Lagrange 이차 보간 다항식을 이용한 새로운 일반형 블럭 펄스 적분 연산 행렬

論 文
52D-6-4

A New Block Pulse Operational Matrices Improved by The Second Order Lagrange Interpolation Polynomial

沈 在 先* · 金 泰 勳**
(Jae-Sun Shim · Tai-Hoon Kim)

Abstract - This paper presents a new method for finding the Block Pulse series coefficients, deriving the Block Pulse integration operational matrices and generalizing the integration operational matrices which are necessary for the control fields using the Block Pulse functions. In order to apply the Block Pulse function technique to the problems of state estimation or parameter identification more efficiently, it is necessary to find the more exact value of the Block Pulse series coefficients and integral operational matrices. This paper presents the method for improving the accuracy of the Block Pulse series coefficients and derives the related integration operational matrices and generalized integration operational matrix by using the Lagrange second order interpolation polynomial

Key Words : Block Pulse series, integration operational matrices, Lagrange second order interpolation polynomial

1. 서 론

블럭 펄스 함수는 구분 연속 상수(piecewise continuous constant)값을 가지는 직교함수의 집합이며, Corrington[1], Tsay와 Wu[2] 등이 블럭 펄스 함수를 이용하여 제어문제 해결과정의 복잡한 표현을 줄이기 위하여 적분 연산 행렬을 도하였다. 적분 연산 행렬의 도입은 블럭 펄스 함수 및 다른 여러 직교함수들이 시스템의 해석과 동정, 그리고 제어기 설계 등의 분야에 널리 이용될 수 있는 계기를 제공하였다[3-5].

블럭 펄스 함수를 사용하여 시스템 문제를 해결하는데 있어서 가장 중요한 문제들 중의 하나는, 블럭 펄스 적분 연산 행렬이 포함하고 있는 오차를 줄여서 실제 값에 근접하도록 만드는 것이지만, 기존에 사용하던 방법들은 단순한 평균값만을 사용함으로써 정확성을 향상시키는 데 한계가 있었고, 이와 관련하여서 김태훈 등이 기존의 방법 대신 Lagrange 이차 보간 다항식을 사용하는 방식을 제안하였으며[6], 또한 오차를 줄이기 위하여 적분 연산 행렬의 원소들을 보정하는 방식에 관한 연구를 진행하였다[7-8].

본 논문에서는 Lagrnage 이차 보간 다항식을 이용하여 새로운 일반형 블럭 펄스 적분 연산 행렬을 유도하고, 다중 적분으로 표현되는 시스템의 경우에 있어서 기존에 사용되어 왔던 블럭 펄스 급수의 계수 추정 기법과 적분 연산 행렬, 혹은 Wang이 유도한 일반형 적분 연산 행렬[9]을 사용하는 것보다, 본 연구에서 유도한 새로운 일반형 적분 연산 행렬을 사용하는 것이 정확성을 향상시킬 수 있음을 시뮬레이션을 통하여 확인하였다.

* 正 會 員 : 三陟大學校 電氣工學科 敎授
** 正 會 員 : 韓國情報保護振興院 先任硏究員
接受日字 : 2003年 1月 24日
最終完了 : 2003年 5月 15日

2. 블럭 펄스 급수 계수

블럭 펄스 급수의 전개는 원래의 함수 $f(t)$가 구분 연속 상수값의 함수 $\hat{f}(t)$에 의하여 근사화될 수 있음을 의미하는 것이며, 이러한 근사화는 구간 $t\in[0, t_f)$에서 $f(t)$와 $\hat{f}(t)$ 사이의 평균자승오차를 표시하는 식 (2.1)의 최소값에 도달하는 것이다[10].

$$\varepsilon = \frac{1}{t_f}\int_0^{t_f}\left[f(t) - \sum_{j=0}^{m-1}F_j\,\psi_j(t)\right]^2 dt \tag{2.1}$$

식 (2.1)이 최소값이 되기 위해서는 다음 조건을 만족하여야 한다.

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial F_i} = -\frac{2}{t_f}\int_0^{t_f}\left[f(t) - \sum_{j=0}^{m-1}F_j\,\psi_j(t)\right]\psi_i(t)dt = 0 \tag{2.2}$$

그리고 블럭 펄스 함수의 직교성으로부터 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\int_{ih}^{(i+1)h} F_i\,\psi_i(t)dt = \int_{ih}^{(i+1)h} f(t)\,\psi_i(t)dt \tag{2.3}$$

따라서, 식 (2.2)의 평균자승오차 ε을 최소로 하기 위한 필요조건으로 블럭 펄스 계수 $F_i(i = 0, 1, 2, \cdots, m-1)$를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$F_i = \frac{1}{h}\int_o^{t_f} f(t)\,\psi_i(t)dt = \frac{1}{h}\int_{ih}^{(i+1)h} f(t)dt \qquad (2.4)$$

식 (2.4)는 블럭 펄스 계수들의 기하학적인 의미를 나타내며, i번째 블럭 펄스 계수 F_i는 i번째 미소구간에서 원래 함수 $f(t)$의 적분 평균값이다. 다시 말하면, i번째 블럭 펄스 계수 F_i는 $f(t)$의 곡선중 구간 $t\in[ih,\ (i+1)h)$에서의 면적과 관계가 있는 것이다.

