

가상 일의 원리에서 유한요소코드, 그리고 Hydrocode까지



하 재 선*

1. 들어가면서

Digital Computer의 발달과 더불어 수치연산에 의해 공학문제를 풀어내는 근사해법인 유한요소법은 공학(Engineering Research) 및 공학활동(Engineering)에 있어 없어서는 안 될 중요한 도구로 그 위상을 점유하고 있다. 산업사회에서 활용하거나 만들어지고 있는 수많은 제품들이 이 중요한 도구를 이용해 설계 및 제작되고 있다. 여기에 사용되고 있는 수 많은 유한요소코드(Finite Element Code)들의 변천사와 그들의 속성에 대한 이해는 많은 유한요소법 관련 공학자들(Engineering Researcher & Engineer)의 활동에 도움이 되리라 본다.

유한요소법이 주로 고체역학분야에서 연구 및 개발되어온 반면, 유한차분법(Finite Difference Method)은 유체역학분야에서 개발되어 왔다. 충돌문제와 같은 구조물의 대변형을 동반한 과도동적 거동의 이해는 유한요소법을 이용해 해결되어 왔으나, Shock 문제나 침투역학(Penetration Mechanics)과 같은 Shock Wave 전파를 다루거나 Mesh의 분리를 고려하는 분야에서 연속방정식, 상태방정식, 에너지방정식 등을 적용한 물질의 흐름의 이해는 유한차분법을 이용해 왔다. 그런가 하면 유체문제와 고체문제를 함께 다루어야 하는 분야(Fluid Structure Interaction)에서는 유한요소법과 유한차분법을 함께 적용하기도 한다.

본 논고는 유한요소법과 유한차분법의 근간이 되는 가상 일의 원리에 대한 중세기 선대 과학자들의 개발

과정과 유한요소방정식과 유한차분법에 있어 중요한 운동평형방정식의 유도를 소개하고, 이러한 정식화를 통해 만들어지는 유한요소법 코드들의 태동의 역사, 세계에서 널리 사용되어 왔던 대표적인 유한요소코드들의 개발과정, 유한차분법에서 잉태되어온 소위 Hydrocode의 기본 이론에 대한 이해 및 Hydrocode를 구성하는 Eulerian Hydrocode 및 Lagrangian Code의 개발과정, 그 외의 Fluid-Structure Interaction을 다루는 ALE(Arbitrary Lagrangian-Eulerian) 등을 소개하고자 한다. 더불어 코드들의 개발과정 이해와 코드들간에 비교를 통해 향후 기술의 방향에 대한 식견을 독자와 나누고자 한다.

2. 가상 일의 원리

우리가 널리 알고 있는 고전역학(Classical Mechanics)은 크게 보면 각기 다른 두 개의 원류에서 비롯되었다. 자연을 이해하고 분석하려는 과학자들의 눈에 같은 자연현상을 수학적으로 다른 방법에서 설명하고, 그 이론들이 각기 다른 방법에서 성숙되어 왔으나 해는 하나로 일치 된다. 다시 말하면 하나의 원류는 힘의 원리에서 바라본 뉴턴역학(Newton's Laws)과 또 다른 원류는 에너지원리에서 바라본 가상 일의 원리(The Principle of Virtual Work)이다. Vectorial Mechanics으로 분류되는 뉴턴역학은 힘과 모멘텀을 중요한 양으로 취급하여 기계시스템(Mechanical System)의 운동방정식을 유도하는 반면, Analytical Mechanics으로 분류되는 가상

* 대한항공 항공기술연구원

일의 원리는 힘과 에너지를 중요한 양으로 취급하여 기계시스템의 운동평형방정식을 정립화 한다.

뉴턴역학에서 보는 관점을 보면 다음과 같다. 뉴턴의 제3법칙인 작용 및 반작용의 법칙이 지배되는 기계시스템을 구성하는 입자들(Particles)을 Material Points라 부르며, 그들의 동시의 위치를 그 기계시스템의 형상(Configuration)이라 부른다. 이러한 형상의 정의는 Reference Frame이라 불리는 강체에 고정된 좌표체계(Coordinate System)에 의해 이루어진다. 이러한 상황에서 표면 S에 국한되고 부피 V를 점유하는 물체 질량의 전 모멘텀의 변화율(The Total Momentum Rate)은 체적력(Body Force, \mathbf{b})과 표면에 작용하는 외력인 표면력(Traction, \mathbf{t})의 합과 같다.¹¹⁾ 즉,

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV = \int_S \mathbf{t} dS + \int_V \rho \mathbf{b} dV \quad (1)$$

여기서 $\frac{d}{dt}$ 는 Total Derivative 또는 Material Time Derivative를 의미한다. Cauchy's Traction Law와 Divergence Theorem을 적용하여 아래와 같은 Cauchy's Equations of Motion을 얻을 수 있다.

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} - \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0 \quad (2)$$

구속조건(Constraints)인 경계조건(Prescribed Boundary Conditions)과 표면력조건(Prescribed Traction Conditions)과 더불어 방정식(2)의 문제를 경계치 문제의 Strong Form이라 부르며, 변형률의 Compatibility Equations과 변위와 변형률 관계식을 접목하여 변위로 표현되는 4차 미분방정식을 Navier's Equations이라 부르며, 이 방정식을 이용해 정해(Alytic 또는 Exact Solution)를 얻는다. 경계요소법(Boundary Element Method)에서 Navier's Equations은 Fundamental Solution을 얻는데 있어 매우 중요한 방정식이다. 유체문제에서는 Newtonian Fluid의 구성방정식을 방정식(2)에 접목하여 얻어진 방정식을 Navier-Stokes Equations이라 부른다. 변위를 기준으로 하는 근사해법인 유한요소법에서는 방정식(2)에 경계조건을 만족하는 가상변위(Virtual Displacement 또는 Variation)의 내적(Inner Product)을 주어진 영역(Domain)에서 적분을 수행하여 평형체계(Equilibrium System, Stationary Point)를 정립화하는 방법이 가중치 잔여법(Weighted Residual Method)이라

부르며, 대표적으로 Galerkin's Method를 들 수 있다. 이렇게 얻어진 적분방정식을 Weak Form이라 부르며 이를 가상 일의 원리의 형태로 나타내는데, 이에 형상 함수(Interpolation Function)을 적용한 공간이산(Spatial Discretization)에 의해 유한요소방정식을 얻을 수 있다. 가상 일의 원리로 귀결되는 Weak Form은 다음과 같다.

$$\int_V \rho \ddot{\mathbf{u}} : \delta \mathbf{u} dV + \int_V \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV = \int_S \bar{\mathbf{t}} : \delta \mathbf{u} dS + \int_V \rho \mathbf{b} : \delta \mathbf{u} dV \quad (3)$$

다른 한 원류는 앞서 언급한 바와 같이 Analytical Mechanics으로서 가상 일의 원리란 이론에서 비롯된다. 가상 일의 원리는 원래 정역학(Statics)에 적용된 가상 속도의 원리(The Principle of Virtual Velocities)이며, 또한 가상 변위의 원리(The Principle of Virtual Displacements)라고도 한다. 가상 일의 원리는 Leonardo da Vinci(1452-1519)의 저술²⁾에도 나오지만, 그 이전 Archimedes는 Work을 이미 사용한 것으로 알려졌다. Leonardo da Vinci 이후 100년이 지나 Galileo (1564-1642)는 가상 일의 원리가 일반적으로 적용될 수 있는 법칙이 될 수 있음을 인식하였으며,³⁾ Johann Bernoulli (1667-1748)는 1717년 Varignon에 보낸 편지에서 "virtual"의 개념을 사용하였으며, 현재 우리가 사용하고 있는 수식형태로 일반적인 정립을 하였다. 스위스의 Leonhard Euler는 자연의 법칙으로 "Minimal Principles"을 연구하여 정역학에 이미 Minimum Potential Energy을 이용하였다. Daniel Bernoulli는 변형률 에너지(Strain Energy)에 대한 정확한 표현을 사용했으며, Lagrange(1736-1813)에 가서 역학 에너지원리를 다루는 그의 명저인 *Mechanique Analytique*⁴⁾에서 Analytical Mechanics의 이론 정립이 체계화되었다. D'Alembert, Lagrange 그리고 Hamilton을 거치면서 동적에너지를 고려하여 가상 일의 원리는 동역학 문제에 까지 적용되는 중요한 이론으로 성숙되었다.³⁾ 따라서 Lagrange와 D'Alembert 이전에는 방정식(3)에서 가속도가 있는 부분이 없는 정역학 이론이었다. 또한 비선형 동적 문제에 적용하는 가상 일률의 원리(The Principle of Virtual Power)는 가상 일의 원리가 확장된 것이다.

가상 일의 원리는 열역학 제1법칙에서 비롯되었다. 일반적으로 열은 에너지의 한 형태로 알려져 있다. 그리고 에너지 보존의 법칙은 어떤 기계시스템이 운동에너지(Kinetic Energy)와 위치에너지(Potential Energy)의 형태로 저장되는 내부에너지(Internal Energy)를 갖고 있으며 탄성체에서 내부에너지는 변형률과 온도에

의해 결정된다. 어느 기계시스템에서 내부에너지는 전체 양이 계산되어 질 수 없고 변화량만이 측정될 수 있기에 에너지 보존의 법칙인 열역학 제1법칙은 다음과 같이 표현된다. 전자기 효과를 무시할 때 외력에 의해 기계시스템에 발생된 일 W_e 과 외부에서 들어온 열 Q 의 합은 운동에너지 T 와 내부에너지 U 의 증분과 같다. 수식적으로 표현하면 다음과 같다.⁷⁾

$$W_e + Q = \Delta T + \Delta U \quad (4)$$

운동에너지의 법칙(Law of Kinetic Energy)에 의하면 어느 기계시스템의 운동에너지 증분은 그 기계시스템에 작용한 내력의 일 W_i 과 외력의 일 W_e 의 합과 같다. 따라서 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$W_e + W_i = \Delta T \quad (5)$$

따라서 방정식(5)을 방정식(4)에 적용하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\Delta U + W_i = Q \quad (6)$$

이 때 열의 이동이 없는 단열과정(Adiabatic Process)으로 가정할 때 방정식(6)은 다음과 같이 표현된다.

