

판재의 성형성 및 불안정 현상 해석(I)

손현성 · 김영석

(경북대학교 기계공학부)

Analysis of Formability and Plastic Instability in Sheet Metals (I)

H. S. Son and Y. S. Kim

1. 서론

판재의 가공은 성형공정 중에 판재의 성형불량 즉, 변형 국소화, 파단, 주름 등의 발생에 의해 제약⁽¹⁾을 받는다. 판재를 단축 인장 변형시키는 경우에는 변형이 적을 때에는 하중이 증가함에 따라 소성 변형률이 커지는 안정응답 상태에 있지만 하중이 최고점에 달한 직후에는 하중이 떨어지는데도 불구하고 소성 변형률은 증가하여 변형이 불안정해진다. 이때 시편의 중앙에는 확산 넥이 발생하는데 이는 미소 변형에 대해 재료의 가공경화에 의한 하중 증가보다 단면적 수축에 의한 하중 감소가 더 크기 때문이다. 이 확산 넥 발생은 부분적으로 판재의 두께 불균일을 야기하지만 이 상태는 실제 프레스 가공된 제품의 기능(강도 및 표면품질 등)에서는 큰 결함이 되지 않는다. 그러나 확산 넥이 발생하여 성장하면 점차 인장방향에 대해 임계 기울기를 갖는 방향에서 좁은 선 영역에 변형의 대부분이 집중하는 국부 넥이 발생하여 판재의 급격한 두께 감소를 수반하여 결국 하중-변위 곡선에서 변위의 증가가 거의 없이 하중이 급격히 떨어져 연성 파단에 이르게 된다. 따라서 변형의 국소화에 의한 파단 발생이 프레스 공정설계(다이 및 금형설계)에 있어서 가장 먼저 검토해야 할 사항이다. 비록 국부 넥으로 파단이 발생하지 않더라도 국부 넥 발생은 판재의 국부적 두께감소를 가지므로 제품의 표면불량이 된다. 또 다른 형태의 성형불량이 원통 및 사각 컵의 디프 드로잉 성형시의 원주 방향으로

압축응력을 받고 있는 플랜지 부에서 발생하는 주름이다. 이런 주름의 발생은 가공된 제품으로서 형상불량일 뿐 아니라 주름의 발생은 금형을 크게 손상시키기 때문에 피해야 될 사항이다.

각종 성형불량이 발생 가능한 응력 상태를 Fig 1에 나타내었다. A 영역에서는 압축응력에 의한 주름, B 영역과 D 영역에서는 인장에 의한 국부 넥킹, C 영역에서는 이축 인장에 의한 파단이 주로 발생한다.

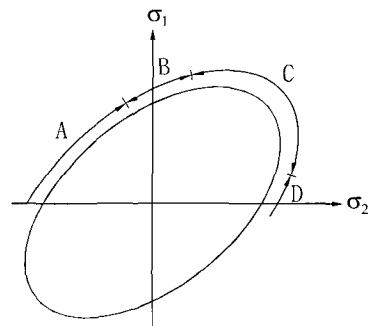


Fig. 1 성형불량 발생 응력 범위

이런 성형불량 발생 없이 재료가 가공될 수 있는 한계를 재료의 성형한계(forming limit)라고 하고 또한 재료가 파단 발생 없이 소성변형할 수 있는 능력 또는 재료가 상대적으로 소성변형하기 쉬운 정도를 나타내는 것을 성형성(formability)이라고 한다. 통상 판재의 스탬핑 성형성을 평가

하기 위한 대표적인 방법으로 인장실험 등과 같은 기본실험이 종래부터 널리 상용되고 있고, 재료의 기계적 특성과 성형성과의 상관관계를 도출하려는 연구가 지속적으로 수행되고 있으나 이들 기본실험에서 응력상태는 스탬핑 공정 중에서 재료가 받는 응력상태와 다르고 또한 판재의 표면 마찰특성과 금형조건 등을 고려하고 있지않아 스탬핑 실적과 엄밀한 의미에서 상관성이 결여되어 있다고 간주할 수 있다. 즉 스탬핑 공정에서 재료가 받는 각각의 변형모드 혹은 혼합된 변형모드를 잘 재현한 모사실험(simulative test)⁽²⁾인 디프 드로잉 실험(deep drawing test after swift), 돔 장출실험(dome punch stretching test), 평면변형 장출 시험(plane strain punch stretching test)⁽³⁾ 등이 판재의 스탬핑 성형성 평가를 위해 적용되고 있다. 또한 실제 금형을 가공하기 전 금형 설계단계에서 여러 변수들의 변화에 따른 제품의 변형상태의 예측과 분석을 통해 최적 가공조건을 설정하기 위해서 종래의 시행착오의 대안방법으로 유한요소해석을 포함한 컴퓨터 원용 실험(computer aided test)⁽⁴⁻⁶⁾이 판재의 성형성 평가 및 성형불량 원인규명에 활발히 적용되고 있다.

따라서 판재 가공공정에서 파단에 의한 성형불량을 피하고 설계자가 원하는 제품을 생산하기 위해서는 판재의 성형한계-판단 및 불안정 현상 발생한계-를 이론적으로 명확히 이해하는 것이 필요하다. 이를 위해 본 글에서는 2 회에 걸쳐서 응력비 또는 변형률 비가 일정한 상태를 유지하는 비례부하 하에 있는 판재의 성형 한계를 예측하기 위한 방법으로 가장 널리 이용되고 있는 대표적인 이론을 중심으로 알기 쉽게 설명하고자 한다. 본고에서는 Swift 의 확산 넥⁽⁷⁾, Hill 의 국부 넥⁽⁸⁾, Marciniak 과 Kuczynski 의 재료결함모델⁽⁹⁾의 이론을 중심으로 기술한다.

2. Swift 의 확산 넥 이론

Fig. 2 와 같이 금속판재가 면 내에서 이축 인장 응력을 받고 있는 경우를 고려하자.