하지만 만일 함수 $f(t)$의 정적분을 구할 수 없는 경우라면, 일반적으로 사용하는 적분 방법을 이용하는 것 자체가 불가능하며, 이럴 경우에는 블럭 펄스의 폭 h가 충분히 작다고 가정한 후 다음과 같은 단순한 관계로부터 근사적으로 블럭 펄스 계수들을 결정할 수 있다[11-12].

$$F_i \fallingdotseq \frac{1}{2}\{f(t_i) + f(t_{i+1})\} \qquad (2.5)$$

단, $f(t_i)$와 $f(t_{i+1})$은 $t = ih$와 $t = (i+1)h$에서의 $f(t)$의 값

그러나 식 (2.5)는 각각의 블럭 펄스 계수가 미소구간의 두 끝점들에서의 원래 함수의 평균값에 의해서 근사화됨을 나타내는 것이다. 일반적으로 사용되어 온 이 방법을 사용할 경우, 블럭 펄스 계수는 각각의 구간에 대한 함수 $f(t)$의 평균값이므로 곡선인 구간에서는 식 (2.4)에 대한 근사식인 식 (2.5)의 오차가 커지게 된다. 이러한 오차를 줄이기 위하여 Lagrange 이차 보간 다항식을 이용하여 블럭 펄스 급수의 계수를 구하도록 한다.

세 개의 점 $t_0 = (i-2)h$, $t_1 = (i-1)h$, $t_2 = ih$를 지나는 $f(t)$에 대한 이차 보간 다항식을 $p_2(t)$라고 하면, Lagrange 형태의 보간 다항식 $p_2(t)$는 식 (2.6)과 같게 되고,

$$\begin{aligned} p_2(t) &= f((i-2)h)\frac{(t-(i-1)h)(t-ih)}{2h^2} \\ &\quad - f((i-1)h)\frac{(t-(i-2)h)(t-ih)}{h^2} \\ &\quad + f(ih)\frac{(t-(i-2)h)(t-(i-1)h)}{2h^2} \end{aligned} \qquad (2.6)$$

식 (2.6)을 미소구간 $t\in[(i-1)h,\ ih)$에서 적분하면 다음과 같은 형태의 블록 펄스 계수를 얻을 수 있게 된다.

$$\begin{aligned} F_i &= \int_{(i-1)h}^{ih} p_2(t)\,dt \\ &= -\frac{1}{12}f((i-2)h) + \frac{8}{12}f((i-1)h) + \frac{5}{12}f(ih) \end{aligned} \qquad (2.7)$$

3. 개선된 블럭 펄스 적분 연산 행렬

3.1 기존의 블럭 펄스 적분 연산 행렬

일반적인 블록 펄스 적분 연산 행렬은, 블록 펄스 급수를 함수의 적분과 미분에 확장하기 위해서 먼저 각 블록 펄스 함수 $\psi_i(t)$에 대한 적분을 고려함으로써 유도할 수 있다. 이러한 적분은 $t\in[0,\ ih)$인 경우에는

$$\int_0^t \psi_i(t)dt = 0 \qquad (3.1)$$

과 같고, $t\in[ih,\ (i+1)h)$인 경우에는

$$\int_0^t \psi_i(t)dt = \int_0^{ih}\psi_i(t)dt + \int_{ih}^t \psi_i(t)dt = t - ih \qquad (3.2)$$

과 같으며, 그리고 $t\in[ih,\ t_f)$인 경우에는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \int_0^t \psi_i(t)dt &= \int_0^{ih}\psi_i(t)dt \\ &\quad + \int_{ih}^{(i+1)h}\psi_i(t)dt + \int_{(i+1)h}^t \psi_i(t)dt \\ &= t - ih \end{aligned} \qquad (3.3)$$

이와 같은 세 가지 경우에 대한 결론을 합하여 다음과 같이 다시 블록 펄스 급수로 표현할 수 있다.

$$\int_0^t \psi_i(t)dt \doteq \frac{h}{2}\psi_i(t) + h\sum_{j=i+1}^{m-1}\psi_j(t) \qquad (3.4)$$

또한 벡터형식으로는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\int_0^t \psi_i(t)dt = \left(0\ \cdots\ 0\ \underset{\uparrow}{\frac{h}{2}}\ h\ \cdots\ h\right)\psi(t) \qquad (3.5)$$

i번째 요소

식 (3.5)에서, 블록 펄스 계수 벡터는 상당히 일반적이다. i번째 요소는 $h/2$ 값을 가지고, 그 이전 값은 모두 0이며, 그 이후의 값은 모두 h를 갖는다. 위의 설명으로부터, 모든 m개의 블록 펄스 함수에 대한 블록 펄스 적분은 간단히 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\int_0^t \psi(t)dt \doteq \boldsymbol{P}\psi(t) \qquad (3.6)$$

$$\boldsymbol{P} = \frac{h}{2}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad (3.7)$$