$$W_i = -\Delta U \quad (7)$$

어느 기계시스템을 구성하는 Material Points가 움직일 때 즉 Displacement of Configuration이 주어질 때 운동에너지가 발생한다. 따라서 양의 일이 생성된다. 만일 임의의 매우 작은 변위 즉 가상 변위(Virtual Displacement)가 형상에 주어질 때 방정식(7)의 W_i 대신에 Virtual Work W'_i 로 표현되어 $W'_i > 0$ 이어야 한다. 역으로 생각하면 가상의 작은 변위가 주어질 때 $W'_i \leq 0$ 이라면 어떤 형상변위가 불가능하다. 이러한 이론을 Fourier (1768-1830)에 의해 처음으로 언급되어 Fourier's Inequality라 부른다. Fourier's Inequality는 말한다, 구속조건을 만족하는(Admissible) 가상변위에 대해 $W'_i \leq 0$ 을 만족한다면 그 기계시스템은 정지상태(정역학에서는 정지상태(at rest)에 있다. 그러나 Fourier's Inequality는 평형조건에 충분할 뿐 필요조건은 아니다. 가상 일의 원리는 가상의 변위가 Infinitesimal Limit Condition에서

Upper Bound Work W 가 $W \leq 0$ 를 만족한다면 그 기계시스템은 평형상태에 있다는 것이다. 다시 말하면 구속조건을 만족하는 Infinitesimal Virtual Displacement가 주어질 때 발생한 가상 일(Virtual Work)이 0이거나 음수일 때 그 시스템은 평형에 있다(In Equilibrium)는 것이다. 따라서 방정식(7)에서 $W'_i = -\Delta U$ 가 $\delta W' = -\delta U = 0$ ⁸⁾로 표현되어 내력에서 발생한 가상일 δU_i 과 외력에서 발생한 가상일 δU_e 의 합이 0이 된다. 즉,

$$\delta U = \delta U_i + \delta U_e = 0 \quad (8)$$

여기서 말하는 가상의 일이란 Potential Energy를 말함을 주목해야 한다. 즉 $\delta U = 0$ 은 평형상태에서 Stationary Property of the Potential Energy를 의미한다. 이것이 소위 The Principle of Stationary Total Potential Energy이다. 가상 일의 원리는 어떤 구성방정식에도 무관하며, 물체가 선형이건 비선형 거동이건 모두에 적용된다.⁹⁾ 정역학에서 탄성체에 내력으로부터 결과된 가상 일 또는 Potential Energy δU_i 는 다음과 같다.

$$\delta U_i = \int_V \sigma : \delta \epsilon \, dV \quad (9)$$

한편, 외력으로부터 결과된 가상일 또는 외력의 일로 인해 손실된 Potential Energy는

$$\delta U_e = -\int_V \rho b \cdot \delta u \, dV - \int_S \bar{t} \cdot \delta u \, dV \quad (10)$$

방정식(10)에서 음수인 것은 물체에 외력이 작용해서 손실된 Potential Energy임을 의미하기 때문이다. 결과적으로 방정식(8)은 다음으로 유도된다.

$$\int_V \sigma : \delta \epsilon \, dV = \int_S \bar{t} \cdot \delta u \, dS + \int_V \rho b \cdot \delta u \, dV \quad (11)$$

방정식(11)이 소위 정역학에 적용되는 가상 일의 원리이다. 어느 물체가 변형을 경험할 때 변형률의 성분들에 의해 Quadratic Function으로 Strain Energy Density가 표현될 수 있을 때 그 재료를 Hookean Material이라 부른다. 즉 Strain Energy Density는 다음과 같이 Quadratic Form으로 Tensor에 의해 표현될 수 있다.

$$U_d = \frac{1}{2} \epsilon : C : \epsilon \quad (12)$$

Matrix Form으로 표현하면

$$U_d = \frac{1}{2} [\boldsymbol{\varepsilon}]^T [C] [\boldsymbol{\varepsilon}] \quad (13)$$

C는 어떤 계수로 이루어진 4차 Tensor 이며, 탄성거동을 하는 Hookean Material에서는 Hookean Modulus를 의미한다. $\boldsymbol{\varepsilon}$ 는 변형률 Tensor이다. 여기서 C가 대칭이고 Eigenvalue가 양이기에 U_d 는 Positive Definite이다. 방정식(12)는 Legendre Transformation에 의해 응력을 얻을 수 있다. 또한 방정식(12)를 응력으로 표현하면 Legendre Transformation에 의해 변형률을 얻을 수 있다. 즉 Hookean Material은 다음과 같은 Conjugate Relations을 갖는다.

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial U_d}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial U_d}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (14)$$

Hookean Material의 구성방정식(Constitutive Law)은 방정식 (14)와 방정식(13)으로부터 Lamé's Coefficients, λ, μ 의해 다음으로 표현된다.

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{trace}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} \quad (15)$$

상기 방정식에서 \mathbf{I} 는 Identity Matrix를 말한다. 방정식 (11)은 방정식(14)을 접목하여 다음으로 표현된다.

$$\int_V \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV = \int_V \frac{\partial U_d}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV = \int_V \delta U_d dV = \delta U_i \quad (16)$$

Hookean Law를 만족하는 탄성체에 한해 방정식(16)에서 U_i 를 계산할 수 있기에 방정식 (8)은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\delta U = \delta U_i + \delta U_e = \delta(U_i + U_e) = \delta \Pi = 0 \quad (17)$$

$\Pi = U_i + U_e$ 는 Total Potential Energy라 부르며, 방정식(17)을 The Principle of Stationary Total Potential Energy라 부른다. 방정식(17)은 선형탄성해석에서 매우 중요한 원리로 Direct Method인 Rayleigh-Ritz Method에 의해 유한요소방정식이 만들어진다. 변형률이 아니라 응력을 기준으로 앞서 언급한 순서를 전개하면 The Principle of Complementary Virtual Work과 Complementary

Strain Energy Density, 그리고 Legendre Transformation 으로부터 The Principle of Stationary Total Complementary Energy를 유도할 수 있으며, 결국 Castigliano's Theorem으로 도달한다. The Principle of Stationary Total Potential Energy은 가상 일의 원리의 특별한 경우임을 알 수 있다. 마찬가지로 The Principle of Stationary Total Complementary Energy은 The Principle of Complementary Virtual Work의 특별한 경우이다. 이러한 이론들을 바탕으로 다양한 변형을 유도할 수 있다. The Principle of Stationary Total Potential Energy에 변위와 변형률 관계식, Prescribed Traction/Displacement Constraints을 Lagrange Multiplier Method를 이용하여 유명한 The Hellinger-Reissner Principle을 얻을 수 있고 그것의 특별한 경우인 The Reissner Principle을 유도할 수 있다. 또한 응력경계조건을 고려한 Pian[12]의 hybrid method도 생각할 수 있다. 이러한 Variational Formulation Theory는 유한요소방정식을 얻는데 필수적이다.

지금부터 정역학 문제가 아닌 동역학 문제로 돌아보자. 물체의 관성력으로부터 결과된 가상일을 D'Alembert's Principle와 가상 일의 원리에 적용하여 동적평형을 의미하는 수학적 정립이 Hamilton's Principle이다. 즉 물체의 관성력으로부터 결과된 가상 일을 고려하여 동적 평형상태에서 Hamilton은 물체가 t_1 에서 t_2 로 시간 변화 시 가상 일의 원리를 다음과 같이 표현하였다.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W' dt = 0 \quad (18)$$

다시 방정식(18)은 Potential Energy에 의해

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T dt - \int_{t_1}^{t_2} \delta U dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = 0 \quad (19)$$

방정식(19)는 다시 Lagrangian Function L 의 도입으로 다음과 같이 표현된다.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0, \quad L = T - U \quad (20)$$

연속체(Continuum)가 아닌 질량이 가운데 집중된 Particles로 가정하는 동역학 문제에서 방정식(20)에 의해 유도되는 평형방정식을 Lagrange's Equations of Motion이라

부른다. 변분학(Calculus of Variation)에서는 Euler's Equation이라 부르며 간혹 Euler-Lagrange's Equations of Motion이라 부르기도 한다. 연속체에서는 방정식(20)은 다음과 같이 표현된다.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} \int_V \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dV + \int_V \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u} dV + \int_V \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} dV - \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} dV \right) dt = 0 \quad (21)$$

방정식(21)은 변위에 1차 변분의 적용으로

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\int_V \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot \frac{d\delta\mathbf{u}}{dt} dV + \int_V \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta\mathbf{u} dV + \int_V \rho \mathbf{b} \cdot \delta\mathbf{u} dV - \int_V \boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{\varepsilon} dV \right) dt = 0 \quad (22)$$

시간 t_1 와 t_2 에서 변분들 $\delta\mathbf{u}(t_1) = \delta\mathbf{u}(t_2) = 0$ 이기에

$$\left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot \delta\mathbf{u} \right)_{t_1}^{t_2} = 0 \quad (23)$$

방정식(23)을 방정식(22)에 삽입하여 부분적분을 고려하면 방정식(23)은

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(- \int_V \rho \frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} \cdot \delta\mathbf{u} dV + \int_V \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta\mathbf{u} dV + \int_V \rho \mathbf{b} \cdot \delta\mathbf{u} dV - \int_V \boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{\varepsilon} dV \right) dt = 0 \quad (24)$$

결국 방정식 (24)의 내부 항들은 다음으로 표현된다.

$$- \int_V \rho \frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} \cdot \delta\mathbf{u} dV + \int_V \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta\mathbf{u} dV + \int_V \rho \mathbf{b} \cdot \delta\mathbf{u} dV - \int_V \boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{\varepsilon} dV = 0 \quad (25)$$

Divergence Theorem과 Cauchy's Traction Law을 방정식(25)에 적용하면 다음과 같다.

$$- \int_V \rho \frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} \cdot \delta\mathbf{u} dV + \int_V (\bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \delta\mathbf{u} dV + \int_V \rho \mathbf{b} \cdot \delta\mathbf{u} dV + \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta\mathbf{u} dV = 0 \quad (26)$$

방정식(26)에서 \mathbf{n} 은 Direction Cosine이다. 방정식(26)으로부터 예전에 언급한 Strong Form의 운동 평형방정식을 얻는다.

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \rho \frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2}, \quad \bar{\mathbf{t}} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad (27)$$

방정식(27)은 방정식(2)와 동일함을 주목해야 한다. 결론적으로 말하면 가상 일의 원리나 뉴턴역학이나 어느 쪽에서 시작을 하던 같은 운동 평형방정식을 얻으며, 또한 똑같은 유한요소방정식으로 유도된다.