이 경우 판재의 확산 넥 발생조건은 Swift 에 의해 다음과 같이 제안되었다. 먼저 가공경화함수를 소성 일의 함수로 간주할 경우에 주 응력 공간에서 항복함수는

$$f(\sigma_1, \sigma_2) = G(W^p) \quad (1)$$

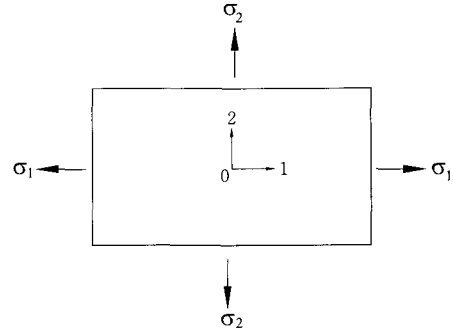


Fig. 2 이축 인장상태에서 확산 넥 발생 해석

으로 나타내진다. 따라서 항복함수의 증가는

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_1} d\sigma_1 + \frac{\partial f}{\partial \sigma_2} d\sigma_2 = G'(W^p) dW^p \quad (2)$$

와 같이 나타내질 수 있고, 여기서

$$dW^p = \sigma_1 d\varepsilon_1 + \sigma_2 d\varepsilon_2 = \sigma_1 d\varepsilon_1 + \sigma_2 d\varepsilon_2 \quad (3)$$

이므로 식 (2)에서 $G'(W^p)$ 는

$$G'(W^p) = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_1} d\sigma_1 + \frac{\partial f}{\partial \sigma_2} d\sigma_2}{\sigma_1 d\varepsilon_1 + \sigma_2 d\varepsilon_2} \quad (4)$$

가 된다.

한편 판재에 이축 인장응력이 작용하고 있는 경우에 확산 넥 발생조건은

$$\frac{d\sigma_1}{\sigma_1} = d\varepsilon_1, \quad \frac{d\sigma_2}{\sigma_2} = d\varepsilon_2 \quad (5)$$

이므로 식 (5)를 식 (4)에 대입하고 레비·미세스의 구성식

$$d\varepsilon_1 = \frac{\partial f}{\partial \sigma_1} d\lambda, \quad d\varepsilon_2 = \frac{\partial f}{\partial \sigma_2} d\lambda \quad (6)$$

를 이용하면 $G'(W^p)$ 는 다음과 같이 된다.

$$G'(W^p) = \frac{\sigma_1 \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_1}\right)^2 + \sigma_2 \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_2}\right)^2}{\sigma_1 \frac{\partial f}{\partial \sigma_1} + \sigma_2 \frac{\partial f}{\partial \sigma_2}} \quad (7)$$

재료가 von-Mises 항복조건에 따라 소성변형이 발생한다고 가정하면

$$f = \bar{\sigma} = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2} \quad (8)$$

이 식을 식(7)에 대입하여 정리하면

$$G'(W^p) = \frac{\alpha(2\alpha-1)^2 + (2-\alpha)^2}{4(1-\alpha+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (9)$$

로 표현된다. 단, α 는 주응력 비(α_2/α_1)이다. 또한 재료의 진응력-진변형률 관계가 n 승 경화에 의한 가공경화 $\bar{\sigma} = F\bar{\epsilon}^n$ 에 의해 나타내진다고 가정하면 식 (2)로부터

$$G'(W^p) = \frac{df}{dW^p} = \frac{d\bar{\sigma}}{dW^p} = \frac{d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}d\bar{\epsilon}} = \frac{n}{\bar{\epsilon}} \quad (10)$$

가 된다. 여기서 $\bar{\sigma}$ 와 $\bar{\epsilon}$ 는 각각 등가응력, 등가 변형률이다. 따라서 식 (9)와 식 (10)을 비교하면

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\epsilon}} = \frac{\bar{\sigma}}{Z_d} \quad \text{또는} \quad \frac{n}{\bar{\epsilon}} = \frac{1}{Z_d} \quad (11)$$

의 식이 얻어지며 여기서

$$Z_d = \frac{4(1-\alpha+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}{\alpha(2\alpha-1)^2 + (2-\alpha)^2} \quad (12)$$

로 정의되고 이 식은 이축 인장 하에 있는 판재에 확산 넥이 발생할 조건이다.

한편 식 (6)으로부터 주 변형률 증분 비 ($\rho = d\epsilon_2/d\epsilon_1$, 또는 주 변형률 비 $\rho = \epsilon_2/\epsilon_1$)는

$$\rho = \frac{1-2\alpha}{\alpha-2} \quad (13)$$

의 관계가 성립한다.

식 (13)과 상당 변형률의 정의

$$\bar{\epsilon} = \sqrt{\frac{2}{3}(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2)} \quad (14)$$

를 이용하면 식 (11)는 다음과 같이 나타내진다.

$$\begin{aligned} (\epsilon_1)_d &= \frac{(2-\alpha)\bar{\epsilon}}{2(1-\alpha+\alpha^2)^{1/2}} = \frac{2(2-\alpha)(1-\alpha+\alpha^2)}{\alpha(2\alpha-1)^2 + (2-\alpha)^2} n \quad (15) \\ (\epsilon_2)_d &= \frac{(2\alpha-1)\bar{\epsilon}}{2(1-\alpha+\alpha^2)^{1/2}} = \frac{2(2\alpha-1)(1-\alpha+\alpha^2)}{\alpha(2\alpha-1)^2 + (2-\alpha)^2} n \end{aligned}$$

이것으로부터 단축 인장 ($\alpha = 0, \rho = -0.5$), 평면변형 ($\alpha = 0.5, \rho = 0$) 및 등이축 인장 ($\alpha = 1, \rho = 1$)에서는 모두 $(\epsilon_1)_d = n$ 이 된다. 한편 순수전단 ($\alpha = -1, \rho = -1$)에서는 $(\epsilon_1)_d$ 는 무한대가 되어 확산 넥에 의한 소성 불안정 현상은 발생하지 않는다.

Table 1에 여러 인장응력 상태 하에서 판재에 확산 넥이 발생할 때까지의 한계 변형률을 나타내었다.

Table 1 확산 넥 발생 때의 한계변형률

응력조건 $\alpha = \sigma_2/\sigma_1$	단축인장 0	평면변형 1/2	등이축인장 1
$(\bar{\epsilon})_d$	n	$2n/\sqrt{3}$	$2n$
$(\bar{\epsilon}_1)_d$	n	n	n
$(\bar{\epsilon}_2)_d$	$-n/2$	0	n
$(\bar{\epsilon}_3)_d$	$-n/2$	$-n$	$-2n$

한편 이방성 판재의 경우에 대해서는 수직이방성 R_m 을 갖는 재료에 대한 Hill의 1948 항복조건 식으로부터

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{1+R_m} \left\{ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + R_m(\sigma_1 - \sigma_2)^2 \right\} \quad (16)$$

식 (12)는 다음과 같이 표현된다.

$$Z_d = \frac{4(1-\alpha\beta + \alpha^2)^{\frac{3}{2}}}{\alpha(2\alpha-\beta)^2 + (2-\alpha\beta)^2} \quad (17)$$

단, $\beta = 2R_m/(1+R_m)$ 이다.

