

## 수학과 오류의 진단과 처방에 관한 교사용 자료 개발 연구<sup>1)</sup>

김 수 미\*

본 연구는 수학 학습 과정에서 빈번하게 유발되는 학습자의 오류를 교사들이 간편하고 정확하게 진단하고 처방하는데 도움을 줄 수 있는 교사용 자료 개발의 필요성을 제안하고, 이를 통해 이 분야의 연구를 진작시키고자 한다. 이를 위해 수학과 오개념 및 오류 관련 연구들을 종합 분석하여, 이를 토대로 교재개발의 첫 번째 단계라 할 수 있는 교재의 구성요소 및 체제를 제안하였다. 본 연구에서는 교사용 교재의 구성 요소로 (1)오류 유형 및 유형별 빈도수, (2)오류 진단지, (3)오류 원인 (4)예방 아이디어 (5)지도 아이디어 (6)연습지 (7)성취도 검사지 등의 7가지를 추출하였으며, 각 요소별로 현재까지의 연구 상황 및 미래 연구 방향을 제안하고 있다.

### I. 들어가며

학생들이 수학 학습과정에서 범하는 오류가 일회성 실수에 의한 것이라기보다는 체계적 오해나 오개념에서 비롯된 것이라는 주장이 설득력을 얻으면서, 이에 대한 연구가 지난 수 십년간 꾸준히 진행되어 왔다. 구미의 경우는 1920년대부터 이 분야의 연구가 시작되었으며, 최근까지도 연구자들의 지속적인 관심거리가 되고 있다. 특히 뻔셈의 경우는 연구가 종료되었다고 할 정도로 방대한 연구가 진행되어 왔으며(Maurer, 1987), 이제 교사들은 수업에 임하기도 전에 자신의 학생들이 어떤 오류를 범하게 될지를 알 수 있게 되었으며, 그에 대응하는 예방과 조치를 계획할 수 있게 되었다. 국내의 경우는 1970년대 중반부터 초등 분야에서

계산영역을 중심으로 연구되어 왔으나(김종태, 1975; 이종문, 1983; 김추일, 1984; 윤여운, 1991 등), 최근에는 중등분야에서 보다 폭넓은 주제를 가지고 활발하게 연구되고 있다(노수진, 2000; 차승진, 2001; 나귀수, 2001; 박선화, 2002; 정순진, 2002 등).

구성주의적 관점에서 보면, 오개념의 형성은 인식의 과정에서 자연스럽게 발생하는 보편적인 현상이지만, 한번 형성된 이후에는 쉽게 다른 것으로 대체되지 않는 특징을 가지고 있다. 따라서 최선의 방법은 교사가 이를 사전에 명확하게 자각하여 오개념이 발생하지 않도록 예방 조치를 취하는 것이다. 그 다음 방법은 학생의 오개념을 진단하고, 오개념을 교정하기 위한 방안을 강구하는 것이다. Brown과 Burton (1978)은 학생의 실수에서 기인한 빈약한 증거로부터 학생의 오개념에 대한 정확한 실체를

\* 경인교육대학교(smkim@gin.ac.kr)

1) 본 연구는 2002년도 경인교육대학교 과학교육연구소 연구과제임.

파악하는 것을 교사의 탁월한 능력 중의 하나로 간주하였다. 오류 유형에 대한 풍부한 지식은 교사로 하여금 오류 원인에 따른 정확한 피드백을 학생들에게 제공해 주도록 하며, 오개념을 유발하는 교수법을 반성하고 수정하도록 할 것이다. 따라서 어떤 식으로든 교사는 학생의 오개념에 대해 민감해야 하며, 이를 위해선 오개념 및 오류에 관련된 정보를 교사들이 쉽게 이해하고 활용할 수 있는 형태로 교사용 자료가 개발되어야 할 것이다.

교육연구의 궁극적 목적이 교육의 질을 향상시키는 것이고 볼 때, 한 분야의 연구 결과가 교사들에게 직접 전달될 수 있는 형태로 개발된다는 것은 교육적으로 매우 가치있는 일이다. 그러나 성급한 교재화는 돌이킬 수 없는 부정적인 결과를 초래할 수도 있기 때문에, 교재화에 앞서 기초연구의 축적이 선행되도록 노력해야 할 것이다. 이에 따라 본 연구에서는 국내외적으로 연구결과가 축적된 초등의 계산 영역을 중심으로, 교사용 자료가 갖추어야 할 기본 요소를 고찰해 봄으로써, 이 분야의 연구자들에게 미래 연구의 방향을 제안하고자 한다.

## II. 교사용 자료의 체제 및 구성 요소

### 1. 자료의 구성 요소 선정 및 배열

교사용 자료에 어떤 요소들이 어떤 식으로 구성되어야 하는가를 결정하기 위해서는 오류를 지닌 아동을 진단하고 처방하는 일이 실제로 어떤 단계로 진행되는가를 참고할 필요가 있다. 관련 문헌을 찾지 않더라도 대략 3가지 과정을 생각해 볼 수 있다. 우선 아동의 오류를 진단하는 과정, 다음은 진단된 오류를 처방하는 과정, 마지막으로 오류가 교정되었는지 확

인하는 과정이다. 보다 세부적인 단계를 알기 위해서는 Enright, Gable, 그리고 Hendrickson (1988)이 연산의 오류 진단과 처방을 위해 제안한 아래의 9단계 모델을 참고할 수 있다. 이 모델 역시 기본적으로는 진단(1, 2, 3단계), 처방(4, 5, 6, 7단계), 평가(8, 9단계)라는 3가지 과정으로 구성되어 있다.