위의 $\boldsymbol{P}$행렬은 블록 펄스 함수의 적분연산행렬로 정의된다. 이 행렬은 상삼각행렬의 일반적인 형태를 취하고 있다. k번째 행은 첫 번째 행을 $(k-1)$만큼 오른쪽으로 이동시킴으로써 얻을 수 있다. 또한 이 상삼각행렬의 모든 m개의 고유값은

$h/2$임을 알 수 있다. 위의 적분연산행렬에 기초하여, 함수 $f(t)$의 적분은 다음과 같이 블록 펄스 급수를 이용하여 쉽게 표현할 수 있다.

$$\int_0^t f(t)dt \doteq \int_0^t \boldsymbol{F}^T \boldsymbol{\psi}(t)dt \doteq \boldsymbol{F}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{\psi}(t) \tag{3.8}$$

어떠한 함수의 적분은 식 (3.8)에서 보는 바와 같이 표현될 수 있으며, 이것을 다시 표현하여 보면 다음과 같게 된다.

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_0^t f(t)dt \doteq \int_0^t \boldsymbol{F}^T \boldsymbol{\psi}(t)dt \doteq \boldsymbol{F}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{\psi}(t) \\ &= [\,\widetilde{g_1} \quad \widetilde{g_2} \quad \cdots \quad \widetilde{g_m}\,]\,\boldsymbol{\psi}(t) \end{aligned} \tag{3.9}$$

식 (3.9)에서는 함수 $g(t)$의 블록 펄스 계수를 $\widetilde{g_i}$(단, i = 1, 2, ···, m)와 같이 표현함으로써 식 (3.8)에 의하여 표시된 값이 정확한 값이 아니라 $\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{P}$에 의하여 얻어진 근사값임을 표시하였다.

식 (3.9)에 표시된 블록 펄스 계수의 기하학적 의미를 살펴보기 위하여 적분 연산 행렬의 상삼각 특성을 이용하여 표시하면 다음과 같다.

$$\widetilde{g_i} = \frac{h}{2} f_i + h(f_1 + f_2 + \cdots + f_{i-1}) \tag{3.10}$$

식 (3.10)을 적분 형식을 통하여 다시 표현하면 다음의 식 (3.11)이 된다.

$$\begin{aligned} \widetilde{g_i} &= \int_0^{(i-1)h} f(t)\,dt + \frac{1}{2} \int_{(i-1)h}^{ih} f(t)\,dt \\ &= g((i-1)h) + \frac{g(ih) - g((i-1)h)}{2} \\ &= \frac{g(ih) + g((i-1)h)}{2} \end{aligned} \tag{3.11}$$

식 (3.11)의 결과로 얻어진 i번째 블록 펄스 계수는 $t_1 = (i-1)h$와 $t_2 = ih$에서 $g(t)$의 함수값에 대한 평균일 뿐 정확한 값이 아니며, 이러한 경우 보간 다항식을 사용하여 정확성을 향상시킬 수 있다.

3.2 Lagrange 이차 보간 다항식을 이용한 적분 연산 행렬

우선 세 점 $t_0 = (i-2)h$, $t_1 = (i-1)h$, $t_2 = ih$를 지나는 보간 다항식을 표시하면

$$\begin{aligned} \overline{g}(t) &= g((i-2)h)\frac{(t-ih)(t-(i-1)h)}{2h^2} \\ &\quad - g((i-1)h)\frac{(t-ih)(t-(i-2)h)}{h^2} \\ &\quad + g(ih)\frac{(t-(i-1)h)(t-(i-2)h)}{2h^2} \end{aligned} \tag{3.12}$$

과 같고, 이 보간 다항식으로부터 함수 $g(t)$의 i번째 블록 펄스 계수를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \overline{g_i} &= \frac{1}{h} \int_{(i-1)h}^{ih} \overline{g}(t)\,dt \\ &= -\frac{1}{12} g((i-2)h) + \frac{8}{12} g((i-1)h) + \frac{5}{12} g(ih) \end{aligned} \tag{3.13}$$

함수 $g(t)$는 함수 $f(t)$의 적분이므로 다음의 관계가 성립한다.

$$\begin{aligned} g(ih) &= \int_0^{ih} f(t)\,dt \\ &= h\Big(\frac{1}{h}\int_0^h f(t)\,dt + \frac{1}{h}\int_h^{2h} f(t)\,dt \\ &\qquad + \cdots + \frac{1}{h}\int_{(i-1)h}^{ih} f(t)\,dt\Big) \\ &= h(f_1 + f_2 + \cdots + f_i) \end{aligned} \tag{3.14}$$

식 (3.14)의 관계식이 다음의 경우에도 적용된다.

$$g((i-1)h) = h(f_1 + f_2 + \cdots + f_{i-1}) \tag{3.15}$$

$$g((i-2)h) = h(f_1 + f_2 + \cdots + f_{i-2}) \tag{3.16}$$

식 (3.14)부터 식 (3.16)까지를 식 (3.13)에 대입하여 정리하면 다음의 식 (3.17)을 얻을 수 있다.