3. Hill의 국부 넥 이론

Hill은 이축 응력 하에서 판재를 변형시킬 때 부 변형률인 음 ($\epsilon_2 < 0$)인 경우에 한하여 주축 방향으로 일정한 각도 θ 만큼 기울어진 좁은 영역에 국부적으로 변형이 집중한다고 가정하여 국부 넥 발생조건을 구하였다. 즉 $\epsilon_1 > 0, \epsilon_2 < 0$ 인 영역에서 국부 넥이 발생하는 경우에 변형은 Fig.

3에서와 같이 판 두께정도의 폭을 갖는 좁은 밴드 상에 집중되어 두께 방향으로만 변형이 주로 일어나고 하중의 급격한 감소와 더불어 파단에 이르게 된다. 이때 좁은 밴드의 상하부분은 상대적으로 제하되어 강체와 같이 움직이므로 밴드에 따라 속도 불연속이 존재하게 된다.

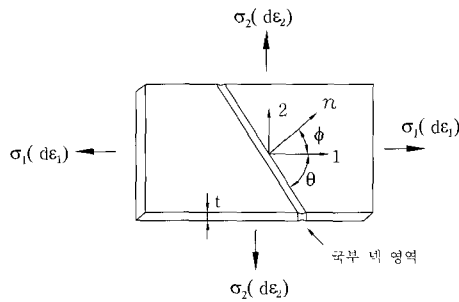


Fig. 3 국부 넥 발생 해석

따라서 단축 인장 시편에서 관찰하면 국부 넥 발생위치에서는 넥 길이 방향의 변형률이 영이 되고 두께 방향의 변형률만 존재하는 것이 되므로 국부 넥은 밴드의 직각방향으로 작용하는 하중 \$P_n\$이 최대일 때 발생한다고 생각할 수 있다. 즉

$$dP_n = d(\sigma_n A) = 0 \quad (18)$$

이다. 단, \$\sigma_n = \sigma_1 \sin^2 \theta + \sigma_2 \cos^2 \theta\$ 이며 \$A\$는 국부 넥 발생영역의 단면적이다.

또한 밴드부에서 미소 국부 넥 발생에 의한 응력 비 \$(\sigma_2 + d\sigma_2)/(\sigma_1 + d\sigma_1)\$가 국부 넥 발생전의 응력 비 \$\sigma_2/\sigma_1 (= \alpha)\$와 같다고 두면

$$\frac{d\sigma_1}{\sigma_1} = \frac{d\sigma_2}{\sigma_2} \quad (19)$$

인 관계가 성립한다. 따라서 위의 두 식으로부터 다음 식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} & (\sigma_1 dA + Ad\sigma_1)(\sin^2 \theta + \sigma_2 / \sigma_1 \cos^2 \theta) \\ & = (\sigma_1 dA + Ad\sigma_1)(\sin^2 \theta + \alpha \cos^2 \theta) = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

여기서 \$\alpha_1 dA + Ad\alpha_1 = 0\$ 또는 \$\sin^2 \theta + \alpha \cos^2 \theta = 0\$가 만족하므로 길이 방향 변형이 없는 밴드에서는

$$\frac{d\sigma_1}{\sigma_1} = -\frac{dA}{A} = -\frac{dt}{t} = -d\epsilon_3 (= d\epsilon_1 + d\epsilon_2) \quad (21)$$

가 된다. 따라서 국부 넥 발생조건은 식 (19)과 (21)로부터 다음과 나타낼 수 있다.

$$\frac{d\sigma_1}{\sigma_1} = \frac{d\sigma_2}{\sigma_2} = -d\epsilon_3 \quad (22)$$

한편 식 (4)는 이 경우에도 성립하므로 식 (22)을 식 (4)에 대입하고 식 (6)의 관계를 이용하면 다음과 같이 된다.

$$G'(W^p) = \frac{\frac{d\sigma_1}{\sigma_1} (\sigma_1 \frac{\partial f}{\partial \sigma_1} + \sigma_2 \frac{\partial f}{\partial \sigma_2})}{\sigma_1 d\epsilon_1 + \sigma_2 d\epsilon_2} \quad (23)$$

식 (23)은 가비의 정리와 식 (22)의 관계를 이용하면

$$\begin{aligned} G'(W^p) &= \frac{\frac{d\sigma_1}{\sigma_1} (\frac{\partial f}{\partial \sigma_1} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_2})}{d\epsilon_1 + d\epsilon_2} \\ &= \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_1} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_2}}{d\epsilon_1 + d\epsilon_2} \end{aligned} \quad (24)$$

가 된다. 여기서 가공경화곡선을 \$\bar{\sigma} = F\bar{\epsilon}^n\$으로 가정하면 최종적으로 부 변형률이 음(\$\epsilon_2 < 0\$)인 경우에 국부 넥 발생조건은

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\epsilon}} = \frac{\bar{\sigma}}{Z_i} \quad \text{또는} \quad \frac{n}{\bar{\epsilon}} = \frac{1}{Z_i} \quad (25)$$

이며, 여기서

$$Z_i = \frac{2(1 - \alpha + \alpha^2)^{\frac{1}{2}}}{1 + \alpha} \quad (26)$$

인 관계가 성립한다.

또한 상당 변형률의 정의 식 (14)를 이용하면 식 (25)는 다음과 같이 나타내진다.

$$\begin{aligned}
 (\varepsilon_1)_l &= \frac{(2-\alpha)\bar{\varepsilon}}{2(1-\alpha+\alpha^2)^{1/2}} = \frac{2-\alpha}{1+\alpha}n \\
 (\varepsilon_2)_l &= \frac{(2\alpha-1)\bar{\varepsilon}}{2(1-\alpha+\alpha^2)^{1/2}} = \frac{2\alpha-1}{1+\alpha}n
 \end{aligned}
 \tag{27}$$

식 (27)은

$$(\varepsilon_1)_l + (\varepsilon_2)_l = n \tag{28}$$

인 관계를 갖으며 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ 좌표 상에서 $(\varepsilon_1)_l = n$ 인 절편을 갖는 기울기가 $(d\varepsilon_2)_l / (d\varepsilon_1)_l = -1$ 인 직선임을 알 수 있다. 따라서 단축인장 ($\alpha = 0, \rho = -0.5$)에서는 $(\varepsilon_1)_l = 2n$ 이 되고, 평면변형 ($\alpha = 0.5, \rho = 0$)에서는 $(\varepsilon_1)_l = n$ 이 된다. 그러나 순수전단 ($\alpha = -1, \rho = -1$)에서는 $(\varepsilon_1)_l$ 은 무한대가 되어 국부 넥은 발생하지 않는다.

