

합성 관리도의 경제적 설계

임태진 · 김용덕

승실대학교 산업·정보시스템공학과

Economic Design of Synthetic Control Charts

Lim, Tae-Jin · Kim, Yong-Duk

Dept. of Industrial Information System Engineering, Soongsil University

Key Words : 합성 관리도, 공액 경사 알고리즘, *CRL* 관리도

Abstract

This paper investigates the economic design of synthetic control charts. The synthetic control chart has been proven to be statistically superior to the \bar{X} -control chart, but its economic characteristics have not been known. We develop an economic model of the synthetic control chart, based on Duncan's model. The synthetic chart has one more decision variable, the lower control limit for the conforming run length. In addition to this, the significance level and the power of the synthetic chart are more complicated than those of the \bar{X} -chart. These features make the optimization problem more difficult. We propose an optimization algorithm by adapting the congruent gradient algorithm. We compare the optimal cost of the synthetic chart with that of \bar{X} -control chart, under the same input parameter set of Duncan's. For all cases investigated, the synthetic chart shows superior to the \bar{X} -chart. The synthetic control chart is easy to implement, and it has better characteristics than the \bar{X} -chart in economical sense as well as in statistical sense, so it will be a good alternative to the traditional control charts.

1. 서론

관리도는 Shewhart에 의하여 창안된 이래 오늘에 이르기까지 사용목적 및 대상에

따라 여러 가지 적합한 형태로 고안되어 활용되어 왔다. 관리도는 생산 공정을 통계적으로 관리하는데 널리 사용되어 왔으며, 공정 모수를 추정하고 공정능력을 분석하는데 효과적인 장치라고 할 수 있다[1].

관리도의 설계는 추구하는 목적에 따라 통계적 설계(Statistical Design)와 경제적 설계(Economic Design)로 구분할 수 있다. 통계적 설계는 관리상태에서의 평균 런 길이(ARL_0)를 지정한 상태에서 이상상태에서의 평균 런 길이(ARL_1)를 최소화하는 설계 방식이다. 이에 반해 경제적 설계는 생산라인에서 발생하는 모든 비용과 손실을 고려한 비용함수를 정의하고, 이를 최소화하는 모수를 설정하는 방식이다.

품질관리나 대부분 생산 현장에서 가장 많이 사용하고 있는 \bar{X} 관리도는 공정평균의 큰 이동을 발견하는데 효과적이다 [7][8][13][15]. 그러나 \bar{X} 관리도는 공정 평균이 작거나 중간 정도 이동에 대하여는 민감하지가 못하는 점과 표본의 크기가 작을 때는 관리도의 수행 능력이 뒤떨어진다는 단점을 가지고 있다 [7][12].

Wu와 Spedding [13][14]은 이러한 단점을 보완한 합성 관리도를 개발하고, 기존의 \bar{X} 관리도와 EWMA 관리도, \bar{X} -EWMA 관리도 등에 대하여 ARL(Average Run Length)을 비교하여 합성 관리도가 더 효율적임을 보였다. 또한 합성 관리도의 통계적 설계 문제를 접근하여, 공정이 이상상태일 때의 ARL을 최소화하는 알고리즘을 개발하였다.

이후 Calzada와 Scariano [7]는 공정의 품질특성이 정규분포를 따르지 않는 경우에 있어서 합성 관리도의 강건성에 대하여 연구하였다. 최근 Wu와 Yeo 등 [15][16]은 np 관리도와 CRL 관리도를 결합한 합성 관리도를 제안하고, 공정이 이상상태일 때 평균 신호발생시간(ATS)을 최소화하도록 관

리도를 설계하였다.

이와 같이 합성 관리도에 대한 연구는 통계적 특성에만 집중되어 왔으며, 아직까지 합성 관리도의 경제적 설계에 대한 연구는 발표되지 않고 있다.

따라서 본 연구에서는 합성관리도의 경제적 모형을 개발하고 이를 최적화함으로써, 전통적인 \bar{X} 관리도의 최적 비용과 비교하여 합성 관리도의 경제성을 평가하고자 한다.

2장에서는 합성 관리도를 구성하는 \bar{X} 관리도와 CRL 관리도, 그리고 합성 관리도의 개념과 특성 대하여 고찰한다. 3장에서는 합성 관리도의 경제적 모형을 개발하고, 이를 최적화하는 알고리즘을 제안한다. 4장에서는 모의실험을 통하여 기존의 Duncan 모형 [8]의 경제적 설계 결과와 비교·분석한다.

2. 합성 관리도

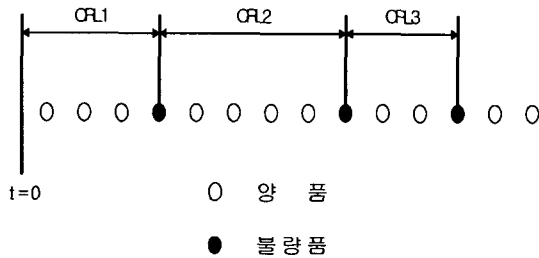
2.1 \bar{X} 관리도

\bar{X} 관리도는 공정평균을 관리하는 관리도로서, 관리한계선은 다음과 같은 식으로 주어진다 [8][12].

$$[LCL, UCL] = [\mu \pm \frac{k\sigma}{\sqrt{n}}] \quad (1)$$

따라서 \bar{X} 관리도의 설계 모수는 부분군의 표본크기 n , 관리한계선의 폭 k , 샘플링 간격 h 등으로 구성된다. 세 가지의 설계모수가 \bar{X} 관리도의 민감도 및 경제성에 미치는 영향은 다음과 같다.

