는 다음과 같이 표현된다.

$$\hat{A} \in R^{K_1 \times K_2 \times K_3}, \hat{B} \in R^{K_1 \times K_2 \times K_3}, \hat{C} \in R^{K_1 \times K_2 \times K_3}$$

전략 (x^*, y^*, z^*) 이 균형점이기 때문에 각 참여자의 핵심 전략에서의 보수는 일정한 값을 갖는다. 따라서 다음 식(3)을 만족하는 실수 값 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 이 존재한다.

$$\begin{aligned}
 \hat{A} \otimes [\cdot, \hat{y}^*, \hat{z}^*] &= \lambda_1 e_{K_1}, \quad \hat{B} \otimes [\hat{x}^*, \cdot, \hat{z}^*] = \lambda_2 e_{K_2}, \\
 \hat{C} \otimes [\hat{x}^*, \hat{y}^*, \cdot] &= \lambda_3 e_{K_3}
 \end{aligned} \tag{3}$$

여기서 $\hat{x}^* \in R^{K_1}$, $\hat{y}^* \in R^{K_2}$, $\hat{z}^* \in R^{K_3}$ 이고 균형점에서의 핵심전략에 해당된다. 또한 $e_{K_1} \in R^{K_1}$, $e_{K_2} \in R^{K_2}$, $e_{K_3} \in R^{K_3}$ 이고 모든 원소가 1의 값을 갖는 벡터이다.

위의 식(3)은 내쉬균형이기 위한 필요조건이고 식(3)에서의 모든 방정식은 2차식이다. 일례로 보수큐브 \hat{A} 에 해당되는 K_1 개의 식에서 p 번째 식을 나타내면 다음과 같이 \hat{y} 와 \hat{z} 의 2차식임을 알 수 있다.

$$\sum_{q=1}^{K_2} \hat{y}_q \sum_{r=1}^{K_3} \hat{a}_{pqr} \hat{z}_r = \lambda_1, \text{ 여기서 } \hat{A} = [\hat{a}_{pqr}] \text{이다.}$$

식(3)에서 전체 방정식의 개수는 $K_1 + K_2 + K_3$ 이고 변수의 개수는 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 를 포함해서 $K_1 + K_2 + K_3 + 3$ 이다. 3개의 추가 방정식은 복합전략의 정규화(normalize) 조건인 $\hat{x}^t e_{K_1} = 1, \hat{y}^t e_{K_2} = 1, \hat{z}^t e_{K_3} = 1$ 이다. 따라서 내쉬균형 필요조건인 연립방정식 (3)은 음이 아닌 조건과 함께 뉴턴법에 의해 계산된다.

2.5 균형점 부등식 조건 검사

임의의 전략이 식(3)을 만족한다고 해서 모두 균형점이라 할 수는 없다. 식(3)을 만족하더라도 비음(non-negativity)의 조건에 위배되거나 식(2)를 만족하지 않을 수가 있다. 따라서 식(3)을 만족하는 후보전략에 대해 비음 조건과 다음 조건이 만족하는지를 검사해야 한다.

$$\begin{aligned}
 A \otimes [\cdot, y^*, z^*] &\leq \lambda_1 e_{N_1}, \quad B \otimes [x^*, \cdot, z^*] \leq \lambda_2 e_{N_2}, \\
 C \otimes [x^*, y^*, \cdot] &\leq \lambda_3 e_{N_3}
 \end{aligned} \tag{4}$$

여기서 x^*, y^*, z^* 는 식(3)을 만족하는 핵심전략을 갖는다. 식(4)에서 좌변은 다른 참여자의 선택이 고정되었을 때의 기대(expected) 보수를 의미한다. 일례로 $A \otimes [\cdot, y^*, z^*]$ 에서 p 번째의 값은, P2가 y^* , P3가 z^* 의 복합전략을 확률적으로 선택하고 P1이 p번째 전략을 선택할 때 P1에게 주어지는 보수이다. 만약 현재의 후보전략이 식(4)를 모두 만족한다면 각 참여자가 전략을 수정하여 더 유리한 보수를 얻을 수 없음을 의미하고 이는 내쉬균형에 해당된다. 따라서 식(3)의 연립방정식과 식(4)의 부등식을 만족하는 전략은 내쉬균형이다. 또한 이 때 각 참여자에게 주어지는 보수는 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 이다.