또한 체적일정 법칙 $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$ 을 고려하면 부 변형률 ε_2 가 음인 영역에서 국부 넥은

$$(\varepsilon_3)_l = -(\varepsilon_2)_l - (\varepsilon_1)_l = -n (= \ln(t/t_0)) \tag{29}$$

인 임계 두께변형률에서 발생함을 알 수 있다.

다음에 국부 넥이 생기는 방향 θ (혹은 ϕ)에 대해서 검토해해서 검토해보자. 국부 넥 방향은 변형률이 영인 방향(direction of zero extension)이므로 좌표변환에 의해

$$d\varepsilon_l = d\varepsilon_1 \sin^2 \theta + d\varepsilon_2 \cos^2 \theta = 0 \tag{30}$$

가 성립한다. 따라서 국부 넥이 최대 주 변형률 ε_1 의 방향과 이루는 각도 θ 는 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$\theta = \tan^{-1} \left\{ \pm \sqrt{-\frac{d\varepsilon_2}{d\varepsilon_1}} \right\} = \tan^{-1} \left\{ \pm \sqrt{-\rho} \right\} \tag{31}$$

여기서 $\sigma_1 > 0$ 인 경우를 생각하면 $d\varepsilon_2 / d\varepsilon_1 < 0$ 이 아니면 θ 값이 존재하지 않으므로 국부 넥이 발생하지 않는다. 즉 $d\varepsilon_1 > 0, d\varepsilon_2 \leq 0$ 인 경우, 즉 $\rho = d\varepsilon_2 / d\varepsilon_1 \leq 0$ 에 한하여 θ 값이 존재하게 되고 국부 넥이 발생한다.

이 식으로부터 국부 넥 발생방향은 단축 인장 ($\rho = -0.5$)에서 $\theta = \tan^{-1} \sqrt{2} = \pm 54^\circ 74'$ ($\phi = \pm 35^\circ 16'$)가 되고, 평면변형 ($\rho = 0$)에서는 $\theta = \pi/2$ ($\phi = 0$)가 되고, 순수전단 ($\rho = -1$)에서는 $\theta = \pm 45^\circ$ ($\phi = \pm 45^\circ$)가 된다.

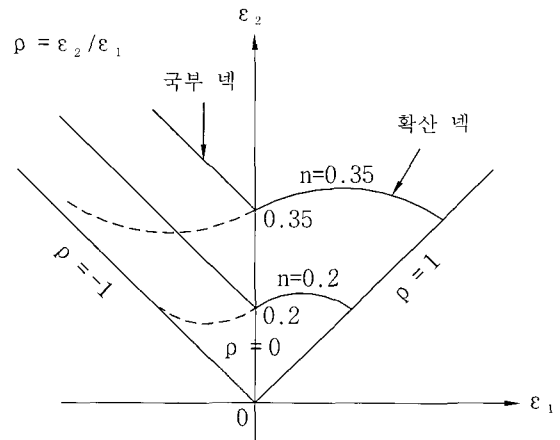


Fig. 4 확산 넥과 국부 넥 발생이론에 의한 성형한계

Fig. 4에 Swift의 확산 넥 발생이론과 Hill의 국부 넥 발생이론에 의한 성형한계를 주 변형률 ε_1 과 부 변형률 ε_2 의 좌표 상에 나타내었다.

한편 이방성 판재에 대한 Hill의 1948 항복조건식 (16)을 사용하면 식 (25)의 Z_l 에 대응하는 식은 다음과 같이 표현된다.

$$Z_l = \frac{(1+R_m)(1-\alpha\beta+\alpha^2)^{1/2}}{1+\alpha} \tag{32}$$

4. Marciniak-Kuczynski 의 이론

Hill의 국부 넥 이론은 부 변형률 ε_2 가 음인 영역만을 대상으로 하고 있고 부 변형률이 양 ($\varepsilon_2 > 0$)인 영역에서는 국부 넥이 발생하지 않는 것으로 생각하고 있으나 Keeler와 Backofen은 실험을 통하여 부 변형률이 양인 영역에서도 국부 넥이 발생한다는 것을 보였다.

부 변형률 ε_2 가 양인 이축 인장상태에서의 성형한계를 예측하기 위해 Marciniak와 Kuczynski는 평평한 판재의 일부에 주 변형률 방향에 수직으로 설정한 홈(groove)에 걸쳐 두께 혹은 강도상의 초기 재료결함(initial material imperfection)이 존재하고, 판재가 이축 인장 하에서 변형함에 따라 그것이 성장하여 국부 넥을 야기한다고 가정하여 부 변형률이 양인 영역에서 국부 넥 발생에 의한 성형한계를 이론적으로 예측하였다. 이 이론은 초기 재료결함의 크기에 따라 성형한계가 크게 의존하고 있으나 대체로 실제 여러 실험결과들과 잘 일치하고 있어 최근까지 판재의 성형한계 평

가에 가장 널리 이용되고 있다. M-K 이론은 그 후 여러 학자들에 의해 성형한계에 미치는 변형률 속도 민감성 지수, 재료 이방성, 항복함수의 형태 등의 영향을 고려할 수 있도록 수정되었고 또한 주 변형률 방향에 수직이 아닌 경사진 흠을 가정하여 변형률 비 $\varepsilon_2/\varepsilon_1$ 에 대해서 최소 성형한계를 주는 흠의 방향을 결정하는 것에 의해 $\varepsilon_2 < 0$ 인 영역까지 확장되었다. 이하에 M-K 이론에 대해서 상세히 설명한다.

이축 인장응력이 작용하고 있는 판재에 Fig. 5 와 같이 최대 주 응력 방향에 직각방향으로 판폭을 가로질러 좁은 영역에서 두께 혹은 강도가 초기 재료결함을 갖는다고 하면, 재료의 결함은 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$f_0 = \frac{F_B t_{0B}}{F_A t_{0A}} \quad (33)$$

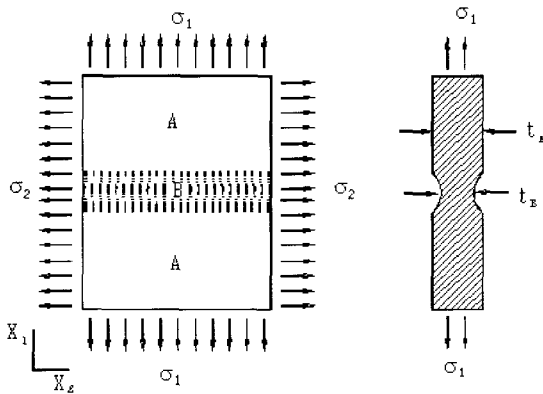


Fig. 5 M-K 이론의 초기 재료결함의 가정

M-K 이론의 해석에 필요한 기본 방정식은 다음과 같다.