- ① 표본크기 n 이 커지면 \bar{X} 관리도의 민감도가 증가하여 제1종 오류와 제2종 오류가 모두 감소하므로 유의수준은 감소하고 검정력은 증가한다. 반면 n 이 커짐에 따라 샘플링 및 분석 비용은 증가한다[2].
- ② 관리한계선의 폭 k 가 커지면 이상신호 발생 가능성이 줄어들므로 유의수준과 검정력이 모두 감소한다. 따라서 오류신호(false alarm) 발생에 따른 비용은 감소하지만, 이상상태를 방치한데 따르는 비용은 증가한다.
- ③ 샘플링 간격 h 는 관리도의 민감도와는 상관이 없다. h 를 줄이면 이상상태 발생으로부터 이상신호가 발생할 때까지의 시간을 줄일 수 있으므로 이상상태 방치 비용은 감소한다. 반면 샘플링 빈도가 증가하므로 샘플링 비용이 증가한다.



<그림 1> Conforming Run Length

2.2 CRL 관리도

CRL(Conforming Run Length)이란 100% 정밀검사에서 불량품을 발견한 후 다음 불량품이 발견될 때까지 검사회수를 말한다. 예를 들어 <그림 1>에서 CRL은 각

각 4, 5, 3 등이 된다. 공정의 불량률(p)이 증가하면 CRL은 통계적으로 감소하므로 CRL이 정해진 한계치보다 작아지면 이상신호를 발생시키는 원리를 사용한다 [13][15].

확률변수 CRL은 성공확률 p 를 갖는 기하분포를 따르므로, CRL의 기댓값과 확률분포함수는 각각 식 (2), (3) 등과 같다.

$$\mu_{CRL} = \frac{1}{p} \tag{2}$$

$$F_p(CRL) = 1 - (1 - p)^{CRL}, CRL = 1, 2, \dots \tag{3}$$

관리상태에서의 불량률을 p_0 라 하면, CRL 관리도의 유의수준은 식 (3)으로부터 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\alpha_{CRL} = F_{p_0}(L) = 1 - (1 - p_0)^L \tag{4}$$

따라서 식 (4)로부터 관리하한 L 은 다음과 같이 계산된다.

$$L = \frac{\ln(1 - \alpha_{CRL})}{\ln(1 - p_0)} \tag{5}$$

단, L 은 정수이어야 하므로 식 (5) 이상인 최소의 정수로 정한다.

공정의 불량률이 p 일 때 이상신호가 발생할 때까지의 평균 CRL의 개수(즉, 불량개수)는 다음과 같이 계산된다[13].

$$ARL_{CRL} = \frac{1}{F_p(L)} = \frac{1}{1 - (1 - p)^L} \tag{6}$$

하나의 CRL이 계산될 때, 즉 하나의 불량이 발생할 때까지는 여러 번의 검사가 필요하다. 따라서 CRL 관리도에서 이상신호가 발생할 때까지 검사되는 단위의 평균 개수는 식 (2)와 (6)으로부터 다음과 같이 계산된다[13].

$$\begin{aligned} ANS_{CRL} &= \mu_{CRL} \times ARL_{CRL} \\ &= \frac{1}{p} \times \frac{1}{1 - (1-p)^L} \end{aligned} \quad (7)$$

2.3 합성 관리도

합성 관리도는 합리적 부분군을 하나의 검사단위로 하여 \bar{X} 관리도를 작성하고, 관리한계를 벗어나면 불량표본으로 간주하여 CRL 관리도의 판정규칙을 적용한다[13]. 혼란을 피하기 위하여 합성 관리도에서는 이를 \bar{X}_S 와 CRL_S 로 명명한다. 합성 관리도는 다음과 같은 단계로 운영된다 [13][14].

① \bar{X}_S 관리도의 관리하한선과 관리상한선, 즉 $LCL_{\bar{X}_S}$ 와 $UCL_{\bar{X}_S}$, 그리고 CRL_S 관리도의 관리 하한선 L 을 결정한다. 여기서 $LCL_{\bar{X}_S}$ 와 $UCL_{\bar{X}_S}$ 는 \bar{X} 관리도의 관리 한계선과 유사하게 다음과 같이 계산 할 수 있다.

$$\begin{aligned} LCL_{\bar{X}_S} &= \mu - k\sigma_{\bar{X}_S} \\ UCL_{\bar{X}_S} &= \mu + k\sigma_{\bar{X}_S} \end{aligned} \quad (8)$$

단, μ 는 관리상태일 때의 공정평균, $\sigma_{\bar{X}_S}$ 는 표본평균의 표준편차.

\bar{X} 관리도와 합성 관리도의 유의수준을 같게 하려면 \bar{X}_S 의 관리 한계폭(k)은 \bar{X} 관리도보다 작아야 한다.

② 각 검사 시점에서, n 개의 관측치 x_i 로 구성된 하나의 표본군을 추출하고 표본평균 (\bar{X})을 계산한다.

③ 만약 표본평균이 \bar{X}_S 관리도의 관리한계 안에 위치하면

($LCL_{\bar{X}_S} \leq \bar{X} \leq UCL_{\bar{X}_S}$), 이때의 표본은 우량표본(Conforming Sample)으로 간주하고, ②로 되돌아간다. 만약 관리한계를 벗어난다면, 불량표본(Nonconforming Sample)으로 간주하고, 다음 단계로 넘어간다.

④ 이전 불량표본과 현재 불량표본 사이의 샘플링 횟수를 계산한다. 이 횟수는 합성 관리도에서 하나의 CRL 표본이 된다.

⑤ 만약 CRL 표본이 CRL_S 관리도의 관리 하한 L 보다 크다면, 공정은 관리상태에 있다고 판단되므로 ②로 되돌아간다. 반면 관리하한 이하라면 공정은 이상상태로 판정되고, 다음 단계로 넘어간다.

⑥ 이상 상태 신호를 발생한다.

⑦ 공정의 이상원인을 발견하고 제거한 후 ②로 되돌아간다.

이상의 합성 관리도의 운영 흐름도는 <그림 2>와 같다[13][14].

여기서 주목할 점은, 합성 관리도에서는 표본평균이 \bar{X}_S 관리도 관리한계선을 벗어나도 즉시 이상 상태 신호가 발생하지 않는다는 점이다. 즉, 2개의 연속된 불량표본 사이에서 계산된 CRL 표본이 CRL_S 관리도의 관리하한 L 보다 작거나 같을 때 비로소 이상상태 신호가 발생한다.