3. 3인 게임의 내쉬 균형 해법

3.1 핵심전략과 탐색공간

핵심전략은 복합전략을 구하는데 매우 중요한 역할을 한다. 핵심전략을 미리 알고 있다면 식(3)의 연립방정식을 계산함으로써 균형점이 구해진다. 하지만 전체 전략 중에서 어느 전략이 핵심전략이 되는지를 미리 알 수는 없다. 따라서 전략의 공간에서 탐색을 통해 식(3)과 식(4)를 만족하는 전략을 찾아야 한다. 식(3)을 계산하고 식(4)를 판정하는 것은 핵심 전략을 찾는 것에 비하면 훨씬 쉬운 일이다.

보수행렬법에 의해 내쉬균형을 구하는데 있어서 가장 어려운 점은 이러한 핵심전략을 찾는 것이다. 각 참여자가 갖는 단순전략의 개수가 증가할수록 탐색해야하는 전략의 공간은 폭발적으로 증가하기 때문이다. 쌍행렬 게임에서는 두 참여자의 핵심전략이 동일한 개수를 갖기[15] 때문에 탐색이 체계적이고 비교적 쉽게 계산된다. 하지만 다수참여 게임에서는 이러한 성질이 성립하지 않는다. 일례로 3인의 참여자가 각각 10개 씩의 단순전략을 갖는 경우에 발생 가능한 핵심전략은 10^9 가지 이상이 된다. 이러한 수치는 다음과 같이 계산된다.

$$\sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{10} \sum_{k=1}^{10} 10 C_i \cdot 10 C_j \cdot 10 C_k = 1.07 \times 10^9$$

이러한 모든 경우에 대해 균형조건식을 계산하는 것은 거의 불가능한 일이다. 따라서 탐색공간을 줄이는 방법이 필요하다. 이를 위해 본 연구에서는 이론적인 근거에 의한 방식 두 가지(3.2절, 3.5절)와 사례분석을 통한 휴리스틱 방식 두 가지(3.3절, 3.4절)를 제안하고 사례연구를 통해 이를 검증한다.

3.2 열등전략의 제거

전략게임 참여자의 전략 중에는 다른 참여자가 어떠한 선택을 하더라도 이성적(rational) 참여자라면 절대 선택하지 않는 전략이 있을 수 있다. 이를 열등(dominated) 전략이라 한다[16][17]. 이러한 전략은 참여자의 전략선택이나 게임의 결과에 전혀 영향을 주지 못하기 때문에 처음부터 제거하더라도 내쉬 균형점 계산에는 영향을 주지 않는다.

본 연구에서는 탐색공간을 줄이기 위해 이러한 특성을 활용한다. 탐색의 초기 과정에서 열등전략을 추출하고 제거함으로써 비열등(undominated) 전략만으로 구성되는 보수큐브를 구성한다. 이후의 핵심전략 탐색은 이러한 비열등 전략의 부분 큐브에 대해서만 이루어진다. 초기의 원시 큐브에서 비열등 전략 큐브로 어느 정도 축소되는지를 사례연구에서 소개한다.

전략시장해석 문제에서 전략변수는 일반적으로 연속 변수로 나타난다. 보수행렬법을 적용하기 위해서는 이산화과정이 필요하고 이때의 이산화 정도에 따라 보수행렬의 크기가 달라진다. 이산화 구간이 세분화될수록 보수행렬의 크기는 증가한다. 즉 참여자가 갖는 비열등 전략의 개수도 세분화에 따라 증가하기 때문에 열등전략의 제거만으로는 탐색공간의 축소가 효과적이지 못하다.

3.3 가변 격자(Grid) 기법

입찰사례분석을 통해 복합전략의 특성을 파악한 결과, 이산화를 통해 핵심전략이 구간 $[a, b]$ 사이에만 존재하는 경우 이산화를 세분화해도 핵심전략은 여전히 구간 $[a, b]$ 근처에서 나타난다는 사실을 알 수 있다. 즉 이산화 구간이 세분화되어도 핵심전략 분포의 특성은 유지된다는 것이다.