(a) 평면응력 상태에서의 미세스의 항복조건식

$$\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_Y^2 (= \bar{\sigma}^2) \quad (34)$$

(b) 레비 · 미세스 구성식

$$\frac{d\varepsilon_1}{2\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{d\varepsilon_2}{2\sigma_2 - \sigma_1} = \frac{d\varepsilon_3}{-\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{d\bar{\varepsilon}}{2\bar{\sigma}} \quad (35)$$

(c) 상당 응력 $\bar{\sigma}$ 과 상당 변형률 증분 $d\bar{\varepsilon}$

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2} \quad (36)$$

$$d\bar{\varepsilon} = \sqrt{\frac{2}{3}} (d\varepsilon_1^2 + d\varepsilon_2^2 + d\varepsilon_3^2) \quad (37)$$

(d) 재료의 가공경화 특성을 나타내는 경화곡선

$$\bar{\sigma} = F(\varepsilon_0 + \bar{\varepsilon})^n \bar{\varepsilon}^m \quad (38)$$

한편 영역 A 와 초기 결함이 있는 영역 B 에서 1 방향으로 작용하는 힘은 서로 평형을 이루어야 하므로

$$t_A \sigma_{1A} = t_B \sigma_{1B} \quad (39)$$

또는

$$t_A \bar{\sigma}_A \frac{\sigma_{1A}}{\bar{\sigma}_A} = t_B \bar{\sigma}_B \frac{\sigma_{1B}}{\bar{\sigma}_B} \quad (40)$$

가 성립한다. 그런데 영역 A 와 영역 B 에서 가공경화 특성은 식 (38)에 따르므로 식 (40)는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$t_{A0} \exp(\varepsilon_{3A}) F_A (\varepsilon_{0A} + \bar{\varepsilon}_A)^n \bar{\varepsilon}_A^m \frac{\sigma_{1A}}{\bar{\sigma}_A} = t_{B0} \exp(\varepsilon_{3B}) F_B (\varepsilon_{0B} + \bar{\varepsilon}_B)^n \bar{\varepsilon}_B^m \frac{\sigma_{1B}}{\bar{\sigma}_B} \quad (41)$$

이를 정리하면 다음 식과 같다.

$$(\varepsilon_{0A} + \bar{\varepsilon}_A)^n \bar{\varepsilon}_A^m \frac{\sigma_{1A}}{\bar{\sigma}_A} = \frac{t_{B0} F_B}{t_{A0} F_A} \exp(\varepsilon_{3B} - \varepsilon_{3A}) (\varepsilon_{0B} + \bar{\varepsilon}_B)^n \bar{\varepsilon}_B^m \frac{\sigma_{1B}}{\bar{\sigma}_B} \quad (42)$$

$$= f_0 \exp(\varepsilon_{3B} - \varepsilon_{3A}) (\varepsilon_{0B} + \bar{\varepsilon}_B)^n \bar{\varepsilon}_B^m \frac{\sigma_{1B}}{\bar{\sigma}_B}$$

여기서 판재에 비례변형이 가해지는 경우를 생각하면 영역 A 에서는 그대로 비례변형이 유지되므로

$$\frac{d\varepsilon_{2A}}{d\varepsilon_{1A}} = \frac{\varepsilon_{2A}}{\varepsilon_{1A}} = \rho \quad (= \text{일정}) \quad (43)$$

가 성립한다. 한편 B 영역에서는 비례변형이 유지되지 않고, A, B 영역에서 2 방향 변형을 증분 $d\varepsilon_{2A}$, $d\varepsilon_{2B}$ 는 다음의 적합조건을 만족하여야 한다.

$$d\varepsilon_{2A} = d\varepsilon_{2B} \quad (\varepsilon_{2A} = \varepsilon_{2B}) \quad (44)$$

이들 식을 이용하여 ε_{3B} 를 $\bar{\varepsilon}_A$, $\bar{\varepsilon}_B$ 를 포함하는 식으로 나타내어보자.

먼저 A 영역에서 $\sigma_{1A}/\bar{\sigma}_A$ 를 구하면 식 (35)로부터 $\sigma_2/\sigma_1 = (2\rho+1)/(2+\rho)$ 관계가 있으므로

$$\bar{\sigma} = \sigma_1 \sqrt{1 - \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)^2} \quad (45)$$

로부터

$$\frac{\sigma_{1A}}{\bar{\sigma}_A} = \frac{2+\rho}{\sqrt{3}\sqrt{1+\rho+\rho^2}} \quad (46)$$

가 되고, 또한 A 영역에서 $d\varepsilon_{2A}(=\rho d\varepsilon_{1A})$ 를 구하면

$$d\bar{\varepsilon} = d\varepsilon_1 \sqrt{\frac{2}{3} \sqrt{1 + \left(\frac{d\varepsilon_2}{d\varepsilon_1}\right)^2 + \left(\frac{-d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2}{d\varepsilon_1}\right)^2}} \quad (47)$$

로부터

$$d\varepsilon_{2A} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\rho}{\sqrt{1+\rho+\rho^2}} d\bar{\varepsilon}_A \quad (48)$$

가 성립한다. 한편 B 영역에서 $d\varepsilon_{2B}$ 는 식 (34)과 식 (35)로부터 $\sigma_{1B}/\bar{\sigma}_B$ 와 $d\bar{\varepsilon}_B$ 에 의해 다음 식으로 주어진다.

$$d\varepsilon_{2B} = \frac{(2\sigma_{2B} - \sigma_{1B})}{2\bar{\sigma}_B} d\bar{\varepsilon}_B = \sqrt{1 - \frac{3}{4} \left(\frac{\sigma_{1B}}{\bar{\sigma}_B}\right)^2} d\bar{\varepsilon}_B \quad (49)$$

식 (44)에 따라서 식 (48)과 식 (49)을 함께 놓으면 $\sigma_{1B}/\bar{\sigma}_B$ 는 다음과 같이 구해진다.

$$\frac{\sigma_{1B}}{\bar{\sigma}_B} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{1 - \frac{3}{4} \frac{\rho^2}{(1+\rho+\rho^2)} \left(\frac{d\bar{\varepsilon}_A}{d\bar{\varepsilon}_B}\right)^2} \quad (50)$$