$$\overline{g_i} = h\Big(f_1 + f_2 + \cdots + f_{i-2} + \frac{13}{12} f_{i-1} + \frac{5}{12} f_i\Big) \tag{3.17}$$

하지만 식 (3.17)에서 알 수 있는 것과 같이, f_{-1}과 f_0은 존재하지 않기 때문에 이 식은 $i = 3, 4, \cdots, m$일 경우에만 의미를 갖게 된다. $i = 2$일 경우에는 식 (3.13)으로 직접 다음과 같은 값을 얻을 수가 있다(단, $g(0) = 0$이다).

$$\begin{aligned} \overline{g_2} &= -\frac{1}{12} g(0) + \frac{8}{12} g(h) + \frac{5}{12} g(2h) \\ &= h\Big(\frac{13}{12} f_1 + \frac{5}{12} f_2\Big) \end{aligned} \tag{3.18}$$

그리고 $i = 1$인 경우에는 함수 $f(t)$와 $g(t)$가 $t < 0$에서 정의되지 않았기 때문에 첫 번째 블록 펄스 계수 $\overline{g_1}$을 구하기 위하여 세 점을 이용한 보간 다항식을 사용할 수 없다. 따라서 이 경우에는 식 (3.10)으로부터

$$\overline{g_1} = \frac{h}{2} f_1 \tag{3.19}$$

을 구하여 사용하도록 한다. 식 (3.17)로부터 식 (3.18)까지의 관계를 이용하여 함수 $g(t)$의 블록 펄스 계수를 다음과 같은 벡터 형태로 표시하는 것이 가능하다.

$$g(t) \doteq [\ \overline{g_1}\ \ \overline{g_2}\ \cdots\ \overline{g_m}\ ]\ \boldsymbol{\Phi}(t) = [\ f_1\ \ f_2\ \cdots\ f_m\ ]\ \overline{\boldsymbol{P}}\ \boldsymbol{\Phi}(t) \tag{3.20}$$

여기서 행렬 $\overline{\boldsymbol{P}}$는 다음의 식 (3.21)로 주어지게 되며, 식 (3.7)에 보이는 상용 연산 행렬 $\boldsymbol{P}$의 성능을 개선한 것이다.

식 (3.21)과 같은 개선된 적분 연산 행렬 $\overline{\boldsymbol{P}}$를 이용하여서, 함수 $f(t)$의 적분을 다음의 식 (3.22)와 같이 쉽게 표시할 수 있다[8].

$$\overline{\boldsymbol{P}} = \frac{h}{2}\begin{bmatrix} 1 & \frac{13}{6} & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & \frac{5}{6} & \frac{13}{6} & \cdots & 2 \\ 0 & 0 & \frac{5}{6} & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{5}{6} \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

$$\int_0^t f(t)\,dt \doteq \boldsymbol{F}^T \overline{\boldsymbol{P}}\ \boldsymbol{\Phi}(t) \tag{3.22}$$

3.3 개선된 블럭 펄스 적분 연산 행렬

식 (3.21)과 같이 구한 새로운 적분 행렬은 식 (3.18)과 식 (3.19)의 연산을 수행하는 과정에서 오차를 포함하게 되는데, 이것은 연산을 수행하기 위한 정보가 부족하기 때문에 발생하는 것이다. 이러한 오차를 보정하기 위해서, 연산 행렬의 대각 원소들의 배치 상태를 이용하여 다음 항에 있는 값을 원래의 값 대신에 사용함으로써 이와 같은 문제를 해결할 수 있게 된다. 식 (3.21)의 행렬을 보정하면 다음의 식 (3.23)과 같게 된다[8].

$$\widetilde{\boldsymbol{P}} = \frac{h}{2}\begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{13}{6} & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & \frac{5}{6} & \frac{13}{6} & \cdots & 2 \\ 0 & 0 & \frac{5}{6} & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{5}{6} \end{bmatrix} \tag{3.23}$$

개선된 적분 연산 행렬 $\widetilde{\boldsymbol{P}}$를 사용하였을 때 얻을 수 있는 효과는 다음의 적용 예에서 확인할 수 있다.

4. 이차 보간 다항식을 이용한 일반형 블럭 펄스 적분 연산 행렬 유도

4.1 기존의 일반형 블럭 펄스 적분 연산 행렬

거듭되는 적분으로 인한 적분 연산 행렬의 거듭 제곱 문제와 이로 인한 오차의 누적 문제를 해결하기 위하여 Wang은 적분의 수에 따라서 새로운 적분 연산 행렬을 만들어 내는 일반형 적분 연산 행렬을 고안하였다[9]. 하나의 블럭 펄스 함수 $\phi_i(t)$에 대하여 k번 적분을 수행하는 경우라면, Cauchy의 적분 형식[13]에 의하여 다음과 같은 식 (4.1)로 변형하는 것이 가능하다.