합성 관리도의 ARL_S 는 다음과 같이 계산할 수 있다. 공정이 관리상태일 때의 평균 런 길이를 $ARL_S(0)$ 라 하면, 이는 $1/\alpha_S$ 로 구할 수 있으며, 이때 α_S 는 오류

신호가 발생할 확률을 의미한다. 따라서 $ARL_S(0)$ 는 다음과 같다.

$$ARL_S(0) = \frac{1}{a_S} = \frac{1}{a} \times \frac{1}{a_{CRL}}$$

$$= \frac{1}{2\Phi(-k)} \times \frac{1}{1 - [1 - 2\Phi(-k)]^L}$$

단, $a_S = a \times a_{CRL}$. (9)

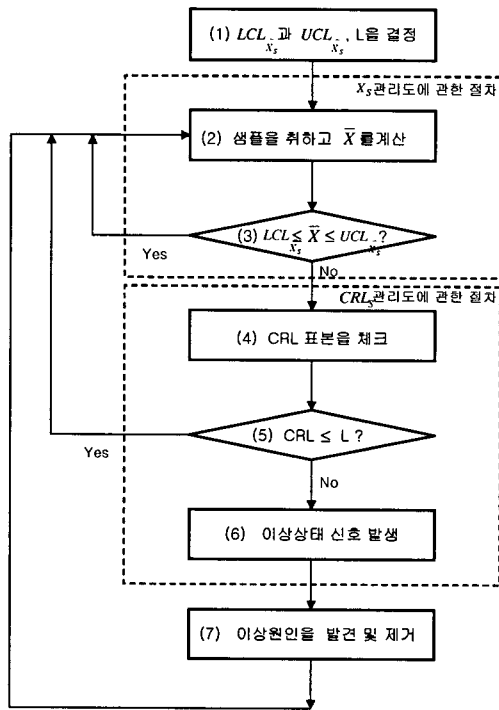
된다[13].

$$ARL_S(\delta) = \frac{1}{P_S} = \frac{1}{P} \times \frac{1}{1 - (1 - P)^L}, \quad (10)$$

$$P_S = [|Z| > UCL \& CRL \leq L | \delta]$$

$$= P \times (1 - (1 - P)^L)$$

단, $P = 1 - \Phi(k - \delta\sqrt{n}) + \Phi(-k - \delta\sqrt{n})$ 로서 하나의 표본평균이 \bar{X}_S 관리도 관리한계선을 벗어날 확률을 나타낸다.



<그림 2> 합성 관리도의 운영 흐름도

공정이 이상상태일 때, 즉 공정평균이 $\delta\sigma$ 만큼 이동했을 때 이상신호가 발생할 때까지의 평균 런 길이를 $ARL_S(\delta)$ 라 하고, 이상원인을 탐지 해낼 수 있는 확률, 즉 검정력을 P_S 라 하면, 이들은 다음과 같이 계산

3. 합성 관리도의 경제적 설계

3.1 기호 및 가정

3.1.1 기호

(1) 입력변수

λ 공정 이상상태의 발생률

δ 표준화된 공정평균의 변화량

e 하나의 관측값을 얻고 관리도에 적용하는데 소요되는 기대시간

D 이상원인을 발견하는데 소요되는 시간의 기대값

M 공정이 이상상태일 때 이를 방치함으로써 발생하는 시간당 비용

T 오류신호(false alarm) 한 건당 발생비용

W 이상원인을 검색하고 복구하는 비용

b 샘플링 건당 고정비용

c 단위 표본당 샘플링 및 분석 비용

(2) 출력변수

n 한 부분군의 표본크기

L CRL_S 관리도의 관리하한

- k \overline{X}_S 관리도의 관리 한계폭
- h 샘플링 간격
- $ARL_S(0)$ 관리상태일 때의 평균 런 길이
- $ARL_S(\delta)$ 이상상태일 때의 평균 런 길이
- C 단위 시간당 비용

3.1.2 가정

- ① 공정은 관리상태에서 시작하고, 공정의 이상원인은 공정평균을 $\delta\sigma$ 만큼 변화시킨다.
- ② 이상원인의 발생시간은 평균이 $1/\lambda$ 인 지수분포를 따른다.
- ③ 샘플링 중에 이상원인은 발생하지 않고 이상원인을 찾는 동안에도 공정은 계속 가동된다.
- ④ 이상원인은 검색할 수 있으며, 검색 후 조치하면 공정은 관리상태로 복구된다.

3.2 비용 모형

장기간에 걸친 단위시간당 평균비용은 주기당 평균비용을 주기의 기댓값으로 나눔으로써 계산할 수 있다[8]. 하나의 주기(cycle)는 공정의 시작에서 이상원인이 발생하고

난 다음 이상원인을 검색하고 관리상태로 복구될 때까지로 정의한다. <그림 3>은 하나의 주기를 예시한다.

3.2.1 주기당 기대 시간

<그림 3>에서와 같이 하나의 주기는 관리상태 지속시간(Ⓐ)과 이상상태 지속시간(Ⓑ+Ⓒ+Ⓓ+Ⓔ)으로 구분된다. 이상상태 지속시간은 아래와 같이 나누어서 살펴볼 수 있다.

(1) 관리상태의 지속시간

$$\text{Ⓐ} = 1/\lambda \tag{11}$$

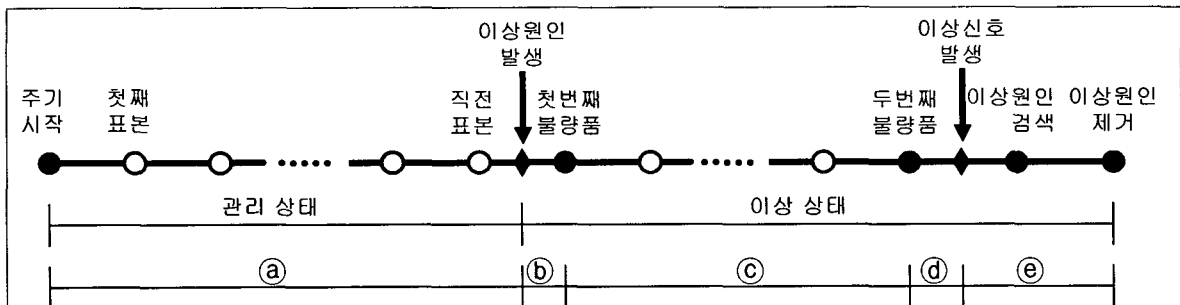
(2) 이상원인 발생부터 다음 샘플링까지의 경과 시간

$$\text{Ⓑ} = h - \tau \tag{12}$$

단, τ 는 j 와 $j+1$ 번째 표본 사이에 이상원인이 발생할 평균시간을 나타내며, 다음과 같이 근사적으로 계산할 수 있다[8].