3. 유한요소코드의 태동

구조해석에 있어 처음으로 프레임 개념을 Hrennokoff¹³⁾가 발표하였으며, 연속체인 고체에 일차원 격자를 적용하여 응력해석을 수행한 연구가 McHenry¹⁴⁾에 의해 이루어졌다. Levy¹⁵⁾는 항공기 날개해석을 수행하면서 강성(Stiffness)이나 변위(Displacement)를 이용한 접근이 향후 중요한 방법이 될 것임을 제시하였다. 앞장에서 서술한 가상 일의 원리는 유한요소법 이론의 정립화에 가장 중요한 영향을 미쳤으나, 유한요소법의 태동시에는 Boeing의 항공구조 엔지니어들이 기존에 사용해왔던 Matrix Structural Analysis의 기반에 불과했다. 물론 이들의 작업도 가상 일을 기초로 하고 있다. 이러한 기법은 Argyris¹⁶⁾의 일련의 논문에서 정립화 되었으며, 여기에서 에너지원리가 매우 중요함을 설명하였다.

유한요소법의 아버지라 불리는 U.C. Berkeley의 Clough (MIT에서 지진공학으로 박사학위를 받고 1949년 Berkeley 토목공학과에서 교수생활을 시작함)가 1952년 Boeing의 Summer Faculty Program에 고용되면서 현재에 사용되는 유한요소법의 태동이 시작되었다고 문헌들은 보고있다. 이때 Clough는 Boeing의 Structural Dynamics Unit의 책임자인 Jon Turner를 만나게 된다. Delta Wing의 진동특성과 공탄성해석에 관심이 있던 Turner는 Clough에게 정하중해석을 요구한다. 삼각형 형태인 Delta Wing을 기존의 일차원 Beam과 Struct 기법을 시도하던 Clough는 실험치와 전혀 일치하지 않는 것을 재차 확인하였다. 실패로 끝난 그 프로그램은 일년 후 Clough가 1953년 Summer Faculty Program에 다시 들어가 이전 겨울에 Turner가 제시한 Delta Wing의 강성에 의한 해석기법을 개발하게 된다. 삼각형과 사각형 모양

들의 평판 강성을 산출하였는데, 불규칙한 형상에도 쉽게 적용할 수 있고 강성을 쉽게 산출할 수 있기에 Clough는 사각형보다 삼각형이 더 유용함을 인식하였다. Boeing 구조 엔지니어들(Turner, Martin, Topp)은 이 방법을 Direct Stiffness Method라 불렀다.¹⁾ 1954년 1월 Institute of Aeronautical Sciences의 연례모임에서 1953년 여름에 Clough와 함께 연구해서 얻은 결과를 Turner가 발표하였으나,¹⁾ Clough가 그 결과에 대한 이해가 부족해 출판을 미루다 1956년에 가서 출판이 된 이 논문을 세계 최초의 유한요소논문으로 인정되고 있다. Delta Wing의 진동 및 공탄성 해석보다 응력산출에 관심을 갖고 있던 Clough는 그 뒤 1956년 Norway의 Norwegian Institute of Technology에 안식년을 가면서 응력산출을 위한 연구를 지속한다. 이러한 기법에 대한 이론적 설명이 동시에 Argyris의 논문들¹⁶⁾에서 언급되는데, Clough는 Norway에서 Argyris의 논문들이 구조역학분야에서 가장 중요한 논문임을 인식하였다고 한다.¹⁷⁾ 그 후 U.C. Berkeley는 유한요소법을 대동하는 중요한 산실이 되어가고 있었다. 안식년을 마치고 다시 Berkeley에 돌아온 Clough는 Matrix Analysis of Structures라는 강좌를 대학원에 개설한다. 이 강좌는 유한요소법을 이용한 응력해석, 평판해석 및 쉘해석을 다룬다. Ari Adini와 같이 석사과정으로 있던 Ed Wilson은 1958년 Clough의 논문 지도하에 사각형의 평면응력요소를 기반으로 프로그램을 완성한다. 1960년 Clough는 중요한 논문¹⁸⁾을 발표하는데 여기에 처음으로 Finite Element라는 용어를 공식적으로 쓰이게 된다. Adini는 1962년 The Finite Element Analysis of Shell Structures란 타이틀로 박사학위를 받는다. Wilson은 비선형해석에 대한 연구로 박사학위를 받는다. 1963년 Wilson과 Clough는 Fortran을 이용하여 Symbolic Matrix Interpretive System을 개발하여 배포한다. 이 프로그램은 타 대학에서 독자적으로 수정 및 확장하여 유한요소프로그램의 개발 및 다른 프로그램 개발에 엄청난 효과를 보았다.¹⁹⁾ 1964년 Clough는 박사과정에 있던 Carlos Felippa(현재 콜로라도 대학 항공과 교수)과 함께 좌굴 및 비선형 거동문제에 6개 절점을 갖는 삼각형요소로 연구를 수행하여 Consistent Mass, Natural Area Coordinate System 등의 연구결과를 발표하였다. Northwestern 대학에서 교수로 있던 영국 태생의 폴란드계 유대인 Zienkiwicz는 학술대회에서 Clough의 논문을 보게 되고 영국으로 돌아가 유한요소법에 Galerkin's Method를 접목하여 Thermal Field에

확장시킨다. 수리에 천재 학자인 Bruce Irons는 1966년 Isoparametric Formulation을 이용한 수치적분 방법을 발표한다.^{20,21)} 개념적으로 Taig²²⁾가 처음 발표하였다. Bruce Irons는 Zienkiwicz와 함께 수많은 획기적인 아이디어로 유한요소법의 발전에 기여한다. Berkeley의 R.M. Taylor는 이 기법을 이용한 유한요소프로그램을 작성하여 그 유효성을 확인시킨다. 1969년 Wilson은 초기의 무명의 코드개발을 바탕으로 정/동적 유한요소 코드인 새로운 코드를 개발하는데, 이 코드가 그 유명한 SAP(Structural Analysis Program)이다. 1년도 안 걸려 개발한 SAP은 세계 여러 군데 배포하게 되는데, 1973년 Bathe는 동적문제를 위한 모듈을 첨가하여 SAP IV를 발표한다. SAP IV는 완전히 무료로 배포되어 유한요소코드 개발사에 가장 큰 획을 긋는다. 학계 뿐만 아니라 산업계에서도 유한요소코드의 사용이 제품개발에 적용되었고, 그리하여 유한요소법 연구에 많은 연구자금이 몰리게 된다. 유한요소법에 대한 연구는 연속체역학의 연구로도 확장되어, Malvern과 그의 스승인 Truesdell을 비롯해 Noll, Eringen, Gurtin, Prager 등과 같은 연속체역학 학자들이 비선형 연속체역학을 이용한 유한요소법의 발전에 지대한 기여를 하여 수학적 성숙을 가져오게 된다.

SAP의 발전에는 Bathe를 언급하지 않을 수 없다. 1943년 독일 베를린에서 태어난 Bathe는 2차 세계대전이 끝날 무렵 북 독일의 작은 도시 Oldenburg로 이사를 가서 수석으로 고등학교를 졸업한다. 그런 뒤 South Africa에서 도로공사의 측량사를 일하다 Cape Town 대학의 토목공학과에 입학한다. 1969년 Canada의 Calgary 대학에서 석사를 마친 후 U.C. Berkeley의 Alexander Scordelis의 지도하에 교량해석을 위한 전산방법을 연구한다. 그 뒤 Clough와 Wilson의 지도로 거대 Eigenvalue 문제를 위한 Eigen-Solvers를 개발한다. 1971년 박사학위를 취득 후, Post-doctoral Fellow로서 1974년까지 SAP IV와 NONSAP를 Wilson과 함께 개발한다. 1975년 MIT에 교수로 임명된 Bathe는 NONSAP을 발전시켜 상업용 코드인 ADINA를 개발한다.²³⁾ SAP IV와 NONSAP은 국내에도 들어와 처음으로 원자력연구소에서 한글 매뉴얼이 개발되었고 항공, 조선, 건축, 토목 및 자동차 업계에 파급되어 국내의 산업발전에도 기여하였다. SAP IV를 시작으로 범용 유한요소코드들이 세계적으로 널리 개발되었다. 다음은 대표적인 정/동하중 해석을 위한 범용 유한요소코드들에 대한 간략한 소개를 하고자 한다.

4. 유한요소코드들의 세계

Clough와 동시에 유한요소법을 개척한 독일 슈트가르트대학(University of Stuttgart)의 Argyris는 동료들과 함께 변위 유한요소법 코드인 ASKA(Automatic System for Kinematic Analysis)를 1969년에 발표한다.²⁴⁾ ASKA는 정하중, 동하중, 그리고 비선형해석을 위해 개발되었다. 추가 프로그램이 필요 없이 응력과 진동해석을 자동으로 수행한다. 또한 새로운 요소개발과 Equation



Solver를 장착될 수 있는 연구도구가 되도록 개발되었다.