- 1단계: 학습자들의 계산 자료 확보
- 2단계: 학생 면담을 통해 문제해결 과정 분석
- 3단계: 오류 분석 및 오류 유형 규명
- 4단계: 중요하고 두드러진 오류를 선택하여 학생에게 명확히 보여줌
- 5단계: 정확한 해결방법, 절차 혹은 과정을 보여줌
- 6단계: 정확한 문제해결 전략 선정
- 7단계: 적절한 연습
- 8단계: 숙달 기준 설정
- 9단계: 수행 정도 평가

이제 위와 같은 각 단계를 순차적으로 밟아갈 때, 교사들의 노고를 줄이면서 올바른 판단과 적절한 선택을 하도록 도움을 줄 만한 요소로는 어떤 것이 있는지 살펴보기로 한다. 우선 1단계에서는 학습자들의 계산 자료를 확보하기 위한 오류 진단지가 필요하다. 오류 분야의 연구에서 밝혀진 사실 가운데 하나는 학교 시험과 같은 일반적인 시험으로는 학생들의 다양한 오류가 표출되지 않는다고 한다. 따라서 교사용 교재에 포함된 오류 진단지는 학생들의 오류에 관한 실제적인 정보를 제공하는 형태로 개발·제시되어야 할 것이다.

2단계와 3단계는 1단계에서 수집된 정보를 바탕으로 오류의 유형 및 원인을 분석하는 단계이므로, 기존 연구를 통해 밝혀진 일반적인 오류 유형 목록 및 원인 목록이 가급적 자세하고 체계적으로 제시되어야 한다. 또한 오류 유형별 빈도수는 대표적인 오류 유형이 무엇인지

를 알려주기 때문에, 교사들에게 수업의 소재를 제공할 뿐만 아니라 자신의 수업을 반성하는 기회를 제공한다.

4단계, 5단계, 6단계는 전 단계에서 진단된 오류 유형에 따라 처방을 하는 단계로, 오류 교정에 효과적인 지도 아이디어가 다양하게 포함된 자료가 요구된다. 오류의 유형이나 원인이 다양한 만큼, 오류의 교정도 다양한 방식으로 접근되어야 한다. 최근 학습자 중심의 다양한 수학교수법이 개발·제시되고 있기 때문에 이들을 적절히 활용한다면 지도의 효율성을 높일 수 있을 것이다.

7단계는 전 단계에서 교정된 개념이나 절차가 연습되는 단계이다. 특히 학습부진 아동의 경우는 이 단계에서 충분한 연습이 주어져야 하는데, 이를 위해서는 절차나 기능 연마를 위한 연습지가 필요하다.

8단계는 오류가 확실하게 교정되었는지를 점검하는 단계이다. 이 단계 역시 1단계에서 주어진 오류 검사지와 유사한 형태의 성취도 검사지가 필요하다.

이외에도 추가적으로 생각할 수 있는 것은 오류의 예방에 관련된 아이디어이다. 일반적으로 알려진 사실은 오개념이나 오류가 한번 형성되고 나면 쉽게 교정되지 않기 때문에, 이들이 형성되지 않도록 사전에 주의를 기울이는 노력이 요구된다(Anderson, 1986). 따라서 교사용 교재에는 오개념이나 오류가 사전에 방지되도록 교사가 지도시 어떤 부분에 주의를 두어야 하는가에 대한 예방 아이디어가 포함되는 것이 바람직하다.

이상으로 오류의 진단과 처방 과정에서 교사에게 도움이 될만한 8가지 요소-오류 진단지, 오류 유형, 오류 유형별 빈도수, 오류 원인, 지

도 아이디어, 연습지, 성취도 검사지, 예방 아이디어-를 추출하였다. 여기서 오류 유형과 오류 유형별 빈도수는 성격이 유사하므로, 본 연구에서는 이들을 한데 묶어 모두 7가지 요소를 교재의 구성요소로 재설정하였다.

요소들의 배열은 앞에서 이미 언급되었듯이 진단, 처방, 평가의 순을 따르도록 하였으나, 교사들이 학생들의 계산 자료를 확보하기 전에 오류 유형에 대해 알고 있어야 한다고 판단되어, 교재의 첫 부분에 위치하도록 하였다. 또한 예방이 처방에 우선되어야 한다는 취지에서 예방 아이디어를 지도 아이디어 앞에 두었다. 이상으로 본 연구에서 제안하는 교사용 교재의 기본 요소 및 배열을 정리하면 아래와 같다.

#### 진단 과정

- ① 오류의 유형 및 유형별 발생 빈도
- ② 오류 진단지
- ③ 오류의 원인

#### 처방 과정

- ④ 예방 아이디어
- ⑤ 지도 아이디어
- ⑥ 연습 문제

#### 평가 과정

- ⑦ 성취도 검사지

본 연구에서 제안하는 7가지 구성 요소나 배열은 절대적인 것이라 할 수 없다. 따라서 교재의 성격에 따라 여기에 한두 가지 요소를 침삭하거나 통합할 수 있겠지만, 교재의 활용도를 높이기 위해서는 가급적 다양한 요소들이 교재에 포함되어 교사가 필요에 맞게 취사선택하여 사용할 수 있도록 하는 것이 바람직할 것이다. 다음 절에서는 7가지 구성 요소들을 개별적으로 살펴보기로 한다.

## 2. 구성 요소의 성격 및 내용

### 가. 오류 유형 및 유형별 발생 빈도

교사가 학생이 범하는 일반적인 오류 유형을 사전에 숙지한다면, 내용을 가르치는 과정에서 혹은 잘못된 지식을 교정해 주는 과정에서 많은 도움을 얻을 수 있을 것이다. 이런 점에서 오류 유형은 교사용 교재의 가장 중요한 구성 요소 중의 하나로 간주되어야 한다. 뿐만 아니라 각 유형에 대한 발생빈도는 교사로 하여금 어떤 것에 특히 주의를 두어야 하며, 어떤 것은 무시해도 되는지에 대한 실제적인 정보도 아울러 제공한다. 실제로 오류 유형에 대한 대부분의 연구는 오류 유형과 더불어 유형별 발생 빈도를 아울러 제시하고 있다.