따라서 이산화를 처음부터 세분화함으로써 공간이 대폭 확대되어 탐색의 어려움을 겪는 것 보다는 초기에는 이산화의 격자 간격을 크게 해서 전략의 개수를 줄이고 균형점을 신속히 계산하여 균형 전략의 분포 특성을 일찍 파악하는 것이 유리한 것이다. 이렇게 추출된 균형전략의 분포 특성에 따라 균형전략이 존재하는 영역 주변에서 선택적으로 세분화된 이산화를 다시 수행하고 세분화된 보수큐브에 대해 다시 균형점을 계산한다. 이렇게 함으로써 무작위로 이산화 격자를 줄이는 것에 비해 탐색공간이 크게 감소하게 된다. 반면 이산화 보수큐브 생성 \rightarrow 열등전략 제거 \rightarrow 전략공간의 탐색 및 균형조건 계산 등 일련의 과정이 일회성 끝나지 않는다. 문제에서 요구되는 이산화 간격에 이를 때까지 이러한 세분화 과정이 반복적으로 이루어져야 한다.

이산화 격자의 간격과 구간을 조정함으로써 탐색공간은 분명히 감소하게 되고 전체적인 계산시간도 크게 줄어든다. 하지만 보수함수의 형태에 따라 격자 간격과 구간을 조정하는 것이 조금씩 달라지기 때문에 이에 대한 경험적 기술이 요구되는 난점이 있다.

3.4 보수함수 특성과 복합전략 분포의 관계

내쉬균형 복합전략의 분포는 보수함수에 의해 결정되기 때문에 보수함수와 균형전략 사이에는 균형점 조건식 이외의 어떠한 개략적인 상관관계가 존재할 수 있다. 전략시장 모형에 적용한 사례연구와 직관을 통해 두 가지의 특성을 주장하

고 이를 균형전략 계산에 활용하는 알고리즘을 제안한다.

일반적으로 Cournot 모형에서 입찰발전량의 변화에 따라 제약조건에 구속되는 경우에도 모선가격(nodal price)은 연속적으로 변한다. 만약 Cournot 모형에서 어느 모선에 수요의 정보가 존재하지 않으면 제약조건에 구속되는 경우 그 모선에서의 모선가격은 미정(undefined) 상태가 된다. 이러한 경우의 모선가격은 시장운영 규칙에 의해 정해져야 한다.

본 연구에서는 모선에 수요함수로 표현되는 부하가 연결되어 있는 일반적 경우를 가정한다. Cournot 모형에서는 모선가격이 연속적이기 때문에 보수함수 또한 연속적이다. 하지만 Bertrand 가격경쟁 모형에서는 전략변수인 가격의 변화에 따라 제약조건과는 상관없이 입찰가격의 차이에 따라 보수함수는 불연속적으로 급격히 변한다.

본 논문에서 제안하는 두 가지의 경험적 주장은 다음과 같다.

- Bertrand 모형에서처럼 보수함수가 불연속인 경우 복합전략 분포는 일부 구간에서 연속적이다.

만약 넓은 간격으로 이산화했을 때 복합전략이 $[a_i, a_{i+1}]$ 에서 나타난다면 균형전략은 $a_i \sim a_{i+1}$ 사이에 연속적으로 존재하는 것이고 세분화된 이산화를 수행하였을 때 복합전략은 역시 $a_i \sim a_{i+1}$ 사이에 연속적으로 분포하게 된다. 따라서 이러한 구간에 대해서만 세분화된 이산화를 함으로써 계산시간을 대폭 줄일 수가 있다.

- Cournot 모형이나 공급함수(supply function) 모형에서처럼 보수함수가 연속인 경우 복합전략 분포는 일부에 집중되거나 두 부분으로 분리된 형태가 되어 연속적이지 않다.

만약 넓은 간격으로 이산화했을 때 복합전략이 $[a_i, a_{i+1}]$ 에서 나타난다면 균형전략은 a_i 와 a_{i+1} 로 분리되어 각각에 집중되어 존재하고 세분화된 이산화를 수행했을 때 복합전략은 역시 a_i 와 a_{i+1} 각각에서 나타나게 된다. 따라서 a_i 와 a_{i+1} 사이 구간에 대해서 세분화하지 않음으로써 계산시간을 대폭 줄일 수가 있다.