유한요소 코드의 세계에서 가장 널리 쓰이고, 가장 큰 Market Share를 점유하고 있는 MSC의 MSC.NASTRAN의 전신인 NASA의 NASTRAN은 유한요소코드의 개발사의 매우 중요한 사건이다. 1964년 미국의 여러 NASA 센터들은 범용 구조해석 프로그램 개발에 합의를 한다. Analytical Mechanics, Numerical Methods, 그리고 Computer Programming의 최신의 최고의 기술을 병합하고, 변위와 하중을 기초로 한 유한요소기법을 통합하고, 범용을 추구하며 3차원 구조물의 구조해석이 가능하고, 지속적인 개선이 가능하며 최대한 사용자 편의에 중점을 두며 모든 방면에 문서화함에 기본적인 개발목표를 두었다. NASA가 프로젝트의 Proposal을 만들고 여기에 여러 협력업체들이 참여하는데, 협력 업체들 중에는 MacNeal Schwendler(Richard MacNeal와 Mr. Robert Schwendler가 1963년 설립하여 운영하던 Consulting 회사), Martin Baltimore, Bell Aero Systems 등이 있다. NASTRAN 프로젝트의 총괄책임자는 Goddard Space Flight Center의 Thomas G. Butler이며, 5년에 걸쳐 3내지 4백만 달러의 프로젝트 비용이 소모되었다. 이 때의 NASTRAN은 150,000 Fortran Cards로 구성되었다. 1970년 가을 공개되어 보급되었고 University of Georgia에서 적은 가격에 공급하며 관리되고 있다. 이것이 COSMIC/NASTRAN이다. 그 외에 Universal Analytics Inc가 NASTRAN을 상용화시킨 UAI/NASTRAN이 있다. UAI는 Multidiscipline optimization code로 유명한 ASTROS(Automated STRuctural Optimization System, Wright-Patterson Air Force Base)와 결합면서 항공기 및 우주선 구조설계를 위해 개발되었다. 또한 CSAR이 운영하는 CSA/NASTRAN이 있으며 1991년 NASA의 NASTRAN을 PC version으로 개발한 Macro Industries의 MI/

NASTRAN도 있다. 그리고 ANSYS, Inc가 운영하는 AI*NASTRAN도 있다. 그러나 가장 획기적인 성공은 Richard MacNeal이 자신의 회사인 MSC에서 NASTRAN의 상업화에 성공하면서 세계에서 가장 크고 우수한 범용유한요소코드로 성장시킨 MSC.NASTRAN을 들 것이다. 1971년 소유권을 발표하면서 NASTRAN를 MSC/NASTRAN이란 명칭으로 상업화기 시작한다. 이 코드가 오늘날의 MSC.NASTRAN이다. 현재 1,500,000 줄로 구성되었다. 1999년 6월 MSC는 UAI/NASTRAN을 인수한다. MSC는 그 뒤 Pre/Post Processor로서 세계에서 가장 훌륭한 성능을 갖고 있는 PDA Engineering의 PATRAN를 흡수하며, 차후에 언급할 Eulerian Code인 PISCES²⁵⁾를 인수하여 명실상부 세계에서 가장 큰 구조해석 프로그램 공급자가 된다.

U.C. Berkeley의 Wilson이 제작한 축대칭 평면응력 프로그램을 1966년에 입수했던 LMSC(Lockheed Missile and Space Company, Sunnyvale California)는 1968년 Arizona 대학의 Kamel 교수와 협력하여 항공 및 비행 공문제에 적용되는 최신의 구조해석 코드인 DAISY Code를 확보한다. DAISY는 원래 Kamel이 1967년에 만든 KAMEL 프로그램의 후신이다. LMSC와 Arizona 대학 간에 지속적인 프로그램 향상을 하여 왔다.

그 외에 Mechanics Research, Inc가 1968년 개발한 STARDYNE은 Control Data Corporation의 Cybernet에 장착하였고, 1971년 STARDYNE2가 제공되어 구조물의 정/동적 해석을 수행할 수 있다. 특히 원자로 구조설계에 STARDYNE이 많이 활용되었다.

STRU DL은 MIT 토목공학과에서 개발한 교량설계 및 토목 건축



에 명성을 날린 구조해석

코드이다. 현재는 Georgia Tech 토목공학과 Kenneth Will 교수가 Director로 있는 CASE Center(Computer-Aided Structural Engineering Center)에서 GT-STRU DL이란 명칭으로 25년에 걸쳐 개발되고 있고 전 세계 30개국에서 널리 사용 중이며, 사용자 모임이 지금도 이어져 가고 있다.

MARC는 Brown 대학에서 고체역학을 가르치던 Marcal 교수가 Hibbitt과 함께 비선형 구조해석에 중점을 두고 개발하여 1970년에 발표한 강력한 범용 유한요소 구조해석 코드이다. Hibbitt이 1972년 MARC에서 나와 ABAQUS를 발표하기 전에는 가장 우수한 비선형 코드이나, Zienkiwicz의 강력한 기술적 지원으로 개발

되다 ABAQUS의 시장점유율에 밀려 MSC가 인수하였다. 지금은 MSC.MARC로 병렬버전으로 공급되고 있는 매우 우수한 코드로 알려져 있다.

ABAQUS는 비선형 범용 유한요소코드로서 가장 널리 사



용되고 있는 매우 우수한 코드이다. Hibbitt이 MARC에서 나와 Brown 대학 고체역학 실험실 출신들을 중심으로 세계에 널리 활동하던 부교수급의 동료들과 합심 개발하여 세계 최고의 비선형 코드를 개발한다. 이 코드는 특히 세계의 각 대학 및 대학원실에서 연구와 병행에 애용하고 있다. 동적 문제는 Implicit 기능의 ABAQUS STANDARD와 Explicit 기능의 ABAQUS/EXPLICIT으로 구성된다. Sandia National Laboratories에서 HONDO II를 향상시켜 PRONTO 2D 및 PRONTO 3D를 개발한 David Flanagan이 ABAQUS의 EXPLICIT 모듈 개발에 참여하고 있다.

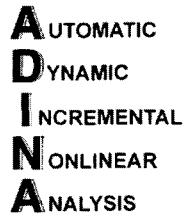
MARC의 개발과 동시에 1969년 Westinghouse에서 나온 Swanson은 MARC에 견주는 비선형 범용 유한요소코드인 ANSYS를 1970년에 발표한다. 현재 600여명의 직원을 두고 세계에 널리 활용되고 있는 ANSYS는 다양한 모듈을 갖추어 통합패키지를 이루고 있다.



GM에서 나온 Kothawala가 EMRC(Engineering Mechanics Research Corporation)를 설립하여 NISA Family를 구축하였다. 특히 NISA/Composite은 복합재료해석에 뛰어나며, Texas Austin 대학의 Reddy 교수가 기술 지원을 하고 있다. 특히 PC Version으로 강력한 가격 경쟁력을 갖고 있는 작은 규모의 상용 코드이다.

현재는 EDS에 합병된 SDRC의 IDEAS Master Series는 통합패키지로서 CAD/CAM/CAE를 지원하는 강력한 유한요소 코드이다. 이 코드는 25년 이상의 개발 역사를 갖고 있다.

비선형 범용 유한요소코드로서 ADINA가 있다. ADINA는 UC Berkeley에서 NONSAP의 개발경험을 바탕으로 MIT로 자리를 옮긴 Bathe 교수가 1986년 설립한 ADINA R&D에서 개발되고 있는 코드이다. 구조해석 뿐만 아니라 열전달 및 유체해석까지 가능하다.



Geotech 분야에서 주로 사용하고 있는 비선형 유한요소코드 DIANA가 있다. 네덜란드 회사 TNO가 1972

년부터 개발하여 주로 3차원 콘크리트해석에 강한 건축/토목용 구조해석코드이다.

그 외에 NTH(Norwegian Institute of Technology)에서 Bergan에 의해 발표한 FENRIS(Finite Element Nonlinear Integrated System), 독일 Stuttgart 공과대학에서 발표한 비선형 코드 LARSTRAN '80, 1970년에 발표되었고 영국에서 널리 사용되고 있는 범용 유한요소 구조해석코드인 PAFEC(Program for Automatic Finite-Element Calculations), Rice 대학의 Akin 교수의 PC용 FINITE/GP, 벨기에 Aerospace Liege 대학 항공공학과에서 1965년 발표한 SAMCEF, NTH에서 1980년에 발표한 Superelement 구조해석을 위한 SESAM'80 등을 들 수 있다.

5. Hydrocodes의 세계

전산연속체역학(Computational Continuum Mechanics)은 전산유체역학(Computational Fluid Dynamics)과 전산고체역학(Computational Solid Mechanics)을 포함한다.²⁶⁾ 이러한 관점에서 Hydrocodes는 전산연속체역학을 이론적 바탕으로 유체나 고체, 또는 고체와 유체의 결합으로 이루어진 연속체가 Hypervelocity Impact에 의해 경험하는 대변형, 대회전, 대변형률의 거동(Highly Dynamic Response, High-Speed Strain Response, Hypervelocity Impact Response)을 해석하는 코드를 말한다.^{26)~30)} 일반적으로 고체역학분야에서는 구성방정식의 설정에 용이한 Lagrangian 접근에서 Hydrocodes가 발달한 반면, 연속체의 Stress Flow를 고려해야 하는 뉴턴유체역학분야에서는 Eulerian 접근에서 Hydrocodes가 개발되어 왔다. Hydrocode는 흔하지 않지만 Wave Code라고도 부르는데 이는 요소의 경계에서 Riemann 문제를 풀고 Shock Viscosity포함해서 Shock Wave의 전파를 해석할 수 있는 코드들에서 연유된다. 다음에서 자세히 언급할 Eulerian과 Lagrangian의 장단점 극복을 위해 ALE(Arbitrary Lagrangian-Eulerian), SALE(Simplified Arbitrary Lagrangian-Eulerian), CEL(Coupled Eulerian-Lagrangian), Meshless Method의 일종인 SPH(Smoothed Particle Hydrodynamics) 등의 이론들이 Hydrocode를 구성하고 있다.

우선 Hydrocode에 대한 상세한 언급에 앞서 Hydrocode를 크게 두 가지 관점에서 분류된다. 무수한 Particles로 이루는 연속체(또는 기계시스템)의 형상(Configuration)이 시간의 변화와 함께 새로운 형상을 가질 때 각 Particle

의 이동을 우리는 변위(Displacement)라 부른다. 이 때 변위의 수학적 묘사에서 Eulerian Description과 Lagrangian Description으로 나누어진다. Lagrangian Description은 Material의 Particle에 Coordinate System를 고정하기에 Material Description이라 부르며, Eulerian Description은 공간에 Coordinate System를 고정하기에 Spatial Description이라 부른다. Lagrangian Description은 Lagrangian Mesh로 영역을 분할(Spatial Discretization)하며, Eulerian Description은 Eulerian Mesh로 영역을 분할한다. Mesh란 연속체를 나타내는 수학적 영역을 공간적 분할을 위한 공간분할의 수학적 묘사이다. 따라서 연속체를 구성하는 Material Particle에 고정된 Lagrangian Mesh는 Material Deformation, Material Rotation, Material Distorsion에 Mesh 또한 Mesh Deformation, Mesh Rotation, Mesh Distorsion을 경험한다. 따라서 Mesh의 심한 변형은 적분의 정확성에 충족시키지 못하기 때문에 Rezoning을 요구한다. 그런가 하면 Eulerian Mesh는 공간에 고정하기에 Material Particles의 변위에 상관 없이 불변하다. 따라서 어떤 변형에도 Rezoning이 필요하지 않다. Rezoning은 수학적 복잡성으로 인해 정확한 해를 얻는데 심각한 장애요인이다. 또한 Rezoning 작업이 계속적으로 요구된다면, 이미 Lagrangian Description을 떠난 것이다. 왜냐하면 정확한 해에도 영향을 미칠 뿐만 아니라 Time Step Size(시간적분에서 적용된 시간 증분 크기)가 허용할 수 없는 크기로 작아지게 된다. 심한 경우에는 Gaussian Quadrature Points에서 Jacobian의 Determinant가 음수로 나타나서 계산을 할 수 없게 된다. 따라서 Material이 심하게 Distorsion이 일어나지 않는 기계시스템의 형상변형(Configuration Changed)에 Lagrangian Mesh가 적용되며, Shock Wave의 전파를 경험하는 구조물에는 제한적으로 응용된다.