수학과와 오류 유형에 대해서는 학자마다 여러 가지 방식을 제시하고 있으나, 본 연구에서는 특정 수학 내용에 한정된 것인지 아니면 수학의 내용에 관계없이 보편적으로 적용할 수 있는지에 따라 전자는 영역제한적 분류 방식으로, 후자는 범영역적 분류 방식으로 구분하였다. 오류 유형에 대한 이와 같은 두 가지 관점은 차후 교사용 교재 개발을 위해 적합한 오류 분류 방식이 무엇인가를 생각해 보게 함으로써, 미래연구의 시사점을 얻기 위한 것이다.

먼저 Hadar와 zaslavsky(1987)가 제시한 아래의 수학과 오류 유형을 살펴보면, 자료를 잘못 이용하거나 용어를 잘못 해석하는 일 등은 수학 수행 전반에 걸쳐 발생할 수 있는 것이므로, 이 분류 방식은 범영역적 분류 방식이라 하겠다.

- ① 잘못 이용된 자료      ② 잘못 해석된 용어
- ③ 논리적으로 부적절한 추론
- ④ 곡해된 정리와 정의
- ⑤ 논증되지 않은 풀이      ⑥ 기술적 오류
- ⑦ 풀이 과정의 생략      ⑧ 애매모호한 오류

또한 이 연구에서는 2년 연속 이스라엘 고등학생들을 대상으로 각 오류 유형에 대한 발생 빈도를 조사하였는데, ④곡해된 정리와 정의(32-34%), ⑥기술적 오류(25-27%), ①잘못 이용된 자료(20-22%)순으로 학생들이 오류를 범하는 것으로 나타났다. 이 결과는 수학학습과정에서 발행하는 학생들의 오류가 주로 개념이나 절차에 대한 잘못된 이해로부터 비롯된다는 것을 암시한다.

한편 Clements(1980)와 Newmann(1981)은 문제해결 과정에서 발생할 수 있는 오류의 유형을 다음과 같이 제시하였는데, 수학의 내용과 관계없이 일반적인 문제해결 상황에서 폭넓게 적용할 있다는 점에서 보면 범영역적 분류 방식이라 하겠다.

- ① 수학 읽기오류      ② 이해오류
- ③ 변환오류      ④ 처리기술오류
- ⑤ 기록오류      ⑥ 부주의

이 연구에서도 호주 5-7학년을 대상으로 각 오류 유형에 대한 발생 빈도를 조사하였는데, 그 결과 ④처리기술 오류(26-32%)가 가장 높게 나타났으며, 다음으로는 ③변환 오류(12-27%)와 ⑥부주의(22-28%)가 기록되었다. 처리기술오류란 사칙계산이나 대수적 조작과 관련된 기술적 오류로서 학생들이 절차적 지식과 관련하여 많은 문제점을 가지고 있음을 시사한다.

이상으로 범영역적 오류 분류 방식을 살펴본 바에 의하면, 이 방식은 일반적인 한두 가지 방식으로 학습자의 수학수행 전반을 설명할 수 있다는 장점이 있지만, 교사들이 일반적인 규칙을 특정 수학 내용에 매번 적용해야하는 부담이 생기며, 특정 수학 토픽에 대한 지도의 시사점을 얻기 어렵다는 단점이 있다.

한편 '계산' 영역에서 제시된 대부분의 오류 유형은 영역제한적이라 할 수 있다. 계산 오류

유형에 대한 최초의 연구는 아마도 Smith(1917)의 것으로 보이는데, 그는 5-7학년 학생 88명을 대상으로 다양한 산술 문제를 풀게 한 후, 학생들이 범한 오류를 통해 다음 5가지 오류 유형을 제안한 바 있다(Bricken, 1987, 재인용).

- ① 부정확한 계산
- ② 받아올림 및 받아내림 오류
- ③ 다음 단계로 잘못 넘어가기
- ④ 기호에 의한 오류
- ⑤ 알고리즘 지식 부족

이것은 계산이라는 한 영역에 국한된 것이지만 자연수, 분수, 소수, 그리고 그와 관련된 사칙계산을 포괄하는 다소 일반적인 분류방식이라 할 수 있다. 그러나 자연수의 뺄셈과 관련하여 Brown과 Burton(1978)이 제안한 것은 보다 영역제한적이다. 그들은 4, 5, 6학년 아동 1325명을 대상으로 뺄셈 수행을 조사하여, 14가지의 대표적인 뺄셈 오류 유형을 추출하였으며, 각 유형에 대한 발생 빈도도 아울러 제시하였다(표-1). 예를 들어 가장 높은 빈도를 기록한 ①Borrow/From/Zero 오류는 103-45와 같이 피감수에 0이 들어있고 받아내림을 해야하는 상황에서 0에서 받아내림을 하여 158을 답으로 내는 경우이다. 다음으로 높은 빈도를 기록한 ②Smaller/From/Larger 오류는 무조건 각 열의 큰 수에서 작은 수를 빼는 경우이다. 따라서 이런 오류 유형을 가진 아동은 받아내림을 해야하는 상황에서도 받아내림을 하지 않고 무조건 큰 수에서 작은 수를 빼는 식으로 답을 내게 된다.

Brown과 Burton(1978)이 제안한 오류 유형은 아동의 뺄셈 수행에 대한 매우 세밀한 묘사를 하고 있다. 따라서 교사의 입장에서 보면, 뺄셈 지도를 하기도 전에 아동들이 대략 어떤 오류를 범하게 될지를 알 수 있기 때문에, 오류를 유발할지도 모를 자신의 지도 방법을 반성하고 점검함으로써 예방 및 처방에 보다 많은 주의를 기울이도록 한다. 그러나 이 같은 오류 유형은 뺄셈 이외의 영역에 대해서는 일반화가 불가능하므로, 가르쳐야 할 내용이 바뀌면 교사가 새로운 오류 유형을 또다시 익혀야 하는 부담이 생기게 된다.