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{\int_{jh}^{(j+1)h} e^{-\lambda t} \lambda (t-nh) dt}{\int_{jh}^{(j+1)h} e^{-\lambda t} \lambda dt} \\ &= \frac{1 - (1 + \lambda h)e^{-\lambda h}}{\lambda(1 - e^{-\lambda h})} \approx \frac{h}{2} - \frac{\lambda h^2}{12} \end{aligned} \tag{13}$$

(3) 이상원인 발생 직후의 샘플링으로부터 이상신호를 발생하는 샘플링까지의 경



<그림 3> 합성 관리도의 공정 주기

과 시간

$$\textcircled{c} = h/P_S - \tau = (1/P_S - 1/2 + \lambda h/12)h \quad (14)$$

(4) 표본을 분석하고 관리도에 적용하는데 소요되는 시간

$$\textcircled{d} = ne \quad (15)$$

(5) 이상원인을 발견하고 공정을 복구하는데 소요되는 시간

$$\textcircled{e} = D \quad (16)$$

따라서 한 주기의 기댓값은 다음과 같이 나타 낼 수 있다.

$$1/\lambda + (1/P_S - 1/2 + \frac{\lambda h}{12})h + en + D \quad (17)$$

3.2.2 주기당 기대 비용

(1) 이상상태의 공정이 방치됨으로써 발생하는 비용

$$\textcircled{f} = M((1/P_S - 1/2 + \frac{\lambda h}{12})h + en + D) \quad (18)$$

(2) 오류신호로 인한 비용

$$\textcircled{g} = \alpha_s T / \lambda h \quad (19)$$

(3) 이상원인을 찾는 비용(true alarm 일 때).

$$\textcircled{h} = W \quad (20)$$

(4) 샘플링 검사에 소요되는 비용

$$\textcircled{i} = (\frac{b+cn}{h}) \times (1 + \lambda(\frac{1}{P_S} - \frac{1}{2} + \frac{\lambda h}{12}))h + en + D \quad (21)$$

여기서 $b+cn$ 은 표본을 취하여 검사하고 그 결과를 계산한 후 타점하는데 소요되는 비용이며, 이런 샘플링은 한 주기에 걸쳐 h 간격으로 발생한다.

종합하면, 시간당 기대비용은 다음과 같이 계산된다.

$$C = \frac{\text{주기당 기대비용}}{\text{주기당 기대시간}} \quad (22)$$

$$= \frac{\textcircled{f} + \textcircled{g} + \textcircled{h} + \textcircled{i}}{\textcircled{a} + \textcircled{b} + \textcircled{c} + \textcircled{d} + \textcircled{e}}$$

식을 간소화하기 위하여 $B = (ah + en + D)$, $a = (1/P_S - 1/2 + \lambda h/12)$ 로 정의하면, 단위 시간당 비용(C)은 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$C = \frac{\lambda MB + \alpha_s T/h + \lambda W}{1 + \lambda B} + \frac{b}{h} + \frac{cn}{h} \quad (23)$$

이상의 비용 모형은 Duncan[8]이 제시한 모형과 유사한 골격을 갖고 있으나, 합성 관리도의 특성이 반영된 유의수준 α_s 와 검정력 P_S 에서 차이를 갖는다. 무엇보다도 CRL 의 관리하한 L 이 추가적인 결정변수로 작용하는 점이 모형의 최적화를 더 복잡하게 만든다.

3.3 비용 최적화 알고리즘

본 연구에서는 표본의 크기(n)와 관리하한(L)이 정수임에 착안하여, 이들을 변화시켜 가면서 주어진 n 과 L 에서 단위 시간당 비용(C)을 최소화하는 관리 한계선(k)과 표본추출 간격(h)를 구하는 반복적인 방법을 사용한다. 연속변수인 k 와 h 는 공액 경사 알고리즘을 이용하여 구하고, 국부최적해를 방지하기 위해 근사식을 이용한 초기해 설정 방법을 제안한다. 최종적으로 이와 같이 계산된 최소 비용들을 비교하여, 그 중에서 최소 비용을 갖는 n 과 L 및 그 때의 최적 k 와 h 값을 최적해로 구한다.

3.3.1 공액 경사법

공액 경사법은 최속 강하법을 간단하고 효율적으로 수정한 방법이다[5][10]. 주어진 n 과 L 에서 공액 경사 알고리즘을 적용하여 최적의 k 와 h 를 구하는 절차는 다음과 같다.

[단계 1] 초기값 $x^{(0)} = (k, h)$ 를 설정한다. (초기값 설정 방법은 다음 절에서 설명한다.) 반복횟수변호를 $i=0$ 로 두고, 수렴 매개 변수 ϵ 을 선정한다.

다음과 같이 공액 경사 방향을 계산한다.

$$d^{(0)} = -g^{(0)} \equiv -\nabla f(x^{(0)})$$

단, $\nabla f(x^{(i)})$ 는 손실비용함수(C)를 k, h 에 대하여 각각 편미분한 식을 나타낸다.

$\|g^{(0)}\| = \sqrt{k^2 + h^2}$ 를 계산하여, 수렴조건 $\|g^{(0)}\| < \epsilon$ 을 만족하면 최적해를 출력하고, 그렇지 않으면 [단계 4]로 넘어간다.