고체역학분야에서는 Lagrangian Description이 강력한 장점을 지니고 있다. 즉 응력과 변형률에 대한 정확한 구성방정식의 설정(Constitutive Modeling)이 가능하며, 복잡한 경계면에 정확한 경계조건을 부과할 수 있다. 그런 반면에 Eulerian Description은 Material이 심한 변형을 경험하는 것을 허용하나, 복잡한 경계조건을 다루기 어려우며, 질량 유입 등의 Material Convection으로 인해 정확한 구성방정식의 설정이 어렵다. 그러나 재료의 파열을 묘사할 수 있으며, Hypervelocity Impact이나 Shock Wave 전파에 의해 Material이 심하게 변형할 지라도 원래의 Eulerian Mesh를 변형 없이 유지한다. 또한 요소 경계면에 질량의 유입 또는 그 반대를 허용

한다. 따라서 Penetration Mechanics, Erosion Mechanics, Metal Forming 등에 Eulerian Description을 적용한 Eulerian Codes가 개발되어 왔다.^{19),26)~31)} 고체와 유체간의 반응을 고려하는 Fluid-Structure Interaction을 다루는 경우에 움직이는 경계면의 처리는 Eulerian Description으로도 매우 어렵다. 따라서 Eulerian과 Lagrangian을 결합하는 새로운 개념이 ALE(Arbitrary Lagrangian Eulerian) 방법이다. ALE 방법은 Fluid와 Structure간에 나타나는 Interaction을 고려하기 위해 Eulerian과 Lagrangian의 단점을 최소화하고 각각의 장점을 극대화 시킨 접근이다. Arbitrary를 쓰는 이유는 사용자가 임의대로 자유롭게 Eulerian과 Lagrangian description을 Material의 연속체에 적용시킨다는 뜻이다. 따라서 Eulerian과 마찬가지로 ALE는 Mesh의 내외로 Mass의 흐름을 허용한다. 그리고 Lagrangian Time Step을 수행하면서 심한 변형으로 굴절된 요소의 결과를 Eulerian Mesh에 투영(Mapping)하는 접근이다. 유체영역은 ALE Mesh로 모델링하며, 고체영역은 Lagrangian Mesh로 모델링한다. 이러한 개념은 Noh³²⁾의 유한차분법을 이용한 CEL(Coupled Eulerian-Lagrangian) Code에서 비롯된다. Noh는 움직이는 유체 경계면을 갖는 2차원 Hydrodynamics 문제를 Navier-Stokes Equations을 적용하여 풀어내는 유한차분법 코드인 CEL Code를 발표하였으며, 그 뒤로 비슷한 기법이 Trulio³³⁾에 의해 발표되었다. 이 개념을 바탕으로 Los Alamos의 Hirt와 그의 동료들³⁴⁾은 Implicit Integration을 적용하여 2차원 흐름에 대해 Mesh와 Material 사이에 임의의 상대운동을 허용하는 유한차분법 코드인 YAQUI⁴⁶⁾에서 처음으로 ICED-ALE 정식화를 발표하였다. 3차원 적용은 Pracht³⁵⁾에 의해 적용되며, Hirt³⁶⁾도 3차원 응용을 발표한다. ALE 방법을 유한요소법에 응용한 논문들이 Belytschko³⁷⁾등에 의해 발표된다. 일반적으로 Principle of Virtual Work으로 표현되는 Weak Form에 ALE 방법을 적용할 때 Convection Term으로 인해 소위 Spatial Instability가 발생하는데 Stability를 얻기 위해 SUPG(Streamline Upwind Petrov-Galerkin) 방법^{40),41)}이 쓰인다.

그 후 Amsden과 Hirt는 계산소요시간을 줄이는 SALE(Simplified ALE)³⁸⁾와 SALE-3D³⁹⁾를 발표하였다. 일반적으로 Explicit Time Integration Stability에 가장 크게 영향을 미치는 임계 시간증분크기(Critical Time Step Size)에 문제가 없다면, Lagrangian Calculation은 Eulerian Calculation에 비해 Cost-Effective하다. 다시 말해 계산소요시간이 적게 요구된다. 임계 시간증분의 크기는

일반적으로 연속체를 통과하는 소리속도 c 와 제일 작은 요소의 길이 L 에 의해 $\Delta t \leq L/c$ 로 나타낸다. 그런데 임계 시간증분크기가 Courant Stability에 제한을 받을 지라도, Explicit Time Integration을 Eulerian Mesh에 적용을 하면 연속체의 대변형이나 굴절에 상관없이 Time Integration Stability을 확보할 수 있다. 왜냐하면 Eulerian Mesh는 Material에 고정된 것이 아니라 공간에 고정되어 있기 때문이다. Eulerian Description이 적용된 Fluid Flow에 Implicit Integration의 적용은 Explicit Integration에 비해 10배에서 1000배에 가까운 CPU를 요구한다.³⁰⁾ 게다가 Implicit Integration이 Wave Propagation이 지배적이지 않는 Metal Forming과 같은 해석에는 Unconditionally Stability 때문에 경쟁력을 갖고 있으나, Hydrocode가 다루는 Hypervelocity Impact에는 Cost-Ineffective하기에 매우 비효율적이다. 따라서 Eulerian Mesh에 Implicit Time Integration을 적용하는 경우에는 설상가상으로 매우 비싼 계산을 하게 된다. Implicit와 Explicit를 함께 적용한 예로 유한차분법 코드인 TENSOR⁴²⁾에서 처음으로 나타나며, 여러 문헌들^{43),44)}에서 그 적용을 볼 수 있다. 이러한 관점에 비추어 SALE 방법은 ALE방법과 같은 운동지배방정식을 이용하나, Lagrangian Mesh에서 최대의 약점인 보다 큰 임계 시간증분크기를 유지하기 위해 필요한 Rezoning의 장점을 확보할 수 있는 새로운 ALE 방법이다. ALE방법에서는 한 요소에 한 개 이상의 재료들을 다룰 수 있으나, SALE는 오직 단일 재료를 허용한다. 그리하여 Critical Time Step size를 상대적으로 큰 값을 유지하여 계산을 수행하는 소요시간의 단축을 얻을 수 있으며, 또한 Rezoning의 시간단축에도 뛰어나다.⁴⁵⁾

6. Lagrangian Hydrocodes

일반적으로 Lagrangian Hydrocodes의 시작은 미국의 Department of Energy 산하 국립연구소들에서 수행한, Digital 컴퓨터의 출현과 더불어 High Pressure Shock Wave 전파에 대한 수치해석에서 비롯된다. 특히 LLNL (Lawrence Livermore National Laboratories)에 종사하던 Wilkins의 유한차분법을 이용한 Lagrangian Code인 2차원 해석용 HEMP⁴⁷⁾를 시초로 보고있으며, Maenchen 과 Sack의 Lagrangian Code인 TENSOR,⁴⁸⁾ Noh의 CEL³²⁾ 등이 초기의 Hydrocodes이다. 이들은 Integral Difference Method를 바탕으로 유



한차분방정식을 설정하며, 시간적분으로 해를 구해낸다. 구성방정식에서 주어진 변형률로부터 항복표면 위의 응력을 정확하게 찾아내는 Radial Return method의 초기 개념이 HEMP와 TENSOR에서 볼 수 있다. Radial Return Method는 후에 Sandia National Laboratories에서 개발한 HONDO의 개발자들인 Krieg와 KEY가 탄소성 동적거동에 정립화하며 명칭이 새겨진다. 그 뒤로 Simo의 평생연구에 의해 Radial Return Mapping Algorithm^{49),50)}으로 진화한다. 이러한 초기의 유한차분법을 근거로 개발된 Lagrangian Codes은 Sliding Interface를 고려한 TOODY⁵¹⁾를 거쳐 유한요소법을 근거로 Explicit Time Integration이 장착된 최초의 Lagrangian Code인 Key의 HONDO^{52),53)}로 이어진다. HONDO이전에 Belytschko가 공동 개발한 2차원 해석용 SAMSON⁵⁴⁾이 있으나 Explicit Algorithm을 적용한 유한요소법의 Lagrangian Hydrocode로서 HONDO를 시초로 본다. Explicit Algorithm을 유한요소법에 연관시킨 사람은 Costantino⁵⁷⁾이나 선형해석에 국한하였다.¹⁹⁾ SAMSON은 Belytschko에 의해 3차원 문제를 다루는 WRECKER로 개발되어 Ford에서 사용하여 왔다. IIT(Illinois Institute of Technology)에서 Northwestern으로 자리를 옮긴 Belytschko는 Argonne 연구소와 Nuclear Safety Project를 수행하면서 SADCAT와 WHAMS^{59),60)}를 개발한다. USA Army Ballistic Research Laboratory에 Johnson은 독립적으로 2차원 해석을 위한 삼각형요소와 3차원 해석을 위한 삼면체 요소를 개발한 EPIC^{55),56)}을 지속적으로 개발한다. EPIC을 개발한 Johnson은 “유한차분법은 Exact Problem에 대한 근사해법이며, 유한요소법은 Approximate Problems에 정해를 얻기 위한 방법이다”라고 말한다.²⁷⁾ HONDO는 Hallquist의 DYNA⁵⁸⁾의 개발에 지대한 공헌을 한다.³⁰⁾ Key는 HONDO에서 Mid-Point Explicit Time Integration을 처음으로 적용시켰으며, 4 절점 사각형요소에 한 점만의 Quadrature를 적용하였으며(Constant Stress and Constant Strain), 자신이 개발한 Hourglassing Algorithm(요소의 강성 매트릭스의 Singularity를 방지하는 처리)를 사용하였다. Key는 Krieg와 함께 연속체의 Kinematic/Isotropic Hardening/Softening을 동반하는 탄소성 거동을 위한 Radial Return Procedure⁷³⁾를 개발하여 HONDO II⁶¹⁾로 이어진다. Belytschko의 제자 Flanagan은 L.M. Taylor와 함께 Sandia에서 HONDO II를 향상시켜 PRONTO 2D⁶²⁾ 및 PRONTO 3D⁶³⁾를 개발한다. Flanagan과 Taylor는 Dienes⁶⁷⁾가 제기한 Green-Naghdi Stress Rate을 그들의 PRONTO 3D(이 때

PRONTO 3D에는 Shell 요소가 없었으며, Solid Element 만 있었다.)에 적용하였는데 Unrotated Stress Configuration에서 구성방정식을 적용하였다.^{63),68)~69)} Atluri 교수(현재는 UC Irvine)가 Georgia Tech에서 배출한 Attaway는 Sandia의 동료들과 함께 Contact Detection Algorithm의 향상⁶⁴⁾과 더불어 Element-Free Galerkin's method인 SPH(Smooth-Particle Hydrodynamics) 방법을 PRONTO 3D에 장착한다.⁶⁵⁾ 그 뒤 Attaway는 PRONTO 3D의 Parallel Version⁶⁶⁾을 발표한다.