이상으로 오류 유형을 범영적인 것과 영역제한적인 것으로 분류하여 살펴보았다. 두 가지 분류 방식은 각각의 고유한 장단점이 있기 때문에, 교사용 교재를 개발하는 경우 어떤 유형으로 개발되는 것이 좋은가에 대해서는 차후 연구가 필요하다. 그러나 교재 전체가 이 두 방식 중 어느 한 방식을 맹목적으로 선택하기 보다는 내용이나 상황에 따라 적합한 방식을 취사선택하도록 하는 것이 좋다. 예를 들어 문제해결이나 프로젝트식 과제 지도와 관련하여서는 범영역적 오류 유형을 취하고, 계산과 같은 일반적인 수학 내용의 지도와 관련하여서는 영역제한적 오류 유형을 취하는 식으로 수학의 주제나 특성이 고려되어야 할 것이다. 또한 오류 유형과 더불어 제시되는 각 유형의 발생 빈도는 교사들이 주력해야 할 부분과 그렇지 않아도 되는 부분에 대한 정보를 제공해 주기 때문에 이 역시 교재에 포함되는 것이 좋을 것이다.

<표 II-1> 4, 5, 6 학년 어린이들의 자연수 뺄셈 오류유형(Brown & Burton, 1978 참고)

오류 유형	보기	빈도
1. Borrow/From/Zero	103-45=158	57
2. Smaller/From/Larger	253-118=145	54
3. Borrow/From/Zero and Left/Ten/OK	803-508=395	50
4. Diff/0-N=N and Move/Over/Zero/Borrow	305-126=129	34
5. Diff/0-N=N and Stops/Borrow/At/Zero	203-125=128	14
6. Smaller/From/Larger and 0-N=0	203-98=205	13
7. Diff/0-N=0 and Move/Over/Zero/Borrow	203-98=105	12
8. Borrow/From/Zero and Diff/N-0=0	103-45=108	11
9. Diff/0-N=0 and N-0=0	302-190=200	10
10. Borrow/From/Zero and Diff/0-N=N	103-45=148	10
11. Move/Over/Zero/Borrow	304-75=139	10
12. Diff/N-0=0	403-208=105	10
13. Diff/0-N=N	140-21=121	10
14. Diff/0-N=N and Left/Ten/OK	908-395=693	9

나. 오류 유형을 진단할 수 있는 검사지 교사가 사전에 오류 유형에 관한 지식을 가지고 있다고 해도 학습자가 드러내는 오류를 보고 그것이 어떤 유형인지를 판단하기란 쉽지 않다. 따라서 교사가 오류의 진단과정에서 학생이 어떤 오류 유형에 속하는지를 정확하게 진

단하는데 도움을 주는 진단지의 개발이 필요하다. 현재로는 진단지 개발과 관련된 연구가 거의 없으나 차후에는 이 분야의 연구가 촉진되어 교사용 교재의 기본 요소로 포함되어야 할 것이다.

Brousseau(1983)는 오개념의 결과로 발생하는 체계적인 실수(systematic errors)를 오류라고 부르고, 학습자의 부주의로 인한 일회적 실수(slips, mistakes)와 구분하였다. 체계적 오류란 버그(bugs)<sup>2)</sup>라고 불리는 불완전한 지식에서 온 것으로 일정한 환경에서 잘못된 방법이나 알고리즘, 규칙 등을 지속적으로 적용하는 것을 의미한다. 반면 단순 실수는 기호나 숫자를 잘못 보고 답을 내거나, 간단한 덧셈과 뺄셈 등에서 실수하는 것과 같은 무작위적 실수를 의미한다. Brousseau의 해석대로라면 오개념은 버그와 유사하게 잘못된 혹은 불완전한 지식으로서, 체계적인 오류를 양산하는 원인이 된다. 그러나 이와 같은 분류만으로는 교사들에게 그리 큰 도움은 되지 못한다. 예컨대 학생이 다음과 같이 답한 경우를 생각해 보자.

$$\begin{array}{r} 142 \\ -) \underline{37} \\ 115 \end{array}$$

교사는 학생이 십의 자리에서 받아내림한 사실을 잊어버린 부주의에서 온 실수라고 생각하기 쉽다. 그러나 '뺄셈은 항상 큰 수에서 작은 수를 빼는 것'이라는 생각으로 7에서 2를 빼다고 해도 위의 답을 얻을 수 있다. 전자는 무작위적 실수이지만, 후자는 체계적 실수인 것이다. 그러나 교사는 학생에게 일일이 물어보지 않는 한 그것이 어떤 류의 실수인지를 정확히

2) 버그(bugs)와 오개념(misconception) 간의 구분이 명확하지는 않으나, 버그는 주로 절차적 지식의 그릇된 이해와 적용에 사용되는 반면 오개념은 개념적 지식과 관련되어 사용되는 경향이 있다.

진단하기란 쉽지 않다. 이런 이유로 기존 연구 대부분은 연구자와 학생간의 일대일 면접을 통해 심층적으로 학생의 오류를 분석하고 있다. 그러나 현장 교사들이 전문 연구자와 마찬가지로 자신의 모든 학생과 개별 면접을 할 수 없는 것이 현실이고 보면, 교사용 지도서에서는 학생의 오류를 보다 간편하게 진단할 수 있는 검사지가 개발·제시되어야 할 것으로 생각된다. 예컨대 ‘큰 수에서 작은 수 빼기’ 오류를 진단하기 위해 다음과 같은 추가적인 문항과 예비 답안을 생각해 볼 수 있다.