[단계 2] 다음과 같이 손실비용함수의 경사도를 계산한다.

$$g^{(i)} = \nabla f(x^{(i)})$$

수렴조건 $\|g^{(i)}\| < \epsilon$ 을 만족하면 최적해를 출력하고, 그렇지 않으면 다음 단계로 넘어간다.

[단계 3] 다음과 같이 새로운 공액 방향을 선정한다.

$$d^{(i)} = -g^{(i)} + \beta_i d^{(i-1)}$$

$$\text{단, } \beta_i = (\|g^{(i)}\| / \|g^{(i-1)}\|)^2$$

[단계 4] $f(x^{(i)} + \alpha d^{(i)})$ 를 최소화하는 $\alpha_i = \alpha$ 를 계산한다. 이 α 는 전체 알고리즘의 성능에 크게 영향을 미친다. α 를 결정하는 방법에는 여러 가지 방법이 있으나, 본 연구에서는 황금비 탐색(Golden Section

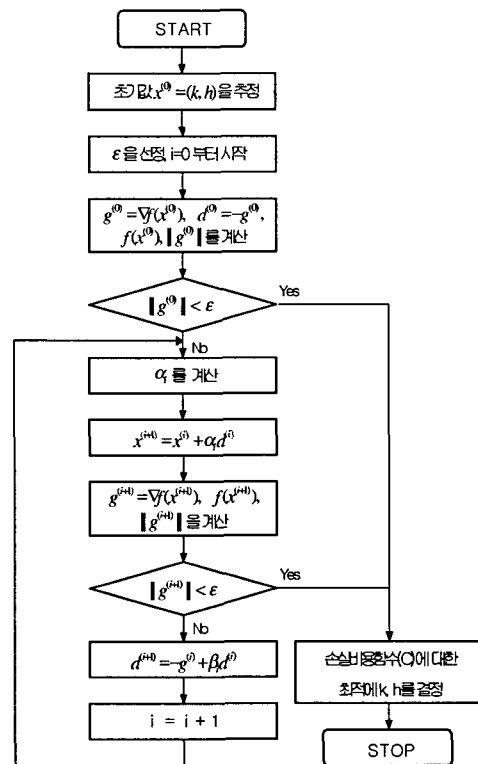
Search) 방법을 이용해서 α 를 계산한다.

[단계 5] 해를 다음과 같이 개선한다.

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} + \alpha_i d^{(i)}$$

$i = i + 1$ 로 두고 [단계 2]로 간다.

공액 경사 알고리즘은 <그림 4>와 같은 과정을 반복하여 비용함수(C)를 최소점으로 수렴시킨다. 각 단계에서 경사도의 놈(norm) 값을 계산하여 이 값이 ϵ 보다 작게 되면, 이 때의 k, h 를 주어진 n 과 L 에서 손실비용함수(C)에 대한 최적 k, h 라 할 수 있다.



<그림 4> 공액경사법의 흐름도

3.3.2 최적화 알고리즘

(1) 초기값 설정

공액 경사 알고리즘은 전체 최적해를 보장하지 않으므로, 초기값 설정이 중요하다. 주어진 n 과 L 에 대하여 다음과 같이 k, h 의 초기값을 설계한다. 이 방법은 효율적이지는 못하지만, 국부 최적해에 빠지는 것을 방지하기 위한 것이다.

① k 는 0.01부터 0.01씩 증가하면서 실험을 한다.

② h 의 초기값을 설계하기 위해 Duncan[8]의 근사식을 이용한다. 먼저 합성 관리도의 단위 시간당 비용함수(C)를 h 에 관하여 편미분 한다.

$$\frac{\partial C}{\partial h} = \lambda h^2 \frac{\partial B}{\partial h} \left(M - \frac{\alpha_s T}{h} - \lambda W \right) - \alpha_s T(1 + \lambda B) - (b + cn)(a + \lambda B)^2 = 0$$

(24) 단, $\frac{\partial B}{\partial h} = \left(\frac{1}{P_s} - \frac{1}{2} + \frac{\lambda h}{6} \right)$ 이다.

이상상태 발생률 λ 는 보통 매우 작은 값이므로, 식 (24)를 아래와 같이 근사적으로 나타낼 수 있다.

$$\lambda h^2 M \left(\frac{1}{P_s} - \frac{1}{2} \right) - \alpha_s T - b - cn = 0$$

(25)

따라서 h 의 근사식은 아래와 같이 구할 수 있다.

$$h = \sqrt{\frac{\alpha_s T + b + cn}{\lambda M(1/P_s - 1/2)}} \quad (26)$$

이와 같이 계산한 k, h 중에 최소의 비용을 갖는 k, h 를 최적화 알고리즘의 초기값으로 선정한다.

(2) 최적화 절차

앞에서 구한 초기값과 공액 경사 알고리즘을 이용한 최적화 절차는 다음과 같다.

① n, L 을 1부터 1씩 증가시키면서 해를 계산한다.

② 합성 관리도의 시간당 비용함수(C)를 k, h 에 관하여 편미분하여 식 (27)과 (24)을 구하고, 이를 $\nabla f(x^{(i)})$ 로 하여 공액 경사 알고리즘을 적용한다.

$$\frac{\partial C}{\partial k} = \lambda \frac{\partial B}{\partial k} \left(M - \frac{\alpha_s T}{h} - \lambda W \right) + \frac{T}{h} \frac{\partial \alpha_s}{\partial k} (1 + \lambda B) = 0 \quad (27)$$

$$\text{단, } \frac{\partial B}{\partial k} = - \frac{h \partial P_s / \partial k}{P_s^2},$$

$$\frac{\partial P_s}{\partial k} = - \frac{\exp\{-(k - \delta\sqrt{n})^2/2\}}{\sqrt{2\pi}} \times \{1 - (1 - P)^L\},$$

$$\frac{\partial \alpha_s}{\partial k} = -2 \left\{ \frac{\exp(k^2/2)}{\sqrt{2\pi}} \right\} \times \{1 - (1 - 2\Phi(-k))^L\},$$

$$P = 1 - \Phi(k - \delta\sqrt{n}) + \Phi(-k - \delta\sqrt{n}).$$

③ 주어진 n, L 에 대한 최적해 k, h 및 그 때의 시간당 비용을 저장한다.