현재 Hydrocodes이 군수를 목적으로 개발이 시작되어 다양한 민간산업에 상용코드로 자리잡게 되는 데는 DYNA3D의 개발은 하나의 이정표임을 부인할 수 없다.¹⁹⁾ HONDO가 Key에 의해 1974년 개발된 후, 1975년 LLNL에 근무하는 Hallquist는 기존의 HEMP, TOODY, TENSOR와 같은 유한차분법 코드의 Sliding Interface를 이용하고 HONDO(Sliding Interface가 없었음)의 Explicit Algorithm을 이용하여 3차원 Solid Element를 이용한 DYNA3D 개발을 시작하여 1976년 처음으로 공개버전을 발표한다. Sandia의 HONDO나 PRONTO는 Security Classification 때문에 공개버전이 불가능했으나, Lawrence Livermore의 DYNA3D는 여러 대학과 산업체에 공개버전이 배포가 허용돼 많은 엔지니어들이 활용하게 된다. DYNA3D의 초기버전은 Hughes^{70),71)}가 처음으로 발표한 Nodal Constraint Method를 이용한 Contact-Impact Algorithm이 적용되었다. 이 방법은 부적합하여 곧바로 폐기되고³¹⁾ HONDO II에 적용된 Penalty Method로 교체된다. 초기 버전에서 고차요소(Higher Order Elements)가 수치노이즈(Numerical Noise)를 타는 것을 발견하고 1979년 발표된 버전에서 제거한다. 1981년에 발표된 버전에서 9개의 구성방정식이 첨부되어 기능을 대폭 향상시킨다. Michigan에서 학위하고 LLNL의 Hallquist에 합류한 David Benson(현재 UC San Diego에서 근무하면서 LSTC(Lawrence Livermore Software Technology)의 기술자문 활동함)은 놀라운 연구력으로 DYNA3D를 역사상 대폭 향상시킨다. 이 때 Shell, Beam 요소들이 장착되고, Benson이 개발한 Single Surface Contact Algorithm⁷²⁾과 전산기술인 3차원 Bucket Sorting Algorithm⁷³⁾을 적용시킨다. 1989년 Hallquist는 LLNL을 떠나 LSTC를 설립하여 DYNA3D를 대폭 기능 향상을 구현하면서 LS-DYNA로 개명시킨다. 대표적인 Lagrangian Code인 LS-DYNA[86]는 Fluid-Structure Interaction의 해석이 가능한 ALE Brick Element를 보강한다. 또한 병렬컴퓨터인 IBM SP2의 출현과 함께

LS-DYNA의 병렬버전을 1994년에 개발하기 시작한다. 최근에 SPH(Smoothed Particle Hydrodynamics) Method가 장착되어 Hydrocode 세계에서 명실 상부한 세계 최대의 Marketing Share를 자랑하고 있다.

LS-DYNA에 비견되는 코드가 프랑스 ESI의 PAM-CRASH⁸⁷⁾이다. 사실 PAM-CRASH는 DYNA3D의 최초의 상용화 버전이다. UC Berkeley에서 박사학위를 마친 4명의 프랑스 엔지니어들이 자국에서 DYANA3D 공개버전과 Belytschko의 WHAMS에서 모듈들을 참조하여 DYNA3D의 상용화에 처음으로 성공화하였다.¹⁹⁾ ESI는 1985년에 Volkswagen의 프로젝트를 수행하면서 설립된 회사이며, 현재 세계 각국에 지부를 둔 ESI Group으로 성장하였다.

DYNA3D의 또 다른 상용화 버전이 MSC/DYNA인데 DYNA3D의 1988년 버전을 기초로 Hallquist가 기술지원하였다. 여기에 HONDO 개발자 Samuel W. Key가 MSC에서 이를 위해 일하게 된다. 마치 PRONTO를 개발한 Flanagan이 ABAQUS/EXPLICIT를 개발하는 것처럼, 네덜란드 회사 B.V. of Gouda가 소유권을 갖고 있는 PISCES(Hancock이 개발한 Eulerian Code)를 1989년 MSC가 흡수하면서 MSC/DYNA와 합쳐 1991년 MSC. DYTRAN으로 발표된다.

또 하나 중요한 Lagrangian Hydro Code가 AUTODYN⁸⁵⁾이다. 1985년 California에서 설립된 Century Dynamics, Inc.는 1986년 AUTODYN-2D를 1991년 AUTODYN-3D를 발표한다. AUTODYN-2D는 Wilkins의 HEMP⁴⁷⁾를 따른다. AUTODYN은 Hancock의 PISCES-2DELK²⁵⁾의 유한차분법 기능을 준수하면서 Eulerian 기능을 갖춘다. 후에 van Leer가 개발한 Godunov's Method^{74),75)}로 Eulerian 기능을 교체한다. 그 뒤로 AUTODYN은 CEL, ALE, 그리고 SPH를 보강된다.

7. Eulerian Hydrocodes

Eulerian Codes은 Lagrangian Codes에 비해 일반 엔지니어들에게 많이 알려져 있지 않았다. 왜냐하면, 대부분 국방에 관한 프로젝트를 수행하면서 개발되어 왔고 Security Classification으로 많이 분류되었다. 따라서 5내지 10년은 Lagrangian Codes에 상업화에 뒤져 있다.²⁹⁾ 하지만 개발의 역사는 훨씬 오래되었으며, 개발된 코드들도 매우 다양하고 많다.

W.E. Johnson은 Eulerian Codes의 선조로 LANL(Los



Alamos National Laboratory)의 PIC(Particle-In-Cell) code⁷⁶⁾로 보고있다.²⁸⁾ Johnson은 PIC를 향상시켜 1959년 SHELL을 발표하고, SHELL의 향상된 버전인 SPEAR를 1963년에, 1965년에는 Walsh와 함께 OIL을, 1967년 2-D OIL인 TOIL과 3-D OIL인 TRIOIL을 발표한다. Green-Naghdi Stress Rate의 사용을 처음으로 제기한 J.K. Dienes⁶⁷⁾는 1968년 완전소성(Perfectly Plastic)을 고려할 수 있는 RPM을 발표하며, 1971년 완전소성을 고려한 TRIOIL인 DORF를 Johnson이 발표하며, 탄소성과 Lagrangian Interfaces를 갖춘 HELP가 Hageman과 Walsh에 의해 1971년 발표된다. LLNAL의 DeBar는 1974년 KRAKEN Code를 발표하며, 1975년 Thompson은 2-D Eulerian Code인 CSQ를 발표하며, Hancock은 1976년 PISCES-2DELK를 발표한다. 이 코드는 현재 MSC.DYTRAN으로 진화되었고, AUTODYN의 Eulerian Processor의 개발에 기여한다. Johnson은 1979년 향상된 CSQ II를 발표하며, 매우 우수한 Eulerian Code인 CTH⁷⁷⁾가 McGlaun과 CSQ를 개발한 Thomson에 의해 1989년 발표된다. 그 외 1983년 LLNL에서 개발된 JOY⁷⁸⁾와 1989년 Hoilian과 그의 동료들이 발표한 MESA⁷⁹⁾가 있다. MESA의 병렬버전이 PAGOSA⁸⁰⁾로 1993년 발표되었으며, 1996년에 Church에 의한 GRIMI, LANL의 Allen에 의한 RAGE가 1996년에 발표된다.

8. 기타 코드들

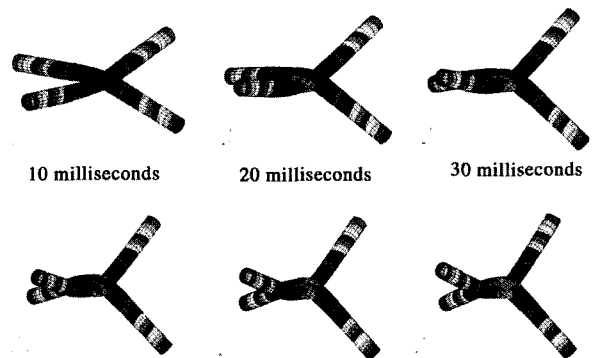
그 외에 ALE, CEL, SALE에 바탕을 둔 코드들이 있다. CEL(Coupled Eulerian-Lagrangian) Hydrocodes는 고체와 유체의 별도영역에서 Eulerian과 Lagrangian Mesh를 장점을 고려하여 각각 적용시키며, Interface 영역을 고려한 Coupling Method가 적용된다. 따라서 CEL Hydrocodes은 Eulerian Module, Lagrangian Module, Coupling Module로 구성된다. 이러한 기능을 갖춘 코드들로 DYSMAS/ELC,⁸¹⁾ MSC/DYTRAN,⁸²⁾ HULL,⁸³⁾ ZAPOTEC,⁸⁴⁾ AUTODYN-2D⁸⁵⁾ 등이 있다.

ALE(Arbitrary Lagrangian-Eulerian) Method는 CEL Method와 달리 Coupling Module이 없다. 따라서 CEL에 비해 Coupling 부재에서 오는 효율이 ALE에서 얻을 수 있다. ALE는 다시 Single Material 만을 고려한 SALE(Simplified ALE)와 Multimaterial을 고려한 Multimaterial ALE로 분리된다. SALE 기능을 갖춘 코드들로 ARTOO,⁸⁶⁾ LS-DYNA,⁸⁶⁾ AUTODYN-3D⁸⁵⁾ 등을 들 수 있다. Multimaterial ALE Hydrocodes로는 CALE,⁸⁸⁾

CAVEAT,⁸⁹⁾ ALE3D,⁹⁰⁾ RHALE,⁹¹⁾ MSC.DYTRAN,⁸²⁾ LS-DYNA⁸⁶⁾ 등이 있다. 상용화에 성공한 LS-DYNA, MSC.DYTRAN, AUTODYN, PAM-CRASH 등은 ALE, SALE을, Lagrangian에 FLM(Free Lagrange Method),⁹²⁾ SPH등을 보강하여 Eulerian 과 Lagrangian을 상호 보완하고 있다.

