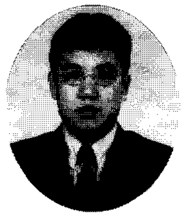
학술기사

건축구조분야에서의 웨이블렛의 적용



김 홍 진*

1. 웨이블렛이란 무엇인가?

웨이블렛(Wavelet)의 사전적 의미는 물 표면에 이는 작은 물결(small waves on the surface of a sea or lake)을 뜻한다. 이 단어는 신호처리(Signal Processing) 분야에서는 한정된 범위에서만 존재하는 함수를 지칭하며, 신호처리분야에서 흔히 사용되는 퓨리에변환 (Fourier Transform)이 음의 무한대(-∞)에서 양의 무한대(+∞까지 확장되는 싸인함수라는 사실과 대조적인 의미를 갖는다.

먼저, 퓨리에변환에 대해 간략히 살펴보자. 임의의 함수 $f(t)$의 퓨리에변환, $F(\omega)$과 그에 상응하는 퓨리에역변환(Inverse Fourier Transform)은 다음과 같이 정의된다.[1)]

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-i\omega t)dt \tag{1}$$

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\exp(i\omega t)d\omega \tag{2}$$

이는 원래의 함수가 주기가 다른 여러 싸인 또는 코싸인함수로 분해(Decomposition) 되는 것이라 할 수 있다.

그림 1(a)과 같은 함수를 보자. 이 함수는 0에서 4초까지만 존재하는 함수이다. 이때의 퓨리에변환은 그림 1(b)와 같이 -∞에서 +∞까지 확장하는 함수를 사용한다. 따라서, 변환의 대상이 되는 함수는 한정된 시간에만 존재하는데 반해 변환에 사용되는 함수는 -∞에서 +∞까지 존재하는 함수라는 모순이 있다. 이것은 퓨리에변환에서는 변환의 대상이 되는 함수가 가지고 있던 시간정보가 변환으로 인하여 모두 잃어버리게 됨을 뜻한다.

그렇다면 그림 1(c)와 같은 함수를 사용하여 그림 1(a)의 함수를 변환하면 어떨까? 이 경우, 기본적으로 그림 1(c)의 함수는 한정된 시간에서만 존재하는 함수이기에, 이런 함수를 이용한 변환은 그림 1(a)의 신호와 같이 특정시간에만 존재하는 신호에 대해 논리적으로나 물리적으로 의미를 가질 수 있을 것이다. 즉, 퓨리에변환에

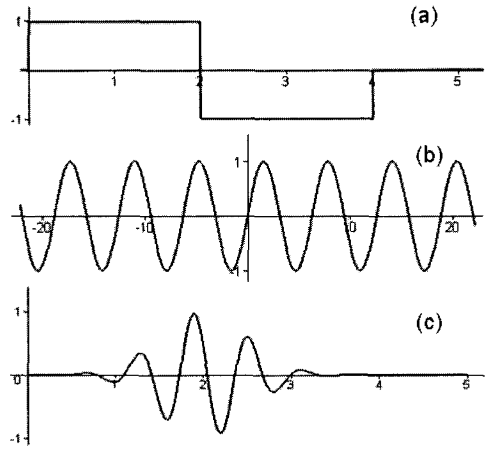


그림 1 시간적 한정성을 가지는 함수 (a), (c)와 -∞에서 +∞까지 확장하는 함수 (b)

* 단국대학교 건축공학과 연구교수 공학박사

서와 달리 변환의 대상이 되는 함수가 가지고 있는 시간정보를 변환 후에도 모두 그대로 갖고 있을 수 있다. 이러한 함수를 이용한 변환이 바로 웨이블렛 변환(Wavelet Transforms)이며, 이때 사용되는 함수가 바로 웨이블렛 또는 웨이블렛 함수(Wavelet functions)이다.