315	457	523
-) <u>57</u>	-) <u>29</u>	-) <u>48</u>
342	432	525

만약  $142-37=115$ 라고 답한 학생이 보기와 같은 식으로 계속 답을 낸다면 그는 명백하게 큰 수에서 작은 수 빼기 오류 유형을 가지고 있는 것이다. 그러나 학습부진아의 경우는 이 보다 훨씬 다양한 오류 유형을 소유하고 있기 때문에, 오류 진단지는 각 유형의 오류가 노출될 수 있도록 다양한 예들을 발굴하여 조직해야 할 것이다.

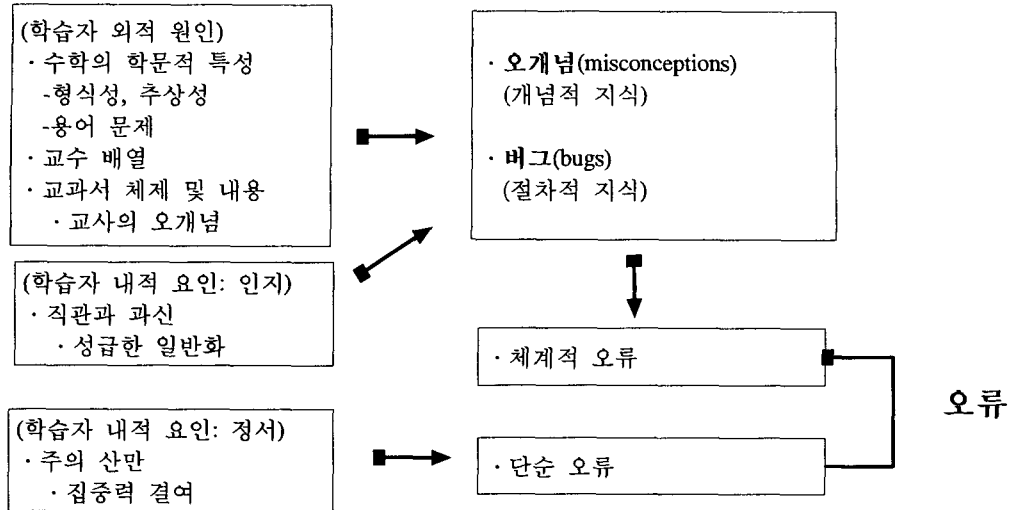
교사의 정확한 진단을 위한 최적의 방법은 인터뷰나 심층면접과 같이 교사와 학생이 일대일로 접촉하는 방법일 것이다. 그러나 이들은 시간과 노력이 어느 정도 요구되기 때문에 연구를 목적으로 하지 않는 한 교사들이 쉽게 이용할 수 있는 방법은 아니다. 따라서 활용가능성이라는 관점에서 보면 오류 진단지는 교사의 판단을 도울 수 있는 실제적인 대안이 되리라 생각된다.

#### 다. 오류의 원인

오개념이나 오류에 적절하게 대처하기 위해서는 그것이 어디에서 비롯되었는지를 정확하게 파악하는 일이 매우 중요하다. 그러나 표면적으로 드러나는 학생의 오류만으로는 그것이 어디에서 비롯되었는지를 판단하는 일은 그리 쉽지 않다. 따라서 교사용 교재는 각 오류 유형에 해당되는 개연성 높은 원인을 충분히 제시해 주어야 한다.

오류가 발생하는 일반적인 원인으로 Brousseau(1983)는 다음 네 가지를 제시하였다. 첫째, 오류는 수학의 기본적인 개념에 대한 오개념의 결과이다. 둘째, 오류는 때로는 교사에 의한 체계적인 지도 과정의 결과로서 일어난다. 셋째, 오류는 교사가 잘못 인식된 오개념을 가지고 있을 때 발생하기 쉽다. 넷째, 학생들은 종종 문제해결을 위해 자신의 독창적이고 비형식적인 방법을 창안하는데, 이것들은 더욱 일반적인 문제 형태의 특별한 경우에 기초한 귀납적 추론 과정의 결과이며, 그런 방법들이 때로는 심각한 오류를 유발한다. Hashweh(1986)에 의하면, 인간의 일반적 성향 중의 하나는 자신의 이론과 신념에 잘 맞는 사례나 증거는 잘 받아들이고 위배될 때는 이를 무시하며, 두 가지가 동시에 제시될 때는 자신의 이론적 신념에 맞는 것만을 선택한다는 것이다. 또한 변칙 사례를 이론에 갈등이 되는 증거로 생각하기보다는 특별한 경우 또는 예외적 현상으로 이해하여 자신의 이론을 유지하려는 경향이 있다는 것이다(노수진, 2000, 재인용).

오개념은 수학의 고유한 학문적 특성으로도 유발된다. 일반적으로 수학에서 다루어지는 대상은 외형적인 실체를 갖지 않는 다분히 형식



[그림 II-1] 수학과 오류 발생 메카니즘

적이고 추상적인 것이다. 그러나 인간의 지력으로는 추상적인 것, 정신적인 것, 실재하지 않는 것을 직접적으로 이해하기란 매우 어렵다. 그래서 인간은 이해하기 힘든 추상적 개념의 대리자로서 접촉과 조작이 쉬운 구체적인 정신 모델을 만들어 낸다. 이렇게해서 거의 모든 수학적 개념은 도해적 표현, 파라다임, 유추 등을 활용하여 접근이 가능하게 되며, 이 과정에서 그릇된 직관적 부착물이 발생하기 쉽다(Fischbein, 1987).

수학의 형식적 특성 이외에도 수학에서 사용하는 용어로 인해 오개념이 유발되기도 한다. 일부 수학 용어는 일상생활에서 사용되는 단어를 그대로 사용하는 경우가 있다. 이 때 언어 자체의 은유적 의미와 단어가 지닌 불명확한 표현으로 인하여 아동들은 수학에서 사용하는 용어의 의미를 자신이 가진 개념체제 내에 있는 일상적인 의미의 언어로 동화하려고 한다(차승진, 2001). 예컨대 도형에서의 ‘넓음’은 일

상생활에서 사용되는 ‘넓음’과 완전히 일치하는 개념이 아니지만, 아동들은 이것을 일상생활에서 사용하는 의미로 받아들이기 쉽다.