$$\underbrace{\int_0^t \cdots \int_0^t}_{k\text{ 번}} \phi_i(t)\,dt \cdots dt = \frac{1}{(k-1)!}\int_0^t (t-\tau)^{k-1}\phi_i(\tau)\,d\tau \tag{4.1}$$

식 (4.1)을 라플라스 변환하면 다음의 식 (4.2)와 같게 되고,

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}\left\{\frac{1}{(k-1)!}\int_0^t (t-\tau)^{k-1}\phi_i(\tau)\,d\tau\right\} \\ &= \frac{1}{(k-1)!}\cdot\mathcal{L}\{t^{k-1}\}\cdot\mathcal{L}\{\phi_i(t)\} \\ &= \frac{1}{(k-1)!}\cdot\frac{(k-1)!}{s^k} \\ &\qquad\cdot\frac{1}{s}\left(e^{-(i-1)hs}-e^{-ihs}\right) \\ &= \frac{1}{s^{(k+1)}}\left(e^{-(i-1)hs}-e^{-ihs}\right) \end{aligned} \tag{4.2}$$

따라서 하나의 블럭 펄스 함수 $\phi_i(t)$에 대한 k번 적분은 다음의 식 (4.3)과 같이 구할 수 있게 된다(단, $\mu(t)$는 단위 계단 함수).

$$\begin{aligned} &\underbrace{\int_0^t \cdots \int_0^t}_{k\text{ 번}} \phi_i(t)\,dt \cdots dt \\ &= \frac{1}{k!}(t-(i-1)h)^k\mu(t-(i-1)h) \\ &\quad -(t-ih)^k\mu(t-ih) \end{aligned} \tag{4.3}$$

첫 번째 블럭 펄스 함수 $\phi_1(t)$에 대한 k번 적분 함수를 블럭 펄스 급수 전개하면 다음의 식 (4.4)과 같이 표시되고,

$$\underbrace{\int_0^t \cdots \int_0^t}_{k\text{ 번}} \phi_i(t)dt \cdots dt \doteq (c_1\ c_2\ \cdots\ c_m)\boldsymbol{\Phi}(t) \tag{4.4}$$

블럭 펄스 계수 c_j(단, $j=1, 2, \cdots, m$)는 다음의 식 (4.5)와 같이 표시된다.

$$c_j = \frac{1}{h}\int_0^T \frac{1}{k!}\left(t^k\mu(t)-(t-h)^k\mu(t-h)\right)\psi_j(t)dt$$
$$= \frac{1}{h}\int_{(j-1)h}^{jh} \frac{1}{k!}\left(t^k\mu(t)-(t-h)^k\mu(t-h)\right)dt$$
$$= \begin{cases} \dfrac{h^k}{(k+1)!}, & j=1 \\ \dfrac{h^k}{(k+1)!}\left(j^{k+1}-2(j-1)^{k+1}+(j-2)^{k+1}\right), & j=2,\ 3,\ \cdots,\ m \end{cases} \tag{4.5}$$

다른 블럭 펄스 함수들에 대하여서도 이와 같은 관계가 성립하므로, m개의 블럭 펄스 함수에 대한 k번 적분에 대한 블럭 펄스 급수는 다음의 식 (4.6)과 같은 행렬 형태로 표현될 수 있다.

$$\underbrace{\int_0^t \cdots \int_0^t}_{k\text{ 번}} \psi_i(t)\,dt \cdots dt \doteq \boldsymbol{P}_k \boldsymbol{\Phi}(t) \tag{4.6}$$

$$\boldsymbol{P}_k = \frac{h^2}{(k+1)!}\begin{bmatrix} p_{k,1} & p_{k,2} & p_{k,3} & \cdots & p_{k,m} \\ 0 & p_{k,1} & p_{k,2} & \cdots & p_{k,m-1} \\ 0 & 0 & p_{k,1} & \cdots & p_{k,m-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p_{k,1} \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

단, $p_{k,j} = \begin{cases} 1, & j=1 \\ j^{k+1}-2(j-1)^{k+1}+(j-2)^{k+1}, & j=2,\ 3,\ \cdots,\ m \end{cases}$

식 (4.7)로 주어진 일반형 적분 연산 행렬을 이용하면, 함수 $f(t)$의 다중 적분에 대한 블럭 펄스 급수는 다음의 식 (4.8)와 같은 형태로 표현될 수 있다.

$$\underbrace{\int_0^t \cdots \int_0^t}_{k\text{ 번}} f(t)\,dt \cdots dt \doteq \boldsymbol{F}^T \boldsymbol{P}_k \boldsymbol{\Phi}(t) \tag{4.8}$$

4.2 이차 보간 다항식을 이용한 새로운 블럭 펄스 적분 연산 행렬 유도

일반형 적분 연산 행렬을 유도하기 위하여 우선 2회 적분에 대한 경우를 고려하면, 적분 연산 행렬은 다음과 같은 단계를 거쳐 구할 수 있게 된다.