실질적인 예를 들어보자. 그림 2(a), (b)의 두 신호, S1과 S2가 있다. 여기서 시간 단위는 10^{-3}초, (=1 millisecond, ms)이다. 신호 S1은 다음과 같은 식에 의해 이루어지는 신호이다.[2)]

$$S1 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} \cos(2\pi\times 10\times t) + \cos(2\pi\times 25\times t) \\ +\cos(2\pi\times 50\times t) + \cos(2\pi\times 100\times t) \end{bmatrix} \tag{3}$$

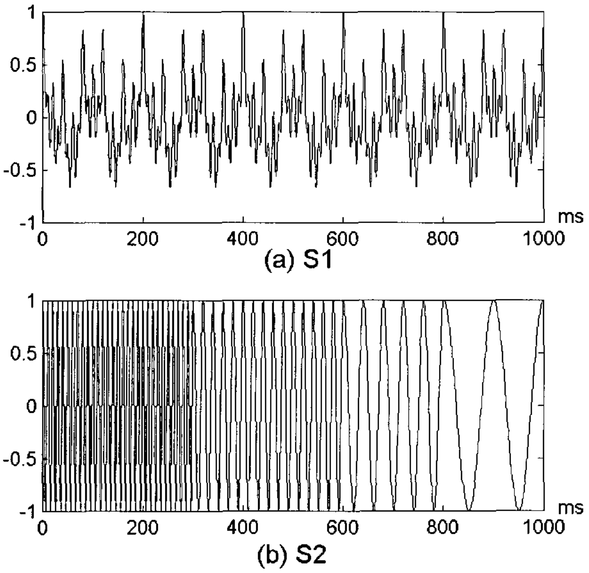


그림 2 정상적신호 (a)와 비정상적신호 (b)

그림 2에서 보이듯이 신호 S1은 모든 임의의 시간에서 10, 25, 50, 그리고 100Hz의 주파수를 갖는, 즉 주파수 성분이 시간에 따라 변하지 않는 정상적 신호(Stationary Signal)이다. 이와 대조적으로, 신호 S2는 0에서 300ms 까지는 100Hz, 300에서 600ms 까지는 50Hz, 600에서 800ms 까지는 25Hz, 그리고 800에서 1000ms 까지는 10Hz를 갖는 함수이다. 즉 시간에 따라 주파수 성분이 변하는 비정상적 신호(Non-Stationary Signal)이다.

그림 3은 이 두 함수의 퓨리에변환을 보여주고 있다. 여기서 신호 S2의 주파수별 크기가 다른 것은 주파수 성분별 지속시간이 서로 다르기 때문이다. 즉, 50과 100Hz 성분이 10과 25Hz 성분의 신호보다 1.5배 가량 더 길게 진행되기 때문이다. 이처럼 신호의 주파수별 지속시간을 다르게 한 것은 급격한 신호의 변환이 없게 하여 이에 따른 고주파수 영역의 성분을 줄이기 위해서이다.

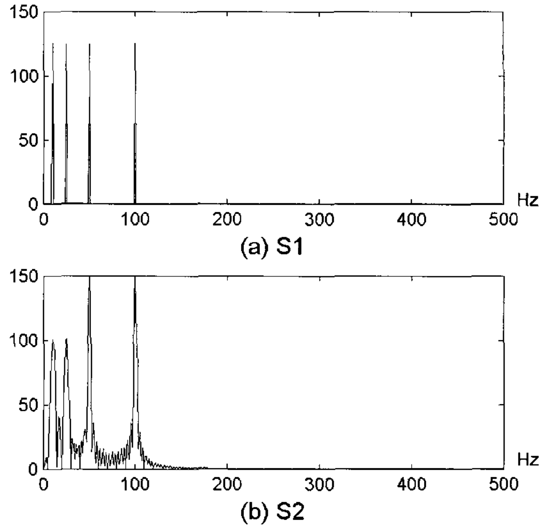


그림 3 신호 S1과 S2의 퓨리에변환

그림 3에서 보이듯이 신호 S1과 S2는 서로 비슷한 퓨리에변환의 결과를 가짐을 알 수 있다. 결국, 퓨리에 변환이 정상적인 신호와 비정상적인 신호의 차이를 구별해내지 못함을 알 수 있다.

2. 웨이블렛, 웨이블렛 함수

어떤 함수가 웨이블렛 변환에 쓰이는 웨이블렛 함수인가? 웨이블렛 함수($\psi(t)$라고 흔히 쓴다.)가 되기 위해서는 다음 두 개의 조건만 만족시키면 된다.