④ 모든 경우의 n, L 에 대하여 계산한 비용 중 최소값을 갖는 경우를 찾고, 이 때의 n, L 및 k, h 를 최적해로 한다.

4. 모의실험

4.1 입력 변수

\bar{X} 관리도에 적용한 Duncan의 모형[8]과 비교하기 위하여, 표 1과 같이 Duncan[8]이

사용한 입력 변수에 대하여 합성 관리도의 최적해를 구하였다. 본 연구에서는 추가적으로 다양한 δ 값에 대하여 실험하였다. 실험 결과는 <표 2> ~ <표 5>와 같으며, Duncan[8]의 실험 결과가 있는 경우에 대해서는 최적 비용의 상대적 감소율을 나타내었다.

<표 1> 경제적 설계를 위한 입력 변수

No	λ	M	e	D	T	W	b	c
1	.01	100	.05	2	\$ 50	\$ 25	\$.50	.10
2	.02	100	.05	2	50	25	.50	.10
3	.03	100	.05	2	50	25	.50	.10
4	.02	50	.05	2	50	25	.50	.10
5	.01	1000	.05	2	50	25	.50	.10
6	.01	10000	.05	2	50	25	.50	.10
7	.01	100	.50	2	50	25	.50	.10
8	.01	100	.05	20	50	25	.50	.10
9	.01	100	.05	2	5	2.5	.50	.10
10	.01	100	.05	2	500	250	.50	.10
11	.01	100	.05	2	5000	2500	.50	.10
12	.01	100	.05	2	50	25	5.00	.10
13	.01	100	.05	2	50	25	.50	1.00
14	.01	100	.05	2	50	25	.50	10.0
15	.01	1000	.05	2	50	25	.50	1.00
16	.01	12.87	.05	2	50	25	.50	0.1
17	.01	128.70	.05	2	50	25	.50	0.1
18	.01	12.87	.05	2	500	250	.50	0.1
19	.01	12.87	.05	2	50	25	5.00	0.1
20	.01	12.87	.05	2	50	25	.50	1.00
21	.01	2.25	.05	2	50	25	.50	0.1
22	.01	225.00	.05	2	50	25	.50	0.1
23	.01	2.25	.05	2	50	25	5.00	0.1
24	.01	2.25	.05	2	50	25	.50	1.00

4.2 결과 분석

<표 2> ~ <표 5>에서 Duncan 모형과 비교한 최소 비용의 상대적 감소율을 먼저 살펴보면, 모든 경우에 있어서 합성 관리도의 최적 비용이 Duncan 모형보다 개선되었다는 것을 알 수 있다. 비용 감소의 주 원인은 $ARL_5(0)$ 즉, 관리상태 하에서의 평균 런 길이가 크게 증가하였기 때문이다. 한편 $ARL_0(0)$ 또한 따라서 증가하지 않

고, 오히려 전반적으로 감소하는 경향을 보였다. 따라서 오류 신호로 인하여 발생하는 비용은 감소하고, 이상상태를 방치함으로써 발생하는 비용 또한 증가하지 않기 때문에 합성 관리도를 \bar{X} 관리도보다 더 경제적으로 설계할 수 있는 것이다. 또한 <표 2> ~ <표 5>에서 다음과 같은 결과를 정리할 수 있다.

- ① 경우 1, 2, 3 : 이상원인 발생률이 증가할수록 최소 비용이 증가한다. 반면, 최소 비용의 감소율은 다소 감소한다. 이는 이상원인의 발생률이 낮을수록 합성 관리도가 더 경제적임을 시사한다.
- ② 하나의 비용 요소가 증가하면, 최소 비용 또한 증가하므로 비용 모형의 일관성을 알 수 있다.
- ③ δ 값이 작을수록 표본크기 n 이 증가하고, CRL 관리하한 L 은 변함이 없거나 다소 증가한다. 이는 공정평균의 작은 이동을 발견하기 위해 \bar{X}_S 관리도의 민감도를 높여야 하기 때문이다. 이로 인하여 최소 비용도 증가한다.
- ④ δ 값이 작을수록 최소 비용의 감소율이 다소 증가하는 경향을 보인다. 이는 합성 관리도가 공정평균의 작은 이동을 관리하는데 더 효율적임을 시사한다.

5. 결론

본 연구에서는 합성 관리도에 대한 기존의 연구가 ARL 에 기초한 통계적 특성에만 국한되었던 점에 착안하여, 경제적 설계

<표 2> $\delta=2$ 일 때 합성 관리도의 최적해

No	n	L	k	h	$ARL_s(0)$ 증가율(%)	$ARL_s(\delta)$ 증가율(%)	최소비용	감소율(%)
1	3	2	2.20500	1.19850	30.16%	3.24%	\$ 379.300	5.49%
2	3	2	2.20965	0.85075	42.56%	3.70%	659.537	5.10%
3	3	2	2.21813	0.72420	136.01%	-3.24%	914.800	4.73%
4	3	2	2.21720	1.23510	48.15%	3.89%	394.360	5.12%
5	3	2	2.20550	0.38110	82.05%	-5.06%	2,587.170	4.11%
6	2	2	2.19000	0.08400	332.28%	-19.88%	22,288.000	2.59%
7	2	3	2.17534	1.00162	171.68%	-24.57%	478.900	11.37%
8	4	2	2.28000	1.56000	35.98%	-0.02%	1,820.000	0.90%
9	3	2	1.82378	1.23649	201.79%	-5.49%	346.700	3.96%
10	4	2	2.66503	1.29510	82.61%	-1.86%	607.020	4.70%
11	4	3	3.04950	1.37177	24.29%	11.19%	2,802.210	1.01%
12	4	2	2.04000	3.28000	11.43%	0.29%	572.200	2.50%
13	2	2	1.83327	2.08352	90.27%	4.60%	512.196	9.12%
14	2	2	1.36170	6.38000	87.95%	-4.27%	938.040	6.28%
15	2	2	1.83197	0.65424	89.19%	4.55%	2,978.540	6.22%
16	4	2	2.34400	3.68284	187.10%	-3.25%	101.839	5.94%
17	4	2	2.33719	1.14925	176.86%	-3.32%	460.798	5.14%
18	5	2	2.75804	4.31371	151.99%	-1.86%	319.778	2.36%
19	5	2	2.21300	9.79000	65.73%	-0.01%	168.206	2.21%
20	2	2	1.83790	5.94330	83.81%	4.22%	149.978	10.14%
21	4	2	2.33909	9.39691	79.34%	0.52%	48.850	4.69%
22	3	2	2.22255	0.78604	52.25%	4.02%	715.019	5.33%
23	5	2	2.19205	25.9687	54.05%	-0.04%	74.172	2.18%
24	2	2	1.87300	14.9690	120.61%	5.91%	67.410	8.92%