(i) 식 (3.23)으로 표현된 적분 연산 행렬의 모양을 변형하여 다음과 같은 형식으로 만든다.

$$\widetilde{\boldsymbol{P}} = \frac{h}{2}\begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{13}{6} & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & \frac{5}{6} & \frac{13}{6} & \cdots & 2 \\ 0 & 0 & \frac{5}{6} & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{5}{6} \end{bmatrix}$$
$$= h\begin{bmatrix} \frac{5}{12} & \frac{13}{12} & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \frac{5}{12} & \frac{13}{12} & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \frac{5}{12} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{5}{12} \end{bmatrix} = h\boldsymbol{A} \tag{4.9}$$

(ii) 식 (4.9)에 있는 행렬 $\boldsymbol{A}$의 전치 행렬을 구한다.

$$\boldsymbol{A}^T = \begin{bmatrix} \frac{5}{12} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{13}{12} & \frac{5}{12} & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \frac{13}{12} & \frac{5}{12} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & \frac{5}{12} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} [\frac{5}{12} & 0 & 0 & \cdots & 0] \\ [\frac{13}{12} & \frac{5}{12} & 0 & \cdots & 0] \\ [1 & \frac{13}{12} & \frac{5}{12} & \cdots & 0] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [1 & 1 & 1 & \cdots & \frac{5}{12}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 \\ \boldsymbol{A}_2 \\ \boldsymbol{A}_3 \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_m \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

(iii) 변형된 행렬 $\boldsymbol{A}$를 구성하는 행벡터들은 각각 블럭 펄스 급수의 동일 계수들에 해당하는 부분들이 되므로, 식 (4.40)의 관계를 적용하면 다음과 같은 행렬 $\boldsymbol{B}^T$를 구할 수 있게 된다.

$$\boldsymbol{B}^T = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_1 \\ \boldsymbol{B}_2 \\ \boldsymbol{B}_3 \\ \vdots \\ \boldsymbol{B}_m \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

단, $\boldsymbol{B}_1 = \frac{5}{12}\boldsymbol{A}_1$ (4.12a)

$$B_2 = \frac{13}{12} A_1 + \frac{5}{12} A_2 \tag{4.12b}$$

$$B_3 = A_1 + \frac{13}{12} A_2 + \frac{5}{12} A_3 \tag{4.12c}$$

$$\vdots$$

$$B_m = A_1 + A_2 + \cdots + A_{m-2} + \frac{13}{12} A_{m-1} + \frac{5}{12} A_m \tag{4.12d}$$

(iv) 식 (4.12)로 구해진 행렬의 전치 행렬을 구하고, 이 행렬에 2회 적분을 의미하는 상수 h^2을 곱한다.

이와 같은 관계를 k번 적분한 경우로 확장하여 생각해 보면, 다음의 절차에 따라서 계수를 보정한 새로운 일반형 적분 연산 행렬 $\widetilde{P}_k$를 구할 수 있게 된다.

(1) 식 (4.9)부터 식 (4.13)까지의 과정을 $k-1$번 반복한다.
(2) 결과로 얻어진 행렬의 전치 행렬을 구한다.
(3) 결과 행렬에 h^k를 곱한다.

5. 시뮬레이션

본 연구에서 유도한 새로운 블럭 펄스 적분 연산 행렬의 성능을 시험하여 보기 위해서, 임의의 함수 $f(t) = 12t^2$을 적분 구간 $t \in [0, 1)$에서 전개 항수를 4로 하여서 2회 적분한 경우에 대한 블럭 펄스 급수의 계수 추정 결과를 비교하여 보도록 한다.

우선 실제 적분을 이용하여 정확한 값을 구하고, 기존에 사용하던 상용 적분 연산 행렬을 이용하는 경우, Wang이 유도한 적분 연산 행렬을 사용하는 경우, 그리고 본 연구에서 새로 유도한 적분 연산 행렬을 이용하는 경우를 비교하여 보도록 한다.

우선 주어진 함수 $f(t) = 12t^2$에 이차 보간 다항식을 적용하여 구한 블럭 펄스 급수 계수값은 다음의 식 (5.1)과 같으며,

$$f(t) = [\,0.3125 \quad 1.7500 \quad 4.7500 \quad 9.2500\,]\,\boldsymbol{\Phi}(t) \tag{5.1}$$

기존에 사용하던 근사화 방식을 사용한 경우의 블럭 펄스 급수 계수값은 다음의 식 (5.2)와 같다.

$$f(t) = [\,0.3750 \quad 1.8750 \quad 4.8750 \quad 9.3750\,]\,\boldsymbol{\Phi}(t) \tag{5.2}$$

주어진 함수 $f(t)$를 실제로 두 번 적분한 함수를 $w_i(t)$라고 하는 경우에는 다음의 식 (5.3)과 같이 블럭 펄스 급수 계수를 구할 수 있게 된다.

$$w_i(t) = \int\int f(\tau)\,d\tau\,d\tau$$
$$= [0.00078125 \; 0.02421875 \; 0.16484375 \; 0.61015625]\,\boldsymbol{\Phi}(t) \tag{5.3}$$

5.1 평균값 근사 방식 적분 연산 행렬을 사용하는 경우

적분 연산 행렬 P를 이용하여 주어진 함수 $f(t)$를 두 번 적분한 함수를 $w_c(t)$라고 하는 경우의 블럭 펄스 계수는 다음의 식 (5.4)와 같다.