2.1 허용조건(Admissibility Condition)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{\omega} d\omega < \infty \tag{4}$$

여기서 $\Psi(\omega)$는 $\psi(t)$의 퓨리에변환을 나타낸다. 이식을 다시 쓰면

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \tag{5}$$

즉, 웨이블렛 함수의 시간영역에서의 평균값이 0이어야 한다는 뜻이다. 이 조건을 허용조건(Admissibility Condition)이라고 하는데, 이 조건은 임의의 신호를 웨이블렛 변환(분석, Analysis, 또는 분해, Decomposition이라 한다.)을 한 후, 다시 역변환(Inverse Wavelet Transform)을 통해 원래의 신호를 만들어 낼 수(합성, Synthesis

또는 복구, Reconstruction라고 한다.) 있음을 의미한다.

2.2 규칙성조건(Regularity Condition)

규칙성조건(Regularity Condition)이란 웨이블렛 함수가 임의의 어떤 부분에 대해서도 부분적으로는 완만(Smooth)해야 하며 시간, 주파수영역 모두에서 한정적이어야 함을 의미한다. 이 조건을 바탕으로 '영이 되는 모멘트 차수(Vanishing Moment)'의 개념이 나오는데 만일 웨이블렛 함수의 퓨리에변환이 m번의 미분이 가능할 경우, 이 웨이블렛의 영이 되는 모멘트 차수가 m 이라 한다.

$$\int x^m \Psi(x) dx = 0 \qquad (6)$$

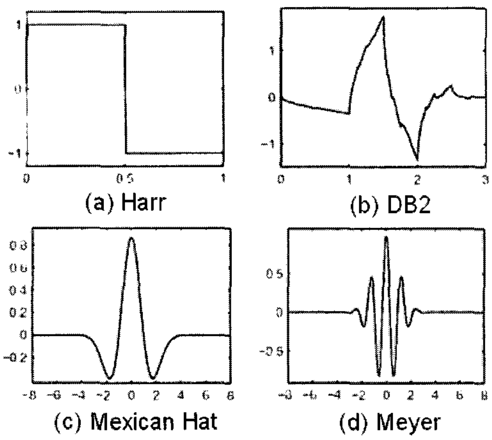


그림 4 웨이블렛의 예

그림 4는 두 조건을 모두 만족하는 웨이블렛 중 많이 사용되는 몇 가지를 보여주고 있다.

그림 4에서 형태의 유사성에 기인한 멕시칸햇(Mexican Hat) 웨이블렛을 빼놓고는 웨이블렛을 개발한 사람의 이름을 붙여 웨이블렛의 이름을 결정된다. DB2는 Daubechies 웨이블렛의 영이 되는 모멘트 차수가 2인 웨이블렛을 뜻한다.[1] Daubechies 웨이블렛은 DB2부터 DB10까지 있으며 그림 4(a)의 Harr 웨이블렛은 DB1에 해당한다.[3] 그리고, 그림 1(c)에 나와있는 웨이블렛은 몰렛(Morlet) 웨이블렛이라 부른다.

3. 웨이블렛 변환은 어떻게 하는가?

웨이블렛 변환(Wavelet Transform) 이란 위에서도

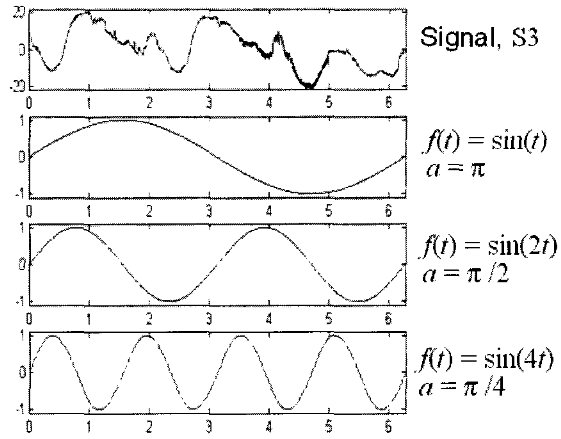


그림 5 퓨리에변환 기저함수의 주기확장

밝혔듯이 웨이블렛, 또는 웨이블렛 함수를 기저함수(Basis Function)로 사용하여 수행되는 함수, 또는 신호의 변환을 말한다. 여기서 변환이란 특정 영역(Domain)에 존재하는 신호를 다른 영역의 신호로 전환함을 의미한다. 예로, 퓨리에변환은 시간영역의 신호를 주파수영역의 신호로 변환한다. 이러한 변환은 임의의 영역에 존재하는 신호를 다른 영역으로 변환함으로써 기존의 영역에서는 알 수 없는 정보를 알아낼 수 있기 때문이다. 웨이블렛 변환을 이해하기 위해 우선 퓨리에변환에 대해 먼저 개념적으로 살펴보자.