정리해 보면, 오류는 체계적인 오류와 단순 오류 두 가지로 구분되는데, 체계적인 오류는 오개념이나 버그에 의해 발생하는 연속적인 것에 반해, 단순 오류는 학생들의 부주의나 주의 산만과 같은 정의적 문제로 야기되는 일회적인 것이다.

체계적 오류를 유발하는 오개념이나 버그는 과신이나 직관, 성급한 일반화와 같은 인간의 보편적 성향으로 유발될 수도 있으며, 수학의 형식적인 특성이나 교수 배열의 문제, 교과서 체제, 혹은 교사의 오개념 등과 같이 학생의 외적인 문제로도 유발될 수 있다. 이상의 내용을 정리하면 <그림-1>과 같다. 교사용 교재는 교사들이 오류의 원인에 대해 다양하고 체계적인 관점을 가지도록 도움을 주는 방향으로 구성되어야 할 것이다.



#### 라. 예방 아이디어

오류 예방은 오류 처방 이상으로 중요한 아이디어임에도 불구하고, 연구가 되지 않고 있는 분야이다. 그러나 오류를 유발하는 오개념의 일반적 특성을 이해한다면 오류의 사후 처방보다는 사전 예방이 실제적으로 효율적인 지도전략임을 알 수 있다. 오개념은 일반적으로 지속적이고 고착성이 강하여, 한번 형성되고 나면, 어떠한 교정에 의해서도 쉽게 없어지거나 대체되지 않는다. Anderson(1986)은 학습자에게 이미 형성된 인과적 경험 형태는 어떤 대상에 대한 원인이 작용하면 일정한 결과를 낳는다고 생각하게 만들기 때문에, 특히 인과적 경험으로 획득된 개념은 쉽게 바뀌지 않는다고 설명한다. 또한 오개념은 무의식적이며, 자동적이어서 학습자가 오개념을 자각하기 힘들뿐만 아니라, 어떤 특정 조건만 만나면 무의식적이고 자동적으로 사용하려는 경향이 있다. 마지막으로 오개념은 잠복성이 있어서, 어느 일정 기간 동안은 학습자의 내면에 잠복되어 있기 때문에 교사에 의해서도 쉽게 탐지되지 않는다(노수진, 2000, 재인용).

이상을 종합해 보면, 오개념은 발생 후 제거 혹은 교정하는 것 보다 발생하지 않도록 사전에 예방 조치를 취하는 것이 바람직해 보인다. 오개념이 인식과정에서 발생하는 매우 자연스러운 현상으로 간주되기도 하지만, 교사의 적절치 못한 지도나 교수배열, 학생의 직관을 오도할 수 있는 도해나 패러다임의 사용 등을 최대한 자제하고 주의를 기울인다면 예방도 가능할 것이다. 예를 들면, 초등학생들은 305-28과 같이 피감수에 0이 포함되어 있고, 받아내림을 해야하는 뺄셈 상황에서 전형적으로 오류를 나타낸다. 이 경우 아동은 무조건 큰 수에서 작은 수를 빼거나, 0에서 어떤 수를 빼면 항상 0으로 답하거나, 아니면 0을 건너뛰고 곧바로

백의 자리에서 받아내림을 하는 식으로 문제를 해결한다. 물론 이에 대한 원인은 다각적으로 분석되어야 하겠지만, 교과서의 내용이나 배열을 조정한다면 오류를 어느 정도는 줄일 수 있다. 받아내림이 필요한 뺄셈을 지도한 이후, 그것의 특별한 경우로 피감수에 0이 포함된 뺄셈 문제를 교사가 명확하게 지도해 준다면 현재보다는 오류의 발생 빈도가 줄어들 수 있다. 혹은 0이 포함된 뺄셈 문제와 전형적인 오류 답안을 칠판에 적어 놓고, 그것에 대해 학급토의를 해 보는 것도 한 방법이 될 수 있을 것이다.

오류의 예방은 오류의 처방 이상으로 중요한 아이디어이지만, 이와 관련된 연구를 찾아보기란 극히 힘들다. 본 절에서 제시한 오류 예방을 위한 아이디어 역시 지극히 제한적이므로, 차후 보다 다양하고 유용한 아이디어가 개발·보급되어야 할 것이다.

#### 마. 지도 아이디어

오류 교정은 교사용 교재의 궁극적 목표로서, 교사용 교재를 구성하는 핵심적인 부분이다. 그러나 대부분의 체계적 오류는 교사, 교과서 혹은 기타 학습환경과 같은 물리적인 요인 이외에도 학습자의 정서적·심리적 문제와 복잡하게 연관되어 있기 때문에 결코 쉽게 해결되지 않는다. 따라서 특정 오류 유형에 대해 가장 적합한 교정 방안을 제안해 주는 일은 사실상 불가능하기 때문에, 교사용 교재는 가급적 다양한 지도 방안을 제시해 줌으로써 교사가 적합한 방식을 스스로 선택하도록 하는 것이 바람직할 것이다.

오류 교정과 관련하여 최근 논의되고 있는 아이디어는 다음 몇 가지로 요약된다. 우선 교구를 활용하는 방법이다. 최근 수학분야에서는 다양한 교구가 개발·보급되면서 오류 교정을

포함한 여러 영역에서 교구의 활용이 권장되고 있다(강문봉외, 2001). 일반적으로 밝혀진 사실 중의 하나는 아동이 수나 기호의 의미를 생각하지 않은 채 단순히 기계적으로 조작하려는 경향이 강하며, 이러한 과정에서 오류가 유발된다는 것이다. 교구는 수학으로의 접근을 보다 쉽고 친근하게 할 뿐만 아니라 의미를 생각하게 하는 훌륭한 모델이 될 수 있기 때문에, 특히 초등학교 어린이들의 오류 교정을 위한 가장 효과적인 방안이 될 수 있을 것이다. 컴퓨터와 공학을 활용한 지도 역시 넓은 관점에서 교구를 활용한 지도라 할 수 있다.