또한 영역 A 에서 ε_{3A} 는

$$\varepsilon_{3A} = -\varepsilon_{1A} - \varepsilon_{2A} = -\varepsilon_{2A}(1+\rho)/\rho \text{로부터}$$

$$\varepsilon_{3A} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{(1+\rho)}{\sqrt{1+\rho+\rho^2}} d\bar{\varepsilon}_A \quad (51)$$

가 된다. 영역 B 에서 $d\varepsilon_{3B}$ 는 식 (35)로부터

$$d\varepsilon_{3B} = \left(\frac{-\sigma_{1B} - \sigma_{2B}}{2\sigma_B}\right) d\bar{\varepsilon}_B \quad (52)$$

으로 나타내진다. $\sigma_{2B}/\bar{\sigma}_B$ 를 식 (34)과 식 (50)로부터 다음과 같이 구하고

$$\left(\frac{\sigma_{1B}}{\bar{\sigma}_B}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_{1B}}{\bar{\sigma}_B}\right)\left(\frac{\sigma_{2B}}{\bar{\sigma}_B}\right) + \left(\frac{\sigma_{2B}}{\bar{\sigma}_B}\right)^2 = 1 \quad (53)$$

따라서

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{2B}}{\bar{\sigma}_B} &= \frac{\left(\frac{\sigma_{1B}}{\bar{\sigma}_B}\right) + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{1B}}{\bar{\sigma}_B}\right)^2 - 4\left\{\left(\frac{\sigma_{1B}}{\bar{\sigma}_B}\right)^2 - 1\right\}}}{2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{1 - \frac{3\rho^2}{4(1+\rho+\rho^2)} \left(\frac{d\bar{\varepsilon}_A}{d\bar{\varepsilon}_B}\right)^2} \\ &\quad + \sqrt{\frac{3\rho^2}{4(1+\rho+\rho^2)} \left(\frac{d\bar{\varepsilon}_A}{d\bar{\varepsilon}_B}\right)^2} \end{aligned} \quad (54)$$

식 (52)에 대입하면 $d\varepsilon_{3B}/d\bar{\varepsilon}_B$ 는

$$\begin{aligned} -\frac{d\varepsilon_{3B}}{d\bar{\varepsilon}_B} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{1 - \frac{3\rho^2}{4(1+\rho+\rho^2)} \left(\frac{d\bar{\varepsilon}_A}{d\bar{\varepsilon}_B}\right)^2} \\ &\quad + \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{\rho}{\sqrt{1+\rho+\rho^2}} \left(\frac{d\bar{\varepsilon}_A}{d\bar{\varepsilon}_B}\right) \end{aligned} \quad (55)$$

가 된다.

이상의 식 (46), (50), (51), (55)를 식 (42)에 대입하면 최종적으로 다음 식이 얻어진다.

식 (56)와 식 (57)로부터 ε_{3B} 를 소거하면 최종적으로 $d\bar{\varepsilon}_A/d\bar{\varepsilon}_B$ 만을 변수로 하는 적분-미분방정식이 얻어진다. 이 식을 주어진 변형률 경로 ρ 에 대해서 4계 Runge-Kutta 방법으로 풀어서

$$\frac{\sqrt{1-B} \left(\frac{d\bar{\varepsilon}_A}{d\bar{\varepsilon}_B}\right)^m}{\sqrt{1-B} \left(\frac{d\bar{\varepsilon}_A}{d\bar{\varepsilon}_B}\right)^2} = f_0 \left(\frac{\varepsilon_{0B} + \bar{\varepsilon}_B}{\varepsilon_{0A} + \bar{\varepsilon}_A}\right)^n \exp(C\bar{\varepsilon}_A - \varepsilon_{3B}) \quad (56)$$

$$\epsilon_{3B} = \int_0^{\bar{\epsilon}_B} \left\{ A \sqrt{1 - B \left(\frac{d\bar{\epsilon}_A}{d\bar{\epsilon}_B} \right)^2} + D \left(\frac{d\bar{\epsilon}_A}{d\bar{\epsilon}_B} \right) \right\} d\bar{\epsilon}_B \quad (57)$$

$$A = \frac{\sqrt{3}}{2}, B = \frac{3\rho^2}{4(1+\rho+\rho^2)} \quad (58)$$

$$C = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1+\rho}{\sqrt{(1+\rho+\rho^2)}}, D = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{\rho}{\sqrt{(1+\rho+\rho^2)}}$$

$d\bar{\epsilon}_A/d\bar{\epsilon}_B = 0$ (또는 $d\bar{\epsilon}_A \cong 1 \times 10^{-4}$)가 만족할 때 판재는 국부적으로 안정성을 잃어버리는(local stability loss) 성형한계 $\bar{\epsilon}_A^*$ 에 달한 것으로 간주한다. 즉, 성형한계조건 $d\bar{\epsilon}_A/d\bar{\epsilon}_B = 0$ 을 만족할 때 변형은 홈부 B 영역에만 집중되고 A 영역에서는 제하가 일어난다. 또한, $d\epsilon_{2A} = d\epsilon_{2B}$ 이므로 $\epsilon_{1B} \gg \epsilon_{2B} \cong 0$ 가 되어 홈부에서는 평면변형 조건이 만족되면서 파단이 발생한다. 이것은 재료가 등이축 인장을 받는 경우에도 초기에는 등이축 인장 상태로 변형이 진행된다가 재료의 변형에 따라 재료 내부의 초기 국부결합이 성장하여 재료의 변형상태가 점차 평면변형 상태로 이동하여 최종적으로는 평면변형 상태에서 재료가 파단된다는 것을 의미한다.

판재가 비례변형 하에서 성형한계에 달했을 때의 한계변형률 $\epsilon_{1A}^*, \epsilon_{2A}^*$ 를 $\epsilon_1 - \epsilon_2$ 선 상에 표시한 것을 성형한계선도(forming limit diagram, FLD)라고 한다.

M-K 이론에 의해 구한 재료의 성형한계는 사용하는 이방성 항복조건식에 따라 특히 등이축 인장 하에서의 성형한계선의 형상이 크게 영향을 받는데 이는 항복곡면의 형상에 따른 등이축 인장상태와 평면변형 상태에서의 유동응력의 비(σ_m / σ_b)와 밀접한 관계가 있는 것으로 알려져 있다.