$$w_c(t) = \int\int f(\tau)\,d\tau\,d\tau$$
$$= \boldsymbol{F}^T P^2\,\boldsymbol{\Phi}(t)$$
$$= [0.00585938 \; 0.05273438 \; 0.24023438 \; 0.75585938]\,\boldsymbol{\Phi}(t) \tag{5.4}$$

Wang이 유도하였던 일반형 적분 연산 행렬 P_k(단, k는 적분 횟수)을 이용하여 주어진 함수 $f(t)$를 두 번 적분한 함수를 $w_g(t)$라고 하는 경우의 블럭 펄스 계수는 다음의 식 (5.5)와 같게 된다.

$$w_g(t) = \int\int f(\tau)\,d\tau\,d\tau$$
$$= \boldsymbol{F}^T P_2\,\boldsymbol{\Phi}(t)$$
$$= [0.00390625 \; 0.04296875 \; 0.21484375 \; 0.70703125]\,\boldsymbol{\Phi}(t) \tag{5.5}$$

5.2 새로운 적분 연산 행렬을 사용하는 경우

앞서 유도한 새로운 적분 연산 행렬 $\overline{P}$를 사용하여 주어진 함수 $f(t)$를 두 번 적분한 함수를 $w_u(t)$라고 하는 경우의 블럭 펄스 계수는 다음의 식 (5.6)과 같다.

$$w_u(t) = \int\int f(\tau)\,d\tau\,d\tau$$
$$= \boldsymbol{F}^T \overline{P}^2\,\boldsymbol{\Phi}(t)$$
$$= [0.00488281 \; 0.03838433 \; 0.19110786 \; 0.64811198]\,\boldsymbol{\Phi}(t) \tag{5.6}$$

앞서 유도한 새로운 일반형 적분 연산 행렬 $\overline{P}_k$를 이용하여 주어진 함수 $f(t)$를 두 번 적분한 함수를 $w_{new}(t)$라고 하는 경우의 블럭 펄스 계수는 다음의 식 (5.7)과 같게 된다.

$$w_{new}(t) = \int\int f(\tau)\,d\tau\,d\tau$$
$$= \boldsymbol{F}^T \overline{P}_2\,\boldsymbol{\Phi}(t)$$
$$= [0.00488281 \; 0.03833433 \; 0.19110786 \; 0.64811198]\,\boldsymbol{\Phi}(t) \tag{5.7}$$

앞서 유도하여 원소를 보정한 새로운 일반형 적분 연산 행렬 $\widetilde{P}_k$를 이용하여 주어진 함수 $f(t)$를 두 번 적분한 함수를 $w_{new-mod}(t)$라고 하는 경우의 블럭 펄스 계수는 다음의 식 (5.8)과 같게 된다.

$$w_{new-mod}(t) = \int\int f(\tau)\,d\tau\,dt$$
$$= F^T \widetilde{P}_2\, \Phi(t)$$
$$= [0.00339084\ 0.03662109\ 0.18948025\ 0.64648438]\,\Phi(t) \quad (5.8)$$

식 (5.3)부터 식 (5.8)까지를 비교하여 보면, 본 연구에서 제안한 일반형 적분 연산 행렬을 이용하는 경우의 정확성이 더 높다는 것을 알 수 있다. 이 결과를 정리하여 비교하여 보면, 다음의 표 5.1과 같다.

표 5.1에서 보는 바와 같이, 적분이 거듭되는 경우에는 일반적으로 사용하는 상용 적분 연산 행렬 P나 3장에서 유도한 적분 연산 행렬 $\overline{P}$, 혹은 Wang이 유도한 일반형 적분 연산 행렬 P_k를 이용하는 것보다 본 논문에서 새로 유도한 일반형 적분 연산 행렬 $\widetilde{P}_k$를 이용하는 것이 실제값에 훨씬 더 근사함을 알 수 있다.

표 5.1 4항 전개시의 블럭 펄스 급수 계수(m=4)
Table 5.1 Block Pulse series coefficients(m=4)

항	실제값	P^2 이용	$\overline{P}^2$ 이용	P_2 이용	$\widetilde{P}_2$ 이용
1	0.00078125	0.005859375	0.00488281	0.00390625	0.00339084
2	0.02421875	0.052734375	0.03838433	0.04296875	0.03662109
3	0.16484375	0.240234375	0.19110786	0.21484375	0.18948025
4	0.61015625	0.755859375	0.64811198	0.70703125	0.64648438

또한 8항 전개를 하였을 경우의 결과는 그림 5.1과 같다.