3.5 쌍행렬 게임의 동일개수 조건

보수함수가 연속분포를 갖고 만약 한 참여자의 균형전략이 단순전략임을 알고 있다면 균형점은 수월하게 계산될 수 있다. 참여자 P1이 단순전략을 선택한다면 나머지 참여자 P2와 P3는 2인 게임을 벌이는 것과 같다. 따라서 2인 게임의 균형전략에서 적용되는 핵심전략의 '동일 개수 성질'[10][15]을 적용할 수가 있다.

넓은 간격 이산화에서 한 참여자의 균형전략이 단순전략으로 계산된다면 이는 나머지 참여자들의 2인 게임이라 가정하고 전략공간의 탐색 대신에 선형상보(linear complementarity) 문제로 해석하여 Lemke 알고리즘으로 계산할 수 있다. Lemke 알고리즘에 의한 계산은 전략공간의 탐색, 필요조건 등의 계산 등의 과정에 비해 월등히 빠르게 이루어진다. 따라서 이는 탐색공간의 축소보다는 쌍행렬 게임 해법의 활용을 통한 신속한 계산이라 할 수 있다.

4. Cournot 모형에 적용사례

4.1 계통과 문제의 표현

적용은 Cunningham의 연구[12]에서 시도했던 것과 동일한 시스템을 대상으로 한다. 계통은 그림1과 같고 3인의 발전 참여자는 각 모선에 존재하며 한계비용함수와 각 모선에서의 수요함수는 표1과 같다. 전력조류의 계산은 DC 조류계산을 사용하며 선로에는 무저항(lossless)과 모두 동일한 리액턴스를 가정한다.

표 1 Cournot 모형에서의 수요함수와 한계비용함수
Table 1 Demand and marginal cost data

비용, 수요함수		모선 A	모선 B	모선 C
비용함수 $P_i = \beta_i - \alpha_i q_i$	β_i	108.4	103.8	105.7
	α_i	0.056	0.067	0.064
한계비용함수 $MC_i = b_i + m_i q_i$	m_i	0.016	0.021	0.013
	b_i	1.361	-2.08	8.105

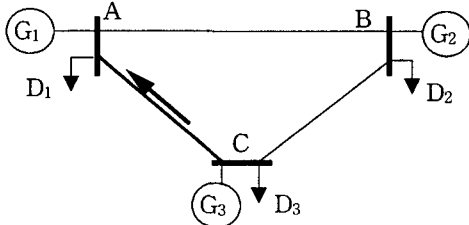


그림 1 Cournot 모형 적용 계통
Fig. 1 Sample system for the Cournot model

전략변수는 각 발전참여자의 입찰 발전량이고 모선가격은 부하의 이익(benefit) 최대화에 의해 결정된다. 참여자의 이익은 모선가격과 입찰 발전량의 곱에서 발전비용을 뺀 값으로 계산된다. 완전경쟁의 가정에서 균형점을 구하면 참여자들의 발전량은 각각 1512, 1185, 1270MW이다. Cournot 불완전 경쟁의 경우에 균형점의 발전량이 완전경쟁에서보다 작아진다. 따라서 본 시뮬레이션에서는 입찰발전량의 최대 범위를 1500 MW, 입찰의 단위를 1MW로 가정한다. 각 참여자는 약 1500 개의 단순전략을 갖게 된다.

4.2 비제약시의 내쉬 균형

처음부터 1500개의 전략에 대해 균형전략을 구하는 것은 탐색공간이 너무 커서 계산이 거의 불가능하다. 본 사례연구에서는 초기의 격자 간격을 100으로 하여 구간 600~1500 사이의 10개의 전략으로 이산화 하였다. 따라서 원시 보수큐브는 10×10×10이며 열등전략을 제거하면 2×3×2의 유효 큐브로 대폭 줄어든다.