까지 범위를 확장하였다. Duncan[8]의 비용 모형을 적용하여 합성 관리도의 비용 모형을 유도하고, 이를 최적화하는 알고리즘을 개발하였다. 순차적 최적화 방법 중에서 수렴속도가 대단히 빠른 기법중의 하나인 공액 경사 알고리즘을 이용하였고, 국부 최적해에 빠지는 것을 방지하기 위해 근사식을 이용한 초기값 설정 방법을 제안하였다.

모의실험을 통하여 \bar{X} 관리도의 최적 비용과 비교해 본 결과, Duncan[8]이 사용한 모든 입력 변수에 대하여 합성 관리도의 최적 비용이 더 우수하게 나타났다. 비용 감

소의 가장 큰 원인은 관리상태에서의 ARL 이 크게 증가하였기 때문인 것으로 나타났다.

합성 관리도는 기존의 \bar{X} 관리도와 병행하여 쉽게 적용할 수 있고, 통계적 특성 뿐만 아니라 경제적 특성 또한 우수한 것으로 판명되었으므로, 현장에서 많이 사용되어야 할 것으로 판단된다. 추후에는 보조적 런규칙의 활용 방안, 다중 이상원인에 대한 경제적 설계 등에 대한 연구가 기대되며, 보다 효율적인 최적화 알고리즘에 대한 연구도 필요하다.

<표 3> $\delta = 1.5$ 일 때 합성 관리도의 최적해

No	n	L	k	h	$ARL_S(0)$ 증가율(%)	$ARL_S(\delta)$ 증가율(%)	최소비용	감소율(%)
1	5	2	2.14724	1.33379	106.57%	-1.23%	\$ 407.997	7.38%
2	5	2	2.16693	0.93096	126.24%	-0.71%	704.160	6.55%
3	5	2	2.15677	0.79191	178.13%	-6.98%	972.074	6.01%
4	5	2	2.15492	1.35712	114.61%	-1.03%	421.846	6.88%
5	4	2	2.10000	0.36300	152.58%	-6.92%	2,725.160	5.42%
6	3	2	2.07440	0.07912	228.33%	-21.59%	23,069.800	2.91%
7	2	4	2.07630	0.74952	77.15%	2.70%	551.051	11.79%
8	5	2	2.10169	1.47533	87.17%	-1.39%	1,843.280	1.48%
9	4	2	1.67692	1.25814	114.11%	-0.46%	368.960	5.01%
10	6	2	2.55104	1.40207	61.62%	3.18%	642.501	6.34%
11	8	2	2.95424	1.67420	110.60%	-3.24%	2,832.820	1.66%
12	7	2	2.01360	3.37148	77.27%	-1.11%	595.550	3.67%
13	3	2	1.68930	2.48078	50.16%	9.07%	585.075	9.98%
14	2	2	1.13044	6.29579	81.85%	-1.17%	1,061.770	6.73%
15	3	2	1.75000	0.72000	131.46%	2.69%	3,246.580	6.87%
16	6	2	2.22905	4.04976	149.56%	-1.85%	110.219	7.54%
17	5	2	2.14699	1.17497	106.31%	-1.24%	493.268	7.22%
18	7	2	2.62548	4.51883	105.38%	1.19%	328.553	3.29%
19	8	2	2.11958	10.0242	124.31%	-0.90%	173.824	3.14%
20	3	2	1.69230	7.08278	52.03%	9.21%	173.975	10.60%
21	6	2	2.23150	10.2506	101.15%	1.26%	51.814	5.99%
22	5	2	2.15374	0.88022	113.35%	-1.06%	765.322	6.82%
23	8	2	2.12400	26.3450	78.39%	-0.08%	75.875	2.91%
24	3	2	1.70352	18.7811	67.70%	10.29%	76.005	9.72%

참고문헌

- [1] 김성인(1985), 「통계적 품질관리-관리도」, 박문사.
- [2] 박성현, 박영현(1996), 「통계적 품질관리」, 민영사.
- [3] 박창순(1995), 「통계적 품질관리-SAS 응용 과 함께」, 울곡 출판사.
- [4] 류연선, 임오강, 박경진(1994), 「최적 설계 입문」, 반도 출판사.
- [5] Bazarara, M. S., Sherali, H. D., Shetty, C. M.(1993), *Nonlinear Programming - Theory and Algorithms*, Wiley.
- [6] Bourke, P. D.(1991), "Detecting a Shift in Fraction Nonconforming Using Run- Length Control Charts with 100% Inspection", *Journal of Quality Technology*, Vol. 23, No. 3, pp.225-238.
- [7] Calzada, M. E. and Scariano, S. M.(2001), "The Robustness of the Synthetic Control Chart to Non-Normality", *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, Vol. 30, No. 2, pp.311-326.
- [8] Duncan, A. J.(1956), "The Economic Design of \bar{X} Charts used to Maintain Current Control of a Process", *Journal of the American Statistical Association*,