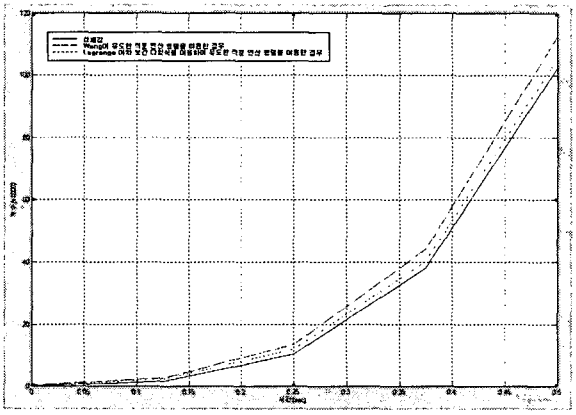

그림 5.1 8항 전개시의 블럭 펄스 계수(m=8)
Fig. 5.1 Block Pulse series coefficients(m=8)

6. 결 론

본 논문에서는 오차를 줄이기 위하여 Lagrange 이차 보간 다항식을 이용하는 새로운 블록 펄스 급수 계수 추정 기법을 제안하였고, 이를 확장하여 기존의 블럭 펄스 적분 연산 행렬보다 오차가 적은 새로운 적분 연산 행렬을 소개하였다. 또한 적분 연산 행렬의 원소를 보정하여 개선된 적분 연산 행렬을 제안하고 이를 확장하여 새로운 일반형 블럭 펄스 적분 연산 행렬을 유도하였으며, 시뮬레이션을 통하여 Wang이 유도한 일반형 적분 연산 행렬보다 오차가 적음을 확인하였다. 이를 이용하여 향후 다중 적분 형식으로 표현된 선형계 및 비선형계 시스템의 해석 및 상태 추정 문제에 응용할 수 있을 것으로 사료된다.

감사의 글

이 논문은 2002학년도 삼척대학교 자체학술연구조성비에 의해 연구되었음

참 고 문 헌

[1] M. S. Corrington, "Solution of Differential and Integral Equations with Walsh Functions", IEEE Trans. Circuit Theory, vol.20, pp.470-476, 1973

[2] Chen. C. F., Tsay, Y. T. and Wu, T. T., "Walsh Operational Matrices for Fractional Calculus and Their Application to Distributed Systems", J. Franklin Inst., vol.303. pp.267-284, 1977

[3] K. R. Palanisamy and V.P. Arunachalam, "Analysis of Vibrating System via Walsh Series Approach", Int. J. Systems Sci., Vol.18, No.8, pp. 1457-1466, 1987

[4] K. R. Palanisamy, "Analysis and Optimal Control of Linear Systems via Single Term Walsh Series Approach", Int. J. Systems Sci., Vol. 12, No. 4, pp. 541-547, 1985

[5] C. F. Chen and C. H. Hsiao, "Walsh Series Analysis in Optimal Control," Int. J. Control, Vol.21, pp. 881-897, 1975

[6] 김태훈, 김진태, 정제욱, 심재선, "개선된 블록 펄스 계수 추정 기법을 이용한 선형 시불변계의 상태 추정에 관한 연구", 전기학회논문지, 제51D권 제4호, pp137-143, 2002

[7] 김태훈, 이해기, 정제욱, "Lagrange 이차 보간 다항식을 이용한 개선된 적분 연산 행렬에 관한 연구", 전기학회논문지, 제51D권 제7호

[8] 김태훈, 이해기, "Lagrange 이차 보간 다항식을 이용한 블록 펄스 급수 추정", 전기학회논문지, 제51D권 제6호, pp235-240, 2002

[9] C. H. Wang, "Generalized Block Pulse Operational Matrices and Their Applications to Operational Calculus", Int. J. Control, Vol. 36, pp. 67-76

[10] C. F. Chen and C. H. Hsiao, "Design of Piecewise Constant Gains for Optimal Control via Walsh Functions," IEEE Trans. Automatic Control, Vol.20, pp. 596-602, 1975

[11] S. Omatu, "Optimal Sensor Location Problem for a Linear Distributed Parameter Systems", IEEE Trans.

Automatic Control, Vol.23, pp.665-673, 1978
[12] 안두수, 제어 시스템 해석을 위한 직교함수와 응용, 복두 출판사, 1997
[13] 정상권, 이승래, 권욱현, CEMTool 수치해석, 도서출판 한산, 2000
[14] J. Douglas Faires and Richard L. Burden, Numerical Analysis, PSW publishing company, 1993
[15] 김창근, 수치해석, 교우사, 1997

저 자 소 개

심 재 선(沈 在 先)

1950년 7월 23일생. 1973년 성균관대학교 공대 전기공학과 졸업. 1979년 단국대학교 대학원 전기전자 및 컴퓨터 공학과 졸업(석사). 1989년 성균관대학교 대학원 전기전자 및 컴퓨터 공학과 졸업(박사). 1975년~현재 삼척대학교 전기공학과 교수
Tel : (033) 570-6340
E-mail : myongo@samcheok.ac.kr

김 태 훈(金 泰 勳)

1971년 2월 1일 생. 1995년 성균관대학교 공대 전기공학과 졸업. 1997년 성균관대학교 대학원 전기공학과 졸업(석사). 2002년 동 대학원 전기전자 및 컴퓨터 공학과 졸업(박사). 2002년~현재 한국정보보호진흥원 선임연구원
Tel : (031) 290-7167
E-mail : taihoon@kisa.or.kr