여기에 제한한 계산 알고리즘을 적용하면 참여자 (A, B, C)에 대해 [1100, 1000, 1000]의 단순 균형전략이 계산된다. 보수함수가 연속적 분포를 갖기 때문에 3.4절의 기법을 적용하여 각 전략변수에 대해 1000~1200, 900~1100, 900~1100의 범위에서 세분화된 이산화를 수행하고 이러한 반복 세분화과정을 수차례 거쳐 [1106, 1045, 995]의 최종 값이 구해진다.

다. 이러한 전략이 내쉬균형임을 보이기 위해 그림2에 각 참여자에 대한 기대 보수분포를 나타낸다. 각 참여자는 계산된 전략에서 선택을 수정하지 않는 것이 가장 유리하므로 내쉬 균형 상태에 해당된다.

이러한 균형전략은 동일한 조건에서 소모적 탐색법을 적용한 연구[12]의 결과와 일치한다. 이 때 모선 C에서 A사이의 선로조류는 29MW로 계산된다.

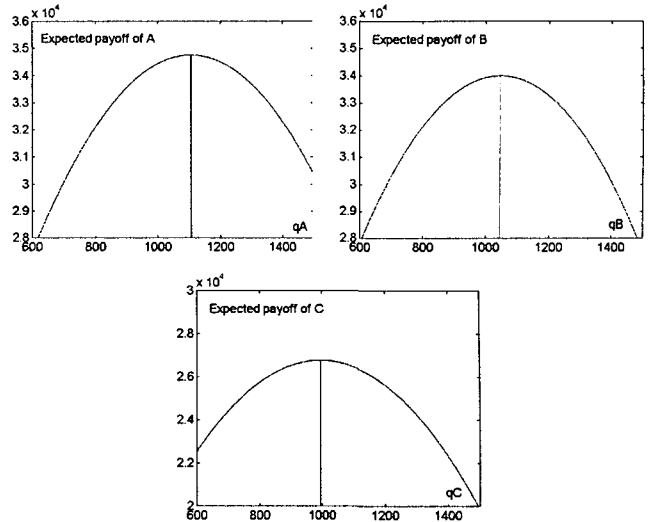


그림 2 비제약 Cournot 내쉬균형 전략과 기대 보수분포
Fig. 2 Strategies and profits of unconstrained Cournot NE

4.3 제약조건을 고려한 내쉬균형

선로 AC에 양방향으로 선로제약 40MW를 설정하고 Cournot 내쉬 균형점을 구한다. 초기 이산화에서는 비제약에서와 동일한 10×10×10의 원시큐브를 생성하며 열등전략을 제거하면 5×4×5의 유효 큐브로 축소된다. 계산결과, 참여자 A는 [800, 900, 1100]의 전략을 [0.11, 0.27, 0.61]의 확률로 선택하고 참여자 B는 1100의 단순전략을 선택하며 참여자 C는 [700, 800, 900]의 전략을 [0.12, 0.18, 0.70]의 확률로 선택한다.

참여자 B가 단순전략을 선택하므로 3.5절에서의 쌍행렬 기법을 적용한다. 참여자 B는 1000~1200 사이의 단순전략을 선택하는 것으로 하고 참여자 A와 C 사이에 2인 게임을 하는 형태로 계산한다. 계산결과, 참여자 A는 [829, 1073, 1074]의 전략을 [0.21, 0.20, 0.59]의 확률로 선택하고 참여자 B는 1115의 단순전략을 선택하며 참여자 C는 [699, 873, 874]의 전략을 [0.08, 0.22, 0.70]의 확률로 선택하게 된다.

이러한 전략이 내쉬균형임을 검증하기 위해 그림3에 각 참여자에 대한 기대보수분포를 나타낸다. 각각의 핵심전략에서 기대보수가 최대값을 보이므로 내쉬균형에 해당된다. 반면 연구 [12]에서는 이러한 복합전략을 구하지 못하고 복합 전략의 가능성만을 주장하였다.

그림2와 비교하면 제약조건이 포함됨으로서 A와 C의 보수는 오목(concave) 특성이 사라짐을 알 수 있다. 하지만 B의 보수함수는 여전히 오목특성과 미분가능 특성을 유지하게 된다. 이것이 B가 단순전략을 선택하게 된 이유가 된다.