<표 4> $\delta = 1.0$ 일 때 합성 관리도의 최적해

No	n	L	k	h	$ARL_s(0)$ 증가율(%)	$ARL_s(\delta)$ 증가율(%)	최소비용	감소율(%)
1	9	2	1.97701	1.52898	95.19%	-3.18%	\$ 471.494	9.69%
2	8	2	1.98517	1.01266	127.81%	0.10%	799.266	8.70%
3	8	2	1.93485	0.86689	96.90%	-7.16%	1,091.150	8.09%
4	9	2	2.00406	1.57657	128.07%	-1.89%	482.233	9.08%
5	6	3	2.03010	0.33613	134.20%	-1.91%	3,017.040	7.35%
6	4	5	2.18000	0.07000	302.86%	-14.39%	24,446.600	4.14%
7	4	4	2.02300	0.85650	148.91%	-23.13%	683.497	13.51%
8	9	2	1.98664	1.74139	136.11%	-1.19%	1,893.820	2.21%
9	6	2	1.43436	1.38386	97.19%	-0.56%	415.041	6.27%
10	12	2	2.43995	1.72090	117.79%	-4.28%	719.711	9.09%
11	14	3	2.87000	2.13000	83.35%	1.19%	2,909.230	2.70%
12	11	2	1.79000	3.42000	49.31%	-0.63%	648.919	5.58%
13	6	2	1.52344	3.38109	97.02%	-2.37%	722.702	10.13%
14	3	2	0.79050	6.94000	54.54%	3.90%	1,337.060	2.36%
15	5	3	1.68920	0.77714	182.86%	5.13%	3,775.33	7.06%
16	10	2	2.02948	4.62249	96.94%	-0.67%	127.990	9.73%
17	9	2	1.98532	1.36990	115.10%	-2.22%	568.227	9.32%
18	14	2	2.50666	5.63480	128.22%	-2.60%	347.681	4.69%
19	14	2	1.95086	10.1709	105.89%	-0.86%	186.660	4.83%
20	6	2	1.52474	9.92949	89.18%	3.37%	217.877	10.46%
21	11	2	2.07588	12.0882	145.96%	-0.31%	58.014	7.84%
22	8	2	1.94260	0.98273	81.76%	-2.20%	872.572	9.06%
23	15	2	1.98000	28.5600	86.61%	-0.36%	79.771	4.32%
24	6	2	1.53307	26.8629	109.03%	4.69%	91.444	10.22%

Vol. 51, pp. 228-242.

[9] Goel, A. L., Jain, S. C. and Wu, S. M.(1968), "An Algorithm for the Determination of the Economic Design of \bar{X} charts Based on the Duncan's Model", *Journal of American Statistical Association*, Vol. 63, No. 321, pp. 304-320.

[10] Lasdon, L. S., Mitter, S. K. and Waren, A. D.(1967), "The Conjugate Gradient Method for Optimal Control Problems", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC- 12, No. 2, pp.132-138.

[11] Lorenzen, T. J. and Vance, L. C.(1986), "The Economic Design of the Control Chart : A Unified Approach", *Technometrics* Vol. 28, No. 1, pp.3-10.

[12] Montgomery, D. C.(2001), *Introduction to Statistical Quality Control*, Wiley.

[13] Wu, Z. and Spedding, T. A.(2000), "A Synthetic Control Chart for Detecting Small Shifts in the Process Mean", *Journal of Quality Technology*, Vol. 32, No. 1, pp.32-38.

[14] Wu, Z. and Spedding, T. A.(2000), "Implementing Synthetic Control

<표 5> $\delta=0.5$ 일 때 합성 관리도의 최적해

No	n	L	k	h	$ARL_s(0)$ 증가율(%)	$ARL_s(\delta)$ 증가율(%)	최소비용	감소율(%)
1	19	3	1.75552	1.81415	91.14%	0.82%	\$ 667.419	12.11%
2	17	3	1.71116	1.21593	71.67%	-5.07%	1,089.130	10.93%
3	16	3	1.74330	0.92874	110.67%	-3.50%	1,449.080	10.23%
4	19	3	1.75020	1.91610	96.49%	1.61%	666.163	11.39%
5	11	5	1.87000	0.35000	124.49%	0.69%	3,885.320	9.21%
6	19	3	1.73880	0.11300	87.48%	-18.35%	32,716.500	1.80%
7	7	5	1.81050	0.89551	102.48%	-19.62%	1,043.940	11.00%
8	20	2	1.63776	2.13071	96.71%	-0.61%	2,052.500	3.49%
9	9	3	1.03402	1.55867	80.28%	5.36%	539.985	3.86%
10	29	3	2.23000	2.17000	92.55%	-3.41%	972.890	13.86%
11	40	3	2.65665	2.82890	115.83%	0.56%	3,166.810	5.62%
12	26	2	1.55611	3.63664	113.24%	-2.33%	827.999	8.37%
13	11	3	1.16870	3.88640	65.02%	4.66%	1,088.720	6.14%
14	11	3	0.03000	13.8300	1.64%	0.47%	2,028.370	3.53%
15	6	3	0.35170	1.98138	-73.21%	-6.50%	5,561.690	2.36%
16	26	2	1.70321	6.65640	90.40%	1.18%	182.474	11.96%
17	18	3	1.72000	1.53000	69.36%	-3.15%	799.249	11.82%
18	38	3	2.34820	7.81800	184.27%	6.46%	408.271	8.01%
19	34	2	1.67640	11.0840	141.37%	0.12%	230.883	7.77%
20	14	2	1.10402	15.8604	79.93%	0.62%	327.861	7.60%
21	29	2	1.79000	17.4400	174.41%	3.13%	76.221	10.03%
22	16	3	1.70060	1.05301	64.50%	-12.82%	1,204.49	11.43%
23	38	2	1.60000	41.8200	53.51%	-1.54%	93.804	6.32%
24	13	2	1.10999	44.6162	123.17%	4.06%	126.496	8.49%

Charts”, *Journal of Quality Technology*,
Vol. 32, No. 1, pp.75-78.

- [15] Wu, Z., Yeo, S. H. and Spedding, T. A.(2001), “A Synthetic Control Chart for Detecting Fraction Nonconforming Increases”, *Journal of Quality Technology*, Vol. 33, No. 1, pp.104-111.
- [16] Wu, Z., Yeo, S. H.(2001), “Implementing Synthetic Control Charts for Attributes”, *Journal of Quality Technology*, Vol. 33, No. 1, pp.112-114.