직접 교수법은 특수한 교육적 요구를 가진 아동들을 대상으로 하여 개발된 미국의 대표적 교수법 중 하나이다. Engelmann과 Carnine 등(1991)이 학습부진아와 학습 장애아를 대상으로 읽기, 쓰기, 산수, 추리 분야의 교수-학습 자료를 개발하고 이를 현장에 적용하면서 널리 알려진 직접 교수법은 내용 조직 방식과 관련하여서는 논리적 위계와 과제 분석 기법 원리를 적용한다. 또한 교사의 수업 진행방식과 관련하여서는 자극과 반응간의 관계에 관한 행동주의적 입장을 취한다. 그들은 기본적으로 인간은 환경으로부터 영향을 받기 때문에 환경을 잘 설계하면 얼마든지 목표로 하는 학습상태에 도달하도록 할 수 있다고 가정하며, 환경과 학습자를 매개하는 교사와 학습자 사이의 의사소통과정을 중시한다. 물론 이 의사소통 과정에서는 대체로 교사가 내용을 학습자에게 직접적으로 전달해주는 과정이 중심을 이루지만, 결국에 가서는 학생이 혼자서도 할 수 있도록 도움을 주는 정도를 점점 줄여간다. 따라서 교재를 개발하거나 교사가 내용을 전달하고자 할 때에는 규칙이나 전략을 명확하게 보여주고, 예를 선정, 계열화, 조직화하며, 잘못된 반응이 나오면 즉시 교정하는 교수 설계원칙을 준수해

야 한다(김동일 외, 2002).

직접 교수법이 학생과 교사 간의 의사소통을 강조하는 기법이라면, 학생과 학생간의 의사소통을 통해 오류를 교정하고자 하는 것이 소그룹 활동이며, 자기 자신과의 대화를 통해 오류를 교정하고자 하는 것이 메타인지 전략의 지도이다. 교구를 활용한 지도와 마찬가지로 소그룹 활동이나 메타인지 전략의 지도는 수학교육 전반에 걸쳐 폭넓은 목적으로 이용되고 있다.

끝으로 어림셈, 암산 및 대안적 알고리즘을 활용한 지도(강문봉외, 2001; 강시중, 1990; Van de Walle, 1998)는 표준 알고리즘을 절차에 맞게 수행하지 못하는 아동들을 위한 훌륭한 대안이 될 수 있을 것이며 나아가 사고의 유연성과 창의성을 키울 수 있는 지도 방안이기도 하다.

이상으로 오류 교정을 위한 몇 가지 지도방안을 살펴보았다. 그러나 위에 제시된 방법은 충분히 검증되지 않은 제안에 불과하므로, 차후 각각의 효용성에 대한 철저한 분석과 검증이 뒤따라야 할 것이다. 모든 유형의 오류, 모든 수준의 학습자, 모든 내용에 적합한 하나의 지도 방법이란 있을 수 없기 때문에, 교사용 교재는 매 상황에 적합한 지도방안을 제시해 주기보다는 주어진 상황에 적합한 방식을 교사 스스로 찾아 나갈 수 있도록 안내서의 역할을 해야 할 것이다.

#### 바. 기능의 숙달을 위한 연습문제

선행연구에 의하면 오류는 발견 즉시 정확하고 구체적으로 교정해 주는 것이 효과적이지만, 그것만으로는 부족하며 반드시 충분한 연습을 통해 기능을 숙달하도록 해야 한다고 한다. 특히 학습부진이나 학습장애 학생들은 단순히 오류를 지적 받았다고 해서, 혹은 자신의

오류를 깨달았다고 해서 오류를 범할 가능성이 아주 없어지는 것은 아니기 때문에, 오류를 지적하는 것과 함께 충분한 연습을 시켜서 학습자가 그 오류에서 완전히 '자유롭게' 되도록 만들어야 한다(김동일 외, 2002). 따라서 교사용 교재는 자신의 오류를 자각하고, 이를 수정하려는 아동을 위해 오류 유형에 대응되는 연습 문항 및 정답을 제공해 주어야 할 것이다. 또한 연습문제를 구성하는 문항의 성격이나 개수, 연습 시기와 간격, 분량 등과 같이 효과적인 연습이 되기 위한 여러 가지 요인들이 반드시 고려되어야 할 것이다.

#### 사. 성취도 검사지

성취도 검사지는 학습자가 교사의 지도나 연습문제 수행을 통해 오류가 교정되었는지를 점검하기 위한 것이다. 따라서 진단을 위해 사용한 오류 진단지를 그대로 사용해도 좋겠지만, 학습자가 이전의 오류를 재차 반복하는지 확인하기 위해서는 새로운 유형의 과제를 주어 일반화 능력을 살펴보는 것이 보다 효과적인 방법이 될 것이다. 따라서 성취도 검사지도 오류 진단지와 마찬가지로 가능한 다양한 오류 유형이 반영되도록 문항이 고루 개발되어, 교사로부터 학습자의 오류 수정 여부를 판단하는데 도움을 주어야 할 것이다.