또한 비제약 균형점에서 선로 AC에서의 조류가 29MW인데 이보다 큰 40MW를 선로제약으로 설정함으로써 발전참여자들의 전략이 달라짐을 알 수 있다. 이러한 사실은 연구 [12]에서 정성적으로 주장한 바 있고 본 연구에서 정량적으로 이를 입증한 것이다.

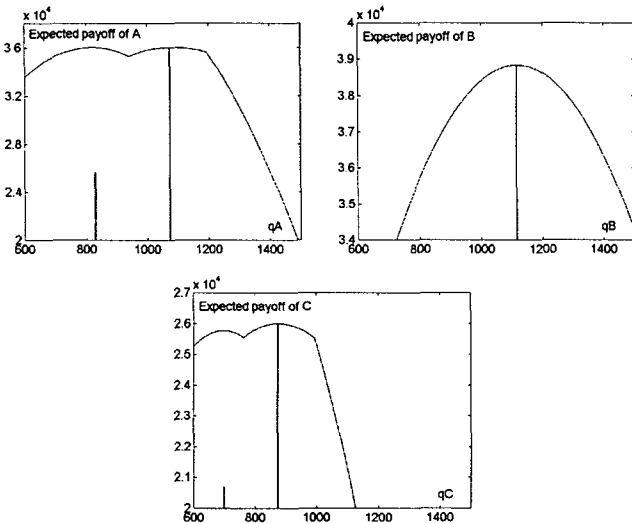


그림 3 제약 Cournot 내쉬균형 전략과 기대 보수분포
Fig. 3 Strategies and profits of constrained Cournot NE

5. Bertrand 모형의 적용사례

5.1 전력시장 표현

불완전경쟁 해석에서 또 하나의 대표적 모형은 Bertrand 가격경쟁 모형이다. 제약조건이 포함된 Bertrand 모형에서 발전경쟁자는 공급가격과 함께 희망 발전량을 시장운영자에게 제출하고 시장에서는 수요특성에 부합하는 낮은 가격의 발전량부터 공급량으로 결정이 된다[16]. 여기서 희망 발전량이란 공급가격과 한계비용이 같을 때의 생산량이다.

가격경쟁모형에서의 보수함수 분포는 Cournot 모형에서의 그것과 현저한 차이를 보인다. 따라서 3.4절에서 언급하였듯이 균형전략의 분포 특성도 매우 다르기 때문에 균형점 계산과정에서 탐색공간 축소를 위한 휴리스틱 또한 다르게 적용된다.

Bertrand 해석 모형 사례도 4절에서 Cournot 모형을 적용한 시스템과 동일한 시스템에 적용한다. 계통은 그림1과 같고 한계비용함수와 수요함수는 표1과 같다.

완전경쟁의 가정에서 균형점을 계산하면 각 모션에서의 모션가격이 24.4이고 비제약 조건에서의 Cournot 내쉬균형 전략(그림2)에서 모션가격은 41.47로 나타난다. 제약조건이 포함된 Bertrand 모형에서의 균형점 가격은 일반적으로 완전경쟁에서의 가격보다 높고 Cournot 균형점의 가격보다 낮기 때문에 본 시뮬레이션에서는 입찰가격의 범위를 20~40 사이로 정하고 단위 구간은 1로 설정한다. 따라서 각 참여자의 단순전략은 21개 썩을 갖는다.

5.2 가격경쟁 모형의 계산 결과

참여자가 갖는 단순전략의 개수가 많지 않기 때문에 이산

화 간격을 조정하지 않고 직접 1 간격으로 원시 보수행렬을 구성한다. 따라서 원시 보수큐브는 $21 \times 21 \times 21$ 이 된다. 제안한 알고리즘의 첫 번째 단계인 열등전략 제거를 수행하면 큐브는 $8 \times 7 \times 7$ 로 축소된다. 다음 단계는 축소된 큐브에 대해 핵심전략의 탐색과 균형점 필요조건의 계산이다.