Fig. 6은 등이축 인장을 받는 판재의 인장 불안정 발생을 M-K 이론에 따라 계산한 결과로 변형초기에는 영역 A와 B에서 거의 균일한 변형이 진행된다가 변형이 어느 한계에 달하면 홈부 B 영역에 변형이 집중되고 있음을 나타낸다. 그림으로부터 변형률 속도 민감성 지수 m 값이 커질수록 국부적 불안정이 늦게 발생하여 큰 소성변형이 가능함을 알 수 있다.

또한 Fig. 7과 Fig. 8은 각각 FLD에 미치는 초기 재료결합 f_0 와 가공경화 지수 n 의 영향을 나타낸 것이다. 재료의 초기 결합을 나타내는 f_0 값이 클수록, 재료의 가공경화 지수 n 값이 클수록 FLD 레벨이 높아짐을 알 수 있다. Fig. 7에서 f 와 ϵ_{3A} 는 일축인장, 평면변형, 등이축 인장 시 영역 A에서 성형한계에 달했을 때의 재료 결합과 두께 방향의

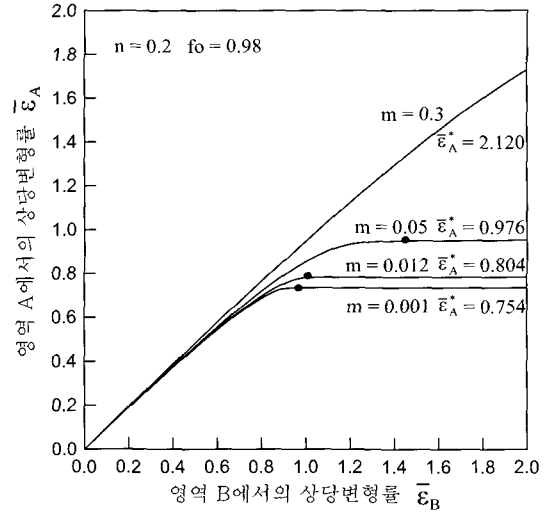


Fig. 6 초기 결함을 갖는 재료의 영역 A와 B에서의 변형발전 양상

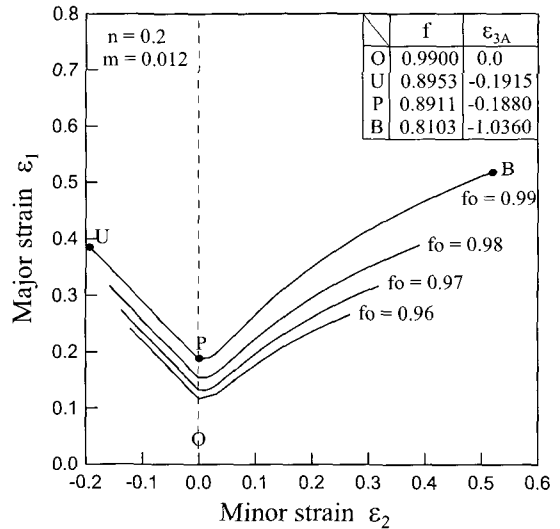


Fig. 7 성형한계에 대한 초기 재료결합의 영향

변형률을 각각 나타낸다.

위에서는 비례 변형경로에 따라 판재가 변형할 때 성형한계선을 도출하는 방법에 대해서 설명하였다. 그러나 일반적으로 자동차 프레스 성형공정에서는 판재는 비선형 변형경로(non-proportional strain path)에 따라 변형한다. 이런 경우에는 변형경로에 의존하는(path dependent) 성형한계선으로부터 재료의 성형성패 여부를 판단해야 한다.

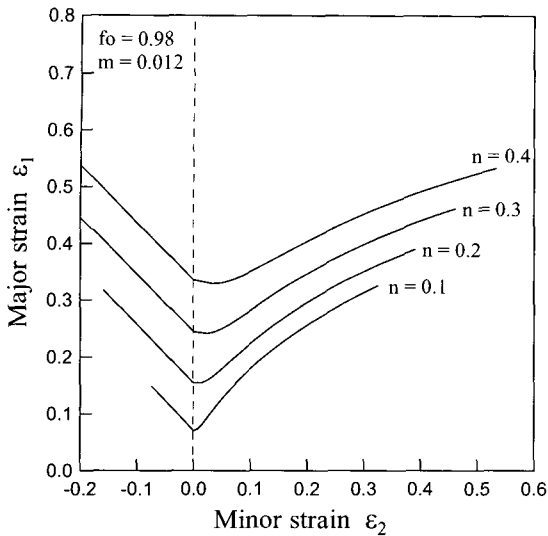


Fig. 8 성형한계에 대한 가공경화 지수의 영향

통상 판재 프레스 가공 중에 변형경로가 비선형적으로 바뀌는 경우에 대해서는 변형경로를 유한개의 선형 변형경로로 분할하여 성형한계선을 도출하는 방법이 이용되고 있다. 즉 재료가 등이축 인장변형 하에서 i 상태 $(\epsilon_{i1}, \epsilon_{i2})$ 까지 예변형을 받은 후 여러 변형경로에 따라 변형하는 경우는 식 (37)에서

$$\bar{\epsilon}_0 = \sqrt{\frac{2}{3}(\epsilon_{i1}^2 + \epsilon_{i2}^2 + \epsilon_{i3}^2)} \quad (59)$$

을 이용하여 위에서 논한 M-K 이론에 따라 해석하고 성형한계는 $(\epsilon_{1A}^*, \epsilon_{2A}^*)$ 로 결정된다.

Fig. 9는 판재가 비례 변형경로 하에서 성형한계값을 $\sigma_1 - \sigma_2$ 축 상에 나타낸 것이다. 이들 값은 Fig.8의 $n=0.1$ 인 경우에 성형한계도 상의 한계 변형률 $\epsilon_1^*, \epsilon_2^*$ 에 대해서 다음의 식 (60)에서 계산한 값이다.

$$\sigma_1 = \frac{\bar{\sigma}}{2} \left(\frac{1+R_m}{\bar{\epsilon}} \right) \left\{ \epsilon_1 + \epsilon_2 + \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{1+2R_m} \right\} \quad (60)$$

$$\sigma_2 = \frac{\bar{\sigma}}{2} \left(\frac{1+R_m}{\bar{\epsilon}} \right) \left\{ \epsilon_1 + \epsilon_2 - \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{1+2R_m} \right\}$$

von-Mises 복곡선과의 비교를 위해 $\sigma_y = 282MPa$ 인 경우에 대한 초기 항복곡면을 첨부하였다. 이 선도는 성형한계 응력선도(forming limit stress diagram, FLSD)라고 불린다. 많은 연구결과에서 변형경로가 변화할지라도 성형한계 응력선도는 하