그림 5를 보면 S3는 2π초 동안 진행하는 신호이다. 그리고 그 아래로 진동수가 1, 2, 그리고 4인 싸인함수들이 있다. 이 함수들의 주기(Period)는 각각 π, $\pi/2$, 그리고 $\pi/4$이다(이 그림에서는 a로 표현되어있다). 퓨리에변환이란 대상함수 S3와 특정의 주파수를 갖는(또는 주기)함수와 얼마나 상관성(Correlation)을 갖고 있는 가, 다시 말해 두 함수가 얼마나 유사한 가를 계산하는 과정이라 할 수 있다. 특정 주파수(주기) 함수와 상관성이 크다는 것은 결국 대상신호가 그 주파수(주기)성분을 많이 포함하고 있다는 것을 의미한다. 그리고 이 과정은 주파수를 늘려가며(주기를 줄여가며) 계속 반복된다. 여기서 주목할 사항은 퓨리에변환은 1차원의 함수를 1차원의 함수로 변환시킨다는 것이다. 이는 싸인함수들은 시간적 한정성이 없기 때문이다.

웨이블렛변환도 이와 유사하게 진행된다. 단 웨이블렛 함수들의 시간적 한정성 때문에 1차원의 함수는 2차원으로 변환된다. 웨이블렛변환에서는 퓨리에변환의 '주기'라는 표현대신에 스케일(Scale)이라는 용어가 같은 의미로 쓰인다. 임의의 기본이 되는 웨이블렛함수(기저함수, Mother Wavelet이라고도 한다.)에 대한 스케일링(Scaling)은 위의 퓨리에변환의 주기와 동일하다. 그림 5에

1) 필터 계수의 갯수가 4라서 D4라고 부르기도 하는데[1] 점차 영이 되는 모멘트 차수를 기준으로 하여 이름을 결정하는 경우가 많아지고 있다.

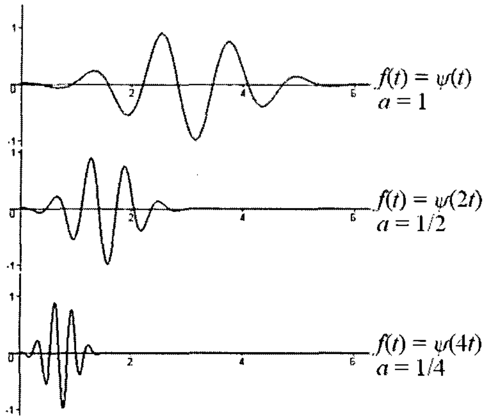


그림 6 웨이블렛 함수의 스케일링

있는 신호 S3의 변환을 위한 몰렛웨이블렛에 대한 스케일링을 그림 6에 나타내었다.

그림 6에서 보이듯이 a의 역수가 커질수록 퓨리에변환의 싸인함수처럼 웨이블렛함수가 조밀(Compact)해짐을 알 수 있다. 즉, a와 주기는 비례하며 진동수(Frequency)는 역비례한다. 하지만 이 경우, 퓨리에변환과는 달리 각각의 스케일링만으로는 대상 신호 S3와의 상관성 계산을 할 수 없다. 이는 대상 신호 S3는 0부터 2π초까지 존재하는데 반해 각각의 스케일된 함수들이 한정된 시간영역에서만 정의되기 때문이다. 이를 위해 위치변경(또는 전이, Shifting)개념이 도입된다. 다음 그림 7에 그림 6의 a=1/4인 함수의 4초만큼의 위치변경을 나타내었다. 즉, a=1/4인 함수와 그림 5의 신호 S3와의 상관도를 계산하기 위해서는 이러한 위치변경을 반복적으로 수행하여야 하는 것이다.