### III. 나오며

노련한 교사는 어떤 특정 주제를 지도하기에 앞서, 자신의 학생들이 어떤 잘못된 생각이나 규칙을 적용하는지를 정확하게 파악하고, 이에 적절하게 대응한다. 그러나 이와 같은 노련한 교사가 되기까지는 많은 시간과 경험이 필요하며, 시간과 경험이 주어진다고 해도 모두 노련한 교사가 되는 것도 아니다. 따라서 교사가

학생의 수행을 올바르게 이해하고 처방하는데 도움을 줄 수 있는 자료가 개발된다면, 비록 노련한 교사가 아니라 할지라도 수업의 때 시간을 적절하게 대응을 할 수 있으리라 생각된다. 더욱이 수학은 다른 어느 교과보다도 많은 오개념 및 오류가 보고 되고 있기 때문에, 이와 관련된 교사용 자료가 개발된다면, 교사들에게 큰 힘이 되리라 생각한다.

본 연구는 수학과 오류의 진단과 처방에 관한 교사용 자료 개발의 필요성을 제안하고, 이를 진작시키기 위한 노력의 일환으로 교사용 자료 개발에 선행하여 고려되어야 할 기본 요소들을 초등수학의 '계산' 영역을 중심으로 살펴 보았다. 계산 오류의 진단과 처방과정에서 교사의 판단과 지도에 도움을 줄 수 있는 7가지 구성 요소로는 ①오류 유형 및 발생 빈도 ②오류 진단지 ③오류 원인 ④오류 교정 아이디어 ⑤오류 예방 아이디어 ⑥정착을 위한 연습문제 ⑦성취도 검사지가 제시되었으며, 각 항목의 설정 이유 및 미래 연구를 위한 시사점을 간략하게 정리하였다. 이 분야의 연구는 아직 시작 단계에 불과하므로, 본 연구에서 제안하는 여러 가지 사항들은 차후 체계적인 연구를 통해 검증되어야 한다. 또한 '계산' 영역에 국한된 연구가 계산 이외의 영역에 대해서도 시도되어야 할 것이다. 이 분야에 뜻있는 연구자들의 후속연구를 기대하는 바이다.

### 참고문헌

- 강문봉 외(2001). 초등수학교육의 이해. 경문사.
- 강시중(1990). Computer나 calculator를 이용한 계산에서 오류 교정을 위한 어렵셈 지도에 관한 연구. 수학교육.

- 김동일, 이대식, 신종호(2002). 학습장애아동의 이해와 교육. 학지사.
- 김종태(1975). 산수 학습에 따른 계산 능력 향상을 위한 오류의 교정 지도-가감승제를 중심으로- 동아대학교 대학원 석사학위논문.
- 김추일(1984). 산수와 기초계산의 오류 유형에 관한 조사 연구 -곱셈과 나눗셈을 중심으로- 국민대학교 대학원 석사학위논문.
- 나귀수(2001). 중학교 학생들의 수 개념 조사. *학교수학* 3(2), 267-280.
- 노수진(2000). 고등학교 학생들의 수열의 극한과 급수의 합에 대한 오개념과 오류분석에 관한 연구.
- 박선화(2002). 수열의 극한 개념에 대한 인지적 장애의 극복 방안 연구, *수학교육학연구*, 10(2), 247-262.
- 윤여운(1991). 산수학습 장애아의 정수 가감산 오류분석 및 프로그램 개발. 공주대학교 교육대학원 석사학위논문.
- 이종문(1983). 국민학교 산수 학습 계산 과정의 오류분석에 근거한 치료 프로그램 개발에 관한 연구. 계명대학교 대학원 석사학위논문.
- 정순진 (2002). '수와 식' 단원에서 수학 학습부진아의 오류 분석과 교정에 관한 연구. 한국교원대학교 석사학위 논문.
- 차승진(2001). '문자와 식' 단원에서 학습능력 수준에 따른 오류분석과 교정에 관한 연구. 한국교원대학교 석사학위논문.
- Brousseau, G. (1983). Les obstacles epistemologiques et les problemes en mathematiques. *Researches en Didactique des Mathematicques*, 4(2)
- Bricken, W. M. (1987). *Analyzing errors in elementary mathematics*. Doctoral Thesis. Stanford University. 25.
- Brown, J. S. & Burton, R. R. (1978). Diagnostic model for procedural bugs in basic mathematical skills. *Cognitive Science*, 2, 155-192.
- Clements, M. A. (1980). Analyzing children's errors on written mathematical tasks. *Educational Studies in Mathematics*, 2, 1-21.
- Engelmann, S., Carmine, D., & Steely, D. (1991). Making connections in mathematics. *Journal of Learning Disabilities*, 24, 292-303
- Enright, B. Gable, R., & Hendrickson, J. (1988). How do students get answers like these? Nine steps in diagnosing computation errors. *Diagnostique*, 13, 55-63.
- Fischbein, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics*. D.Reidel Publishing Company
- Hadar, N. M. & zaslavsky. O. (1987). An empirical classical model for errors in high school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18, 3-14.
- Maurer, S. B. (1987). New knowledge about errors and new views about learners:what they mean to educators and more educators would like to know. In Schoenfeld, A. H. (ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education*(pp.165-188). Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Newmann, M. A. (1981). Compression of the language of mathematics. *Mathematics Education Research of Australia*.
- Van de Walle, J. A. (1998). *Elementary and Middle School Mathematics*. Addison Wesley Longman, Inc.

# A Study on Developing the Teachers' Guide Book for Diagnosis and Prescription of Students' Mathematical Errors

Kim, Soo Mi (Gyeongin National University of Education)

This study focuses on the necessity of developing the material for teachers who are involved in diagnosing and prescribing students' mathematical errors. And it also intends to stimulate the related research of this area. For this, it tries to suggest the fundamental components-(1)types and frequencies of errors, (2) diagnostic test kit, (3)causes of errors, (4)ideas for prevention, (5)ideas for correction, (6)practice for settlement, and (7) performance test kit and frame of the teaching guide book for the teachers according to the general procedure of diagnosis and prescription. Finally it provides the concrete research areas for the future study.

**\*key words:** 수학 오류, 수학 오개념, 진단과 처방, 교사용 자료