9. 나가면서

지금까지 유한요소법, 유한차분법, Hydrocode 등의 이론 배경에 매우 중요한 가상 일의 원리에 대한 역사적 개발 유도과정을 도입으로 서술하며, 유한요소코드의 태동과 그 후로 생겨난 유한요소코드들의 부침을 열거하였다. 또한 Digital Computer의 발달과 더불어 유한요소법의 발달이 가져 왔으며, 그와 동반하여 생겨난 Hydrocodes의 태동과 코드들의 발달과정을 돌아보았다. 현재 세계적으로 경쟁력을 갖춘 코드들은 대부분 미국의 국립연구소들에서 국방산업 관련하여 개발되다 민간 산업 제품 개발에 적용되고 있고, 이들이 개발 국가인 한국으로 밀려오고 있다. 이 코드들의 특징 중에 하나는 고부가가치를 창출할 수 있는 하이테크놀러지(High Technology)를 갖추고 있기에, 국내에도 많은 공학자나 엔지니어들이 이러한 코드개발에 한층 힘써 쓰면 하는 바람이다. 또한 1994년 MPI(Message-Passing Interface)의 보급과 함께 병렬컴퓨팅은 일반화되고 있다. 고체역학의 응용분야에 있어 CPU를 많이 소모하는 분야가 Hydrocodes를 이용하는 분야이다. 따라서 상기 언급한 Hydrocodes은 보다 효율이 높은 병렬화에 개발의 초점이 맞춰 있다. 끝으로 본 기사를 게재하는 한국전산구조공학회가 주최하고 과학기술부가 후원한 제3회 전산구조 소프트웨어 경진대회에서 대상을 수여 받은 저자의 미친한 병렬 Hydrocode인 GT-PARADYN의 결과물 중 하나를 소개한다. 그림은 두



개의 금속 파이프들이 서로 직각을 이루면서 20m/sec의 초고속도로 충돌하면서 나타나는 대변형을 10 millisecond 간격으로 연속적인 변형 Sequence로 보여준다.

10. 부록

■ MSC.NASTRAN, MSC.MARC, MSC.DYTRAN, MSC.PATRAN

- <http://www.mssoftware.com>
- <http://www.mssoftware.co.kr>

■ ABAQUS

- <http://www.abaqus.com>
- <http://www.abaqus.co.kr>

■ ANSYS

- <http://www.ansys.com>
- http://www.tsne.co.kr/ansys/ansys_plaza.asp
- <http://www.cies.co.kr>

■ LS-DYNA

- <http://www.lstc.com>
- <http://www.theme-eng.co.kr/themeeng/Korean/lstdyn.htm>
- <http://www.kostech.co.kr/html2/prmain2.htm>

■ AUTODYN

- <http://www.centurydynamics.co.uk/>
- <http://www.prism21.co.kr>
- ADINA
- <http://www.adina.com>

■ GT-STRUDL

- <http://www.gtstrudl.gatech.edu>

■ NISA II

- <http://www.emrc.com/>
- <http://www.hkecc.co.kr/>

■ PAM-CRASH

- <http://www.esi-group.com/>
- <http://www.esi.co.kr/>

■ DIANA

- <http://www.tnodiana.com/>
- <http://www.cabletek.co.kr>

■ IDEAS

- <http://www.eds.com/products/plm/ideas/>
- <http://www.cies.co.kr>

참 고 문 헌

1. Turner, M. J.; Clough, R.W.; Martin, H.C.; Topp, L. J., *Stiffness and deflection analysis of complex structures*, Journal of Aeronautical Science, Vol. 23, 1956, pp.805~823
2. Hart, I. B., *The Mechanical Investigations of Leonardo da Vinci*, Open Court, Chicago, 1925
3. Dugas, R., *A History of Mechanics*, Central Book, New York, 1955
4. Lagrange, J. L., *Mechanique Analytique*, Paris, 1788
5. Mach, E., *The Science of Mechanics*, Trans. And Pub. Court, Illinois, 1960
6. Timoshenko, S. P., *The History of the Strength of Materials*, McGraw-Hill, 1953
7. Langhaar, H. L., *Energy Methods in Applied Mechanics*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1962
8. Washizu, K., *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, 3rd ed., Pergamon Press, 1982
9. Reddy, J. N., *Energy and Variational Methods in Applied Mechanics: With an Introduction to the Finite Element Method*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1984
10. Richards, T. H., *Energy Methods in Stress Analysis*, Ellis Horwood Limited, 1977
11. Malvern, L. E., *Introduction to the Mechanics of A Continuous Medium*, Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, N. J., 1969
12. Pian, T. H. H., *Derivation of Element Stiffness Matrices by Assumed Stress Distribution*, AIAA, Vol. 2, 1964, pp.1333~1336
13. Hrennikoff, A., *Solution of Problem in Elasticity by the Frame Work Method*, Journal of Applied Mechanics, Vol. 8, No. 4, December, 1941, pp.169

14. McHenry, D., *A Lattice Analogy for the Solution of Plane Stress Problems*, Journal of Institution of Civil Engineers, Vol. 21, 1943, pp.59~82
15. Levy, S., *Structural Analysis and Influence Coefficient for Delta Wings*, Journal of Aeronautical Sciences, Vol. 20, No. 7, July, 1953, pp.449~454
16. Argyris, J. H., *Energy Theorems and Structural Analysis*, Aircraft Engineering, October, November, December in 1954 and February, March, April, May in 1955, 1954~1955
17. Clough, R. W., *Thoughts about the Origin of the Finite Element Method*, Computers and Structures, Vol. 79, 2001, pp.20029~2030
18. Clough, R. W., *The Finite Element Method in Plane Stress Analysis*, Proc. ASCE Conf Electron Computat, Pittsburg, PA, 1960
19. Belytschko, T.; Liu, W.K.; Moran, B., *Nonlinear Finite Elements for Continuum and Structures*, John Wiley & Sons, L.T.D., 2000
20. Irons, B. M., *Numerical Integration Applied to Finite Element Methods*, Conf. Use Digital Comput. Structure Eng. Univ. of Newcastle, 1966
21. Irons, B. M., *Engineering Application of Numerical Integration in Stiffness Method*, AIAA, Vol. 14, 1966, pp.2035~2037
22. Taig, I. C., *Structural Analysis by the Matrix Displacement Method*, Engl. Elec. Aviation Rep. No. SO17, 1961
23. Tedesco, J; Walczak, J., *Preface for the 60th Birthday of Klaus-Jurgen Bathe*, Computers and Structures, Vol. 81, 2003, pp.455~462
24. Argyris, J. H.; Bronlund, O. E.; Sorensen, M., *Computer Aided Structural Analysis*, The Machine-independent System ASKA, Nord. Data-70 Conf., August 26-28, Copenhagen, 1970
25. Hancock, S., *PISCES-2DELK Theoretical Manual*, Physics International, 1985
26. Mair, H. U., *Review: Hydrocodes for Structural Response to Underwater Explosions*, Shock and Vibration 6/2, 1999, pp.81~96
27. Anderson, Jr., C. E., *An Overview of the Theory of Hydrocodes*, International Journal of Impact Engineering, Vol. 5, 1987, pp.33~59
28. Johnson, W.E.; Anderson, Jr., C. E., *History and Application of Hydrocodes in Hypervelocity Impact*, International Journal of Impact Engineering, Vol. 5, 1987, pp.423~439
29. Benson, D. J., *Computational Methods in Lagrangian and Eulerian Hydrocodes*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 99, 1992, pp.235~394
30. Goudreau, G. L.; Hallquist, J. O., *Recent Developments in Lagrangian-Scale Finite Element Lagrangian Hydrocode Technology*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 33, 1982, pp.725~757
31. Hallquist, J. O.; Goudreau, G. L.; Benson, D. J., *Sliding Interfaces with Contact-Impact in Large-Scale Lagrangian Computations*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 51, 1985, pp.107~137
32. Noh, W. F., *A Time-Dependent, Two-Space-Dimensional, Coupled Eulerian-Lagrange Code*, in: Methods in Computational Physics, Vol. 3, Fundamental Methods in Hydrodynamics, Academic Press, New York, 1964, pp.117~179
33. Trulio, J. G., *Theory and Structure of the AFTON Codes*, Report AFWL-TR-66-19, Air Force Weapons Laboratory, 1966
34. Hirt, C. W.; Amsden, A. A.; Cook, J. L., *An Arbitrary Lagrangian-Eulerian Computing Method for All Flow Speeds*, J. Comput. Phys., Vol. 14, 1974, pp.227~253
35. Pracht, W. W., *Calculating Three-Dimensional Fluid Flows at All Flow Speeds With an Eulerian-Lagrangian Computing Mesh*, J. Comput. Phys. Vol. 17, 1975, pp.132~159
36. Stein, L. R.; Gentry, R. A.; Hirt, C. W., *Computational Simulation of Transient Blast Loading Both First and Second Derivatives*, International Journal of Numerical Methods in Engineering, Vol. 4, 1977, pp.551~559
37. Belytschko, T.; Kennedy, J. M.; Schoeberle, D. F., *Quasi-Eulerian Finite Element Formulation for Fluid-Structure Interaction*, ASME J. Pressure