가격경쟁 모형에서 보수함수가 불연속적으로 급격히 변하는 분포를 갖고 이에 대한 균형전략은 연속적으로 분포한다고 3.4절에서 주장한 바 있다. 이러한 경험적 규칙은 이산화 간격을 조정하지 않더라도 핵심전략의 탐색과정에서 유용하게 사용이 된다. 즉 연속적인 분포를 갖는 경우만 탐색하기 때문에 탐색공간이 대폭 축소된다. 이러한 휴리스틱을 적용하지 않으면 $8 \times 7 \times 7$ 의 큐브에 대해서도 4.1×10^6 개의 핵심전략 후보들을 계산해야 한다. 하지만 휴리스틱을 적용하면 약 2.8×10^4 개 정도만 탐색하게 된다.

균형점을 찾는 데 소요된 알고리즘 수행 시간은 펜티엄 III 233MHz 프로세서를 기준으로 19초 정도이며 계산결과는 그림4에서와 같이 $6 \times 2 \times 6$ 크기 핵심전략의 확률값으로 나타난다. 여기서도 계산된 균형전략에서의 기대보수를 살펴보면 각 참여자가 선택을 바꿀 유인이 존재하지 않기 때문에 내쉬 균형임이 확인된다.

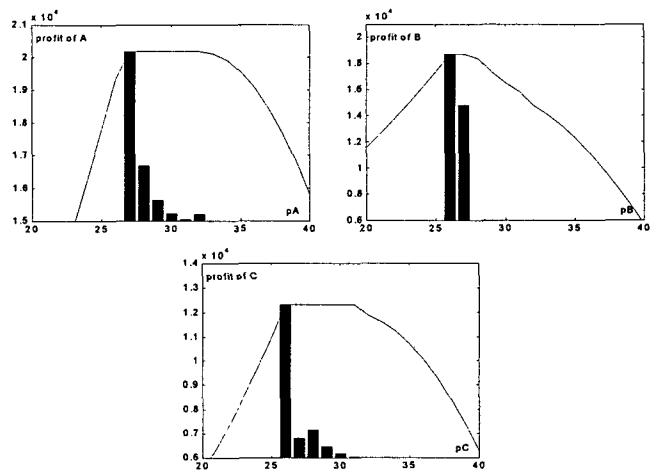


그림 4 Bertrand 내쉬균형 전략과 기대보수 분포
Fig. 4 Strategies and profits of the Bertrand NE

5. 결 론

전력시장 해석을 위한 게임이론 적용 문제에서 내쉬균형 전략을 구할 때 두 가지 어려운 점이 존재한다. 확률분포로 나타나는 복합전략의 계산과 다수참여게임의 해법이 그것이다. 본 연구에서는 이러한 문제를 해결하기 위해 보수행렬법을 근간으로 하는 새로운 균형점 해법 알고리즘을 제안하였다.

3인이 참여하는 경우를 다루기 위해 보수큐브를 정의하고 이를 이용하여 다수참여게임에서의 내쉬균형의 조건을 정식화하였다. 또한 비선형 연립방정식으로 표현되는 필요조건식과 내쉬균형임을 검증하는 부등식으로 분리하여 적용하는 다수참여게임의 균형전략 해법을 제안하였다. 하지만 핵심전략을 찾기 위해 전략공간을 탐색해야하는 또 다른 어려운 문제가 발생하게 되고 이를 해결하고자 2가지의 이론적 기법과 2

가지의 경험적 기법을 사용하였다.

내쉬균형에 영향을 주지 않는 열등전략을 제거하고, 이산화 격자의 구간을 계산이 용이하도록 조정하고, 보수함수의 분포 특성과 균형전략 분포의 상관관계를 적절히 활용하고, 2인 게임으로 해석이 가능한 경우 Lemke 알고리즘을 사용하는 기법들이 탐색공간을 줄이는데 효과적임을 사례연구를 통해 확인하였다.

본 연구에서 제안한 3인 게임에서의 보수큐브의 표현과 내쉬균형 조건의 정식화는 3인 이상의 게임에 대해서도 확장이 가능하다. 하지만 해법 과정에서 사용된 알고리즘은 주로 경험적 사실에 근거하기 때문에 일반적 해법이라 할 수가 없으며 참여자 수가 증가하게 되면 알고리즘 수행 시간이 증가하고 수렴성이 보장되지 않는 문제점을 안고 있다.

감사의 글

이 연구는 2003학년도 단국대학교 대학연구비의 지원으로 연구되었음.