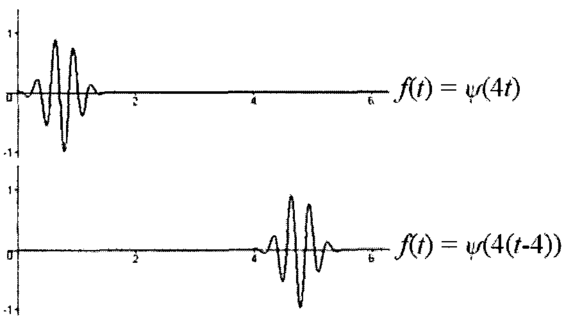


그림 7 위치변경(shifting)

종합적으로, 웨이블렛변환을 과정별로 요약하면 아래와 같다.[4)]

1단계 : 기본 스케일의 웨이블렛함수를 구한다.

2단계 : 구해진 웨이블렛함수와 변환대상 함수와의 상관도를 구한다(그림 8). 다시 말해 두 함수가 얼마나 유사한가를 따지는 것이며, 이때의 상관도는 사용하는 웨이블렛의 종류에 따라 다르다. 이때 구해진 상관도를 웨이블렛 계수(Wavelet Coefficient)라 한다.

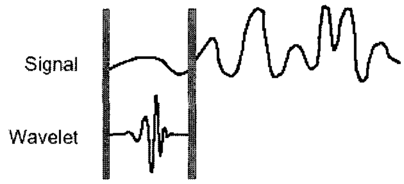


그림 8 웨이블렛 변환 2단계

3단계 : 웨이블렛을 오른쪽으로 위치변경(Shift)한 후 과정 2단계를 반복한다(그림 9). 그리고, 이 3단계를 신호의 끝까지 반복한다.

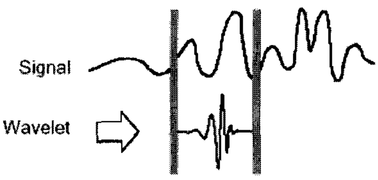


그림 9 웨이블렛 변환 3단계

4단계 : 웨이블렛을 스케일링(확장, Stretch)하고 과정 1단계부터 3단계까지를 반복한다(그림 10).

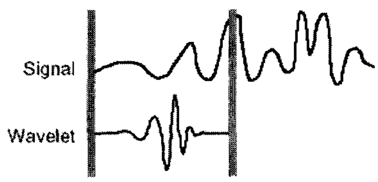


그림 10 웨이블렛 변환 4단계

5단계 : 1-4단계까지를 모든 스케일의 웨이블렛에 대해 반복 수행한다.

4. 연속웨이블렛변환과 이산웨이블렛변환

연속웨이블렛변환(Continuous Wavelet Transform, 이하 CWT)이란 모든 가능한 스케일과 위치에서의 웨이블렛을 이용하여 상관도를 계산함을 말한다. 다시 말하면, 위의 과정 3단계에서 오른쪽으로 위치변경 할 때 단위 웨이블렛의 크기만큼(웨이블렛의 진행시간)이 아니라 바로 옆 시간($t = t + \Delta t$, Δt = 임의의 작은 시간)으로 변경하고, 4단계에서도 a가 2의 제곱으로 스케일링 되는 것이 아니라 모든 실수에 대해 스케일링 함을

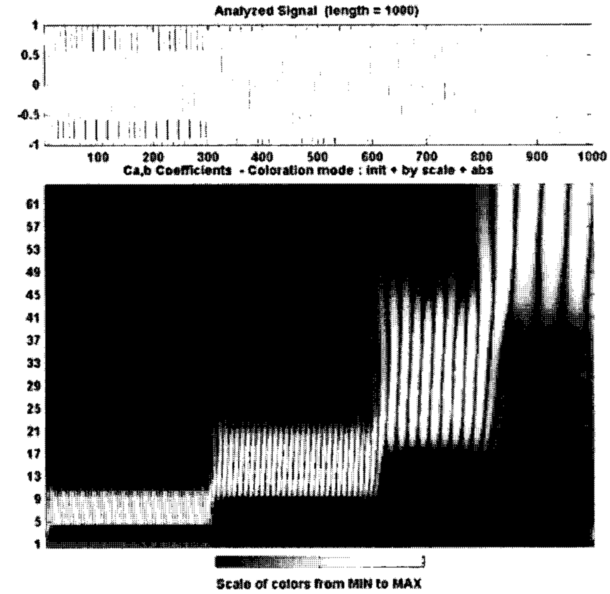


그림 11 신호 S2의 CWT 결과