- Vessel Technology, Vol. 102, 1980, pp.62~69
38. Amsden, A. A.; Ruppel, H. M.; Hirt, C. W., *SALE: A Simplified ALE Computer Program for Fluid Flow at All Speeds*, Los Alamos Scientific Laboratory, Los Alamos, NM, 1980
 39. Amsden, A. A.; Ruppel, H. M., *SALE-3D: A Simplified ALE Computer Program for Calculating Three-Dimensional Fluid Flow*, Los Alamos Scientific Laboratory, Los Alamos, NM, 1981
 40. Brooks, A. N.; Hughes, T. J. R., *Streamline Upwind/Petrov-Galerkin Formulations for Convection-Dominated Flows with Particular Emphasis on the Incompressible Navier-Stokes Equations*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 32, 1982, pp.199~259
 41. Liu, W. K.; Chang, H.; Chen, J.S.; Belytschko, T., *Arbitrary Lagrangian-Eulerian Petrov-Galerkin Finite Elements for Nonlinear Continua*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 68, 1988, pp.259~310
 42. Burton, D. E.; Lettis, L. A.; Bryan, J. B.; Fray, N. R., *Physics and Numerics of the Tensor Code, UCID-19428*, Lawrence Livermore National Laboratory, Livermore, CA, 1982
 43. Hughes, T. J. R.; Liu, W. K., *Implicit-Explicit Finite Elements In Transient Analysis: Implementation and Numerical Examples*, ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 45, 1978, pp.375~378.
 44. Belytschko, T.; Mullen, R., *Mesh Partitions of Explicit-Implicit Time Integration*, US-Germany Symposium on Formulation and Computational Algorithms in Finite Element Analysis, MIT, Cambridge, MA, 1978
 45. Benson, D. J, *An Efficient, Accurate, Simple ALE Method for Nonlinear Finite Element Programs*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 72, pp.305~350
 46. Amsden, A. A.; Hirt, C. W., *YAQUI: An Arbitrary Lagrangian-Eulerian Computer Program for Fluid Flow at All Speeds*, Los Alamos Scientific Laboratory, LA-5100, 1973
 47. Wilkins, M. L., *Calculation of Elastic-Plastic Flow*, Methods of Computational Physics, Vol. 3, Fundamental Methods in Hydrodynamics, Academic Press, New York, 1964, pp.211~263
 48. Maenchen, G.; Sack, S. *The TENSOR code*, Methods of Computational Physics, Vol. 3, Fundamental Methods in Hydrodynamics, Academic Press, New York, 1964, pp.181~210
 49. Simo, J. C.; Hughes, T. J. R., *Computational Inelasticity*, Springer-Verlag, New York, 1998
 50. Simo, J. C.; Taylor, R. L., *Return Mapping Algorithm for Plane Stress Elastoplasticity*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 22, 1986, pp.649~670
 51. Bertholf, L. D.; Benzley, S. E., *TOODY II, A Computer Program for Two-Dimensional Wave Propagation*, SC-RR-68-41, Sandia National Laboratories, 1968
 52. Key, S. W., *HONDO - A Finite Element Computer Program for the Large Deformation Response of Axisymmetric Solids*, Sandia National Laboratories, Report 74-0039, 1974
 53. Key, S. W., *A Finite Element Procedure for Large Deformation Dynamic Response of Axisymmetric Solids*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 4, 1974, pp. 195~218
 54. Chiapetta, R.; Belytschko, T.; Rouse, J., *A Computer Code for Dynamic Stress Analysis of Media-Structure Problem with Nonlinearities (SAMSON)*, Report AFWL-TR-72-104, Air Force Weapons Laboratory, Kirtland AFB, NM, 1973
 55. Johnson, G. R., *EPIC-3, A Computer Program for Elastic-Plastic Impact Calculations in 3 Dimensions*, Contract Report No. 343, USA Ballistic Research Laboratory, Aberdeen Proving Ground, MD, 1977
 56. Johnson, G. R., *EPIC-2, A Computer Program for Elastic-Plastic Impact Calculations in 2 Dimensions Plus Spin*, ARBRL-CR-00373, USA Ballistic Research Laboratory, Aberdeen Proving Ground, MD, 1978
 57. Costinano, C. J., *Finite Element Approach to Stress Wave Problems*, Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 93, pp.153~166, 1967

58. Hallquist, J. O., *Preliminary User's Manual for DYNA3D and DYNAP(Nonlinear Dynamic Analysis of Solids in Three Dimension)*, University of California, Lawrence Livermore National Laboratory, Report UCID-17268, 1976
59. Belytschko, T.; Mullen, R., *WHAMS: A Program for Transient Analysis of Structures and Continua*, Structural Mechanics Software Series, Eds. Perrone, N. and Pilkey, W., University Press of Virginia, Volume 2, 1978
60. Kennedy, J. M.; Belytschko, T., *Current Status of the WHAMS-3D Code*, Transactions of the 9th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology, Lausanne, Switzerland, August 17-21, 1987, pp.353~358
61. Key, S. W.; Beisinger, Z. E.; Krieg, R. D., *HONDO II - A Finite Element Computer Program for the Large Deformation Dynamics Response of Axisymmetric Solids*, SAND78-0422, 1978
62. Taylor, L. M.; Flanagan, D. P., *PRONTO 2D - A Two Dimensional Transient Solid Dynamics Program*, Sandia National Laboratories, Report SAND86-0594, 1987
63. Taylor, L. M.; Flanagan, D. P., *PRONTO 3D - A Three Dimensional Transient Solid Dynamics Program*, Sandia National Laboratories, Report SAND87-1912, 1989
64. Attaway, S. W., *Update of PRONTO 2D and PRONTO 3D Transient Solid Dynamics Program*, Sandia National Laboratories, Report SAND90-0102, 1990
65. Attaway, S. W.; Heinstein, M. W.; Mello, F. J.; Swegle, J. W., *Coupling of Smooth Particle Hydrodynamics with PRONTO*, SAND-93-1781C, 1993
66. Attaway, S. W.; Hendrickson, B. A.; Plimpton, S. J. et al, *Parallel Contact Detection Algorithm for Transient Solid Dynamics Simulations Using PRONTO 3D*, SAND-96-0593C, 1996
67. Dienes, J. K., *On the Analysis of Rotation and Stress Rate in Deformation Bodies*, Acta Mechanica, Vol. 32, 1979, pp.217~232
68. Hughes, T. J. R., *Numerical Implementation of Constitutive Models: Rate-Independent Deviatoric Plasticity*, Proceedings of the Workshop on the Theoretical Foundation for Large-Scale Computations Nonlinear Material Behavior, 1987, pp.29~63
69. Flanagan, D. P.; Taylor, L. M., *An Accurate Numerical Algorithm for Stress Integration with Finite Rotations*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 62, 1987, pp.305~320
70. Hughes, T. J. R.; Sackman, J. L.; Taylor, R. L., *Finite Element Formulation and Solution of Contact-Impact Problems in Continuum Mechanics*, UCSAESM 74-8, University of California at Berkeley, 1974
71. Hughes, T. J. R.; Taylor, R. L.; Sackman, J. L., *A Finite Element Method for a Class of Contact-Impact Problems*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 8, 1976, pp.249~276
72. Benson, D. J.; Hallquist, J. O., *A Single Surface Contact Algorithm for the Post Buckling Analysis of Shell Structures*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 78, 1990, pp. 141~163
73. Krieg, R. D.; Key, S. W., *Implementation of a Time Dependent Plasticity Theory into Structural Programs*, in: Constitutive Equations in Viscoplasticity: Computational and Engineering Aspects, Vol. 20, ASME, New York, 1976, pp.125~137
74. Godunov, S. K., *Finite Difference Method for Numerical Computation of Discontinuous Solutions of the Equations of Fluid Dynamics*, Mat. Sb. Vol. 47, 1959, pp.271~306
75. van Leer, B., *Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme, V. A Second Order Sequel to Godunov's Method*, Journal of Computational Physics, Vol. 32, 1979, pp.101~136
76. Evans, M. E.; Harlow, F. H., *The Particle-In-Cell Method for Hydrodynamic Calculations*, Los Alamos Scientific Lab., Report No. LA-2139, Los Alamos, New Mexico, 1957
77. McGlaun, J. M.; Thompson, S. L.; Erick, M. G.,

- CTH: A Three-Dimensional Shock Wave Physics Code*, in: Proc. 1989 Hypervelocity Impact Symposium, 1989
78. Couch, R.; Albright, E.; Alexander, N., *The JOY Computer Code*, Lawrence Livermore National Laboratory, UCID-19688, 1983
79. Holian, K. S.; Mandell, D. A.; Adams, T. F.; Addressio, F. L.; Baumgardner, J. R.; Mosso, S. J. *MESA: A 3-D Computer Code for Armor/Anti-Armor Applications*, in: Proc. Supercomputing World Conference, San Francisco, CA, 1989
80. Kothe, D. B.; Baumgardner, J. R.; Bennion, S. T.; Cerutti, J.H.; Daly, B.J.; Holian, K.S.; Kober, et al, *A Parallel Finite-Difference Eulerian Method for Transient Three-Dimensional Multi-Material Deformation and Fluid Flow*, Los Alamos National Laboratory, Report LA-UR-93-2400, 1993
81. IABG, *The DYSMAS Program Family*, IABG, Munich, Germany, Document B-TF-V197/3, 1992
82. Keene, R.; Prior, A., *MSC/DYTRAN User's Manual*, The MacNeal-Schwendler Corporation, Part Number DT/A/000/UM, July, 1991
83. Matuska, D. A.; Osborn, J, *HULL Documentation: Volume II*, User's Manual, Orlando Technologies, Inc. Technical Report, 1986
84. Yarrington, P., *The CTH-EPIC Link - A Coupled Eulerian/Lagrangian Computational Method*, Proceedings of the 12th U.S. National Congress on Computational Mechanics, 1994
85. Century Dynamics, *AUTODYN User's Manual Version 2.1*, Century Dynamics Inc., Oakland, CA, 1989
86. LSTC, *LS-DYNA User's Manual*, Version 960, Livermore Software Technology Coporation, 2001
87. ESI, *PAM-CRASH User's Manual*, Theory Manual, Example Manual - Version 10.2, Eng. System Int, 1989
88. Tipton, R., *CALE User's Manual*, Lawrence Livermore National Laboratory, 1992
89. Addressio, F.L.; Carroll, D.E.; Dukowicz, J.K.; et al, *CAVEAT: A Computer Code for Fluid Dynamics Problems with Large Distortion and Internal Slip*, Los Alamos National Laboratory LA-10613-MS-REVISED, 1990
90. Anderson, S.; Dube, E.; Otero, I.; Sharp, R., *Users Manual for ALE3D - An Arbitrary Lagrange/Eulerian 2D Code System*, Lawrence Livermore National Laboratory, 1993
91. Peery, J. S.; Budge, K. G.; Wong, M. K.; Trucano, T. G., *RHALE: A 3-D MMALE Code for Unstructured Grids*, 1993 ASME Winter Annual Meeting, 1993
92. Fritts, M. J.; Crowley, W. P.; Trease, H., eds., *The Free-Lagrange Method, Lecture Notes in Physics*, Springer Verlag, Berlin, Germany, 1985, p.236 