참 고 문 헌

[1] B.F. Hobbs, C.B. Metzler, and J.S. Pang, "Strategic Gaming Analysis for Electric Power Systems: An MPEC approach," *IEEE Trans. on Power Systems*, Vol.15, No.2, pp. 638-645, May 2000.

[2] Z.Q. Luo, J.S. Pang, and D. Ralph, *Mathematical Programs with Equilibrium Constraints*, N.Y.: Cambridge Univ. Press, 1996.

[3] X. Guan, Y.C. Ho, and D.L. Pepyne, "Gaming and Price Spikes in Electric Power Markets," *IEEE Trans. on Power Systems*, Vol.16, No.3, pp. 402-408, August 2001.

[4] X. Bai, S.M. Shahidehpour, V.C. Ramesh, and E. Yu, "Transmission Analysis by Nash Game Method," *IEEE Trans. on Power Systems*, Vol. 12, No. 3, pp. 1046-1052, August 1997.

[5] C. Silva, B.F. Wollenberg, and C.Z. Zheng, "Application of Mechanism Design to Electric Power Markets," *IEEE Trans. on Power Systems*, Vol.16, No.1, pp.1-8, February 2001.

[6] J.D. Weber and T.J. Overbye, "A Two-Level Optimization Problem for Analysis of PES Summer Meeting, Vol.2, pp.682-687, 1999.

[7] B.F. Hobbs, "Linear Complementarity Models of Nash-Cournot Competition in Bilateral and POOLCO Power Market," *IEEE Trans. on Power Systems*, Vol.16, No.2, pp.194-202, May 2001.

[8] S. Stoft, "Using Game Theory to Study Market Power in Simple Networks," *IEEE Tutorial on Game Theory in Electric Power Markets*, IEEE Press TP-136-0, pp.33-40, 1999.

[9] R.W. Ferrero, S.M. Shahidehpour, and V.C. Ramesh, "Transaction Analysis in Deregulated Power Systems Using Game Theory," *IEEE Trans. on Power Systems*, Vol.12, No.3, pp.1340-1347, August 1997.

[10] K.H. Lee and R. Baldick, "Tuning of Discretization in Bimatrix Game Approach to Power System Market Analysis," *IEEE Trans. on Power Systems*, Vol.18, No.2, pp.830-836, May 2003.

[11] T. Curzon Price, "Using Co-evolutionary Programming to Simulate Strategic Behavior in Markets," *Journal of Evolutionary Economics*, Vol.7, pp.219-254, 1997.

[12] L.B. Cunningham, R. Baldick, and M.L. Baughman, "An Empirical Study of Applied Game Theory: Transmission Constrained Cournot Behavior," *IEEE Transactions on Power Systems*, 17(1), pp166-172, February 2002.

[13] C.E. Lemke and J.T. Howson, "Equilibrium Points of Bimatrix Games," *SIAM Journal of Applied Mathematics* 12, pp.413-423, 1964.

[14] 이광호, "전력시장 해석을 위한 Bimatrix 게임의 이산화 알고리즘," 전기학회논문지, 52A권 1호, pp.62-67, January, 2003.

[15] N.N. Vorob'ev, "Equilibrium Points in Bimatrix Games," *Theory of Probability and its Applications*, Vol.III, pp.297-309, 1958.

[16] D.W. Carlton, J.M. Perloff, *Modern Industrial Organization*, Addison-Wesley, 2000.

[17] D. Fudenberg and J. Tirole, *Game Theory*, The MIT Press, 1991.

[18] A. Mas-Collel, M.D. Whinston, J.R. Green, *Microeconomic Theory*, Oxford, 1995.

저 자 소 개



이 광 호(李 光 浩)

1965년 12월 22일 생. 1988년 서울대 공대 전기공학과 졸업. 1990년 동 대학원 전기공학과 졸업(석사). 1995년 동 대학원 전기공학과 졸업(공학박). 1995년 전력연구원 위촉연구원. 2001년 미국 Univ. of Texas (Austin) 방문교수. 1996~현재 단국대 공대 전기공학과 부교수.
Tel : 02-709-2868
E-Mail : khlee@dku.edu