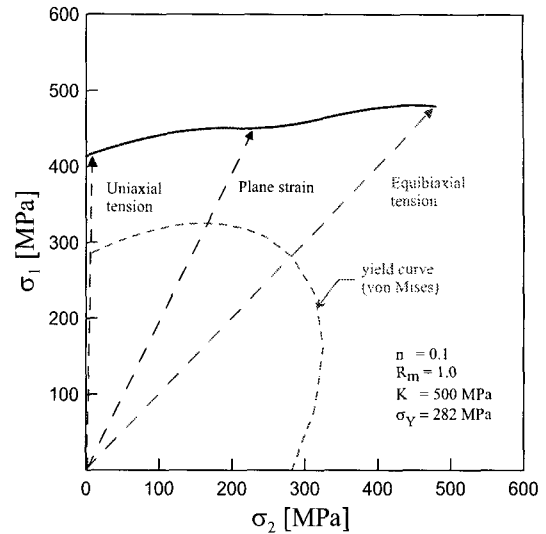


Fig. 9 Fig.8의 $n=0.1$ 인 경우에 대한 성형한계선도로부터 계산한 성형한계 응력선도

나의 직선으로 나타내진다($\sigma_1 = A_1\sigma_2 + A_2$)는 것이 알려져 있기 때문에 역으로 이 성형한계 응력선도를 이용하여 변형경로에 의존하는 성형한계선도를 구하는 것이 가능하다. 실험적으로 판재의 성형한계선도를 도출하기 위해서는 Hecker⁽¹⁰⁾가 제안한 구형펀치를 이용한 장출실험이 널리 이용되고 있다. 이 실험에서는 미리 직경 2.54mm의 원이 일정한 패턴으로 에칭된 폭이 다른 여러 직사각시편을 직경 50.8mm의 구형펀치(hemispherical punch)를 통해 장출하여 시편에 다양한 변형상태를 재현하고 파단 발생 시 파단부 주위의 변형률을 측정하여 안전변형 영역과 Neck 영향영역의 경계로 성형한계를 정의한다.

또 다른 방법으로는 Marciniak가 제안한 방법으로, 여기서는 양변을 다양한 크기의 원호로 절단한 특수형태의 직사각시편을 직경 200mm의 평평한 펀치(flat punch)를 통해 장출하여 다양한 변형상태를 재현하여 성형한계를 구한다. 전자는 보통 면외 변형실험(out-of-plane deformation test)이라 하고 후자는 면내 변형실험(in-plane deformation test)이라고 불린다. 면외 변형실험의 경우는 구형 펀치의 곡률에 의해, 시편의 두께 방향의 변형구배(strain gradient)가 존재하는 효과에 의해 면내 변형실험에서보다 성형한계선도가 높게 평가되는 특징이 있다.

Fig. 10은 Hecker의 펀치 장출실험에 의해 구한 성형한계선도의 대표적인 예를 나타낸다. 그림에서도 알 수 있듯이 성형한계선은 평면변형 상태에서 가장 낮은 값(FLD_0)을 갖고 있고, 대부

후 기

본 연구는 2003 년도 두뇌한국 21 사업의 연구비 지원에 의해 행해졌으며 이에 관계자 제위께 감사 드린다.

참 고 문 헌

- (1) 김영석, 2003, "소성역학", 시그마프레스.
- (2) 김영석, 박기철, 1993, "판재의 성형성 평가 실험에 대한 고찰", 대한기계학회지, 제 33 권, 제 1 호, pp. 47~65.
- (3) Kim, Y. S., Park, K. C., 1994, "A plane strain punch stretching test for evaluating formability of steel sheets", Metallurgical and Materials Transactions A, Vol. 25A, pp. 2199~2205.
- (4) 김권희, 1990, "판재성형용 프레스 금형설계를 위한 유한요소법의 응용", 대한기계학회지, 제 30 권, 제 3 호, pp. 231~236.
- (5) 양동렬, 1993, "박판성형에서의 CAD/CAM/CAE", 대한기계학회지, 제 33 권, 제 3 호, pp. 231~241.
- (6) 김영석, 1995, "자동차 금형의 최적 설계를 위한 CAE 기술", 자동차공학회지, 제 17 권, 제 2 호, pp. 24~34.
- (7) Swift, H. W., 1952, "Plastic instability under plane stress", Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 1, pp. 1~18.
- (8) Hill, R., 1950, "The mathematical theory of plasticity" Oxford University Press
- (9) Marciniak, Z., Kuczynski, K., 1967, "Limit strains in the process of stretch-forming sheet metal", International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 9, pp. 609~620.
- (10) Hecker, S. S., 1975, "Simple technique for determining forming limit curve", Sheet Metal Industries, Vol. 52, pp. 671~676.

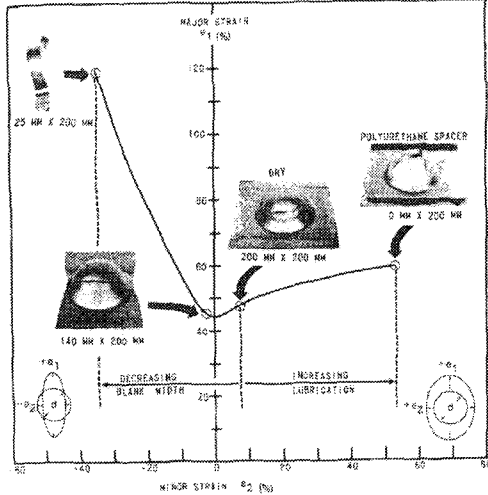


Fig. 10 Hecker의 펀치 장출실험에 의해 구한 성형한계 선도

본의 성형용 판재에서는 성형한계선도의 형상은 유사하다는 것이 실험적으로 알려져 있다. 한편 M-K 이론해석에서는 재료의 물성값으로 n , m , R , K 이외에 재료의 초기 결함을 나타내는 f_0 가 이용되는데 이 f_0 는 실험에서 구한 FLD_0 와 이론해석에 의한 FLD_0 를 일치시키기 위한 조정인자(adjustable parameter)로 사용된다.

5. 결 론

본 고에서는 판재의 성형한계를 이론적으로 평가하기 위한 대표적인 3 개의 이론에 대해서 설명하였다. 다음 호에서는 이외에도 자주 이용되고 있는 Hill의 분지 해석, Stören과 Rice의 이론을 중심으로 설명하고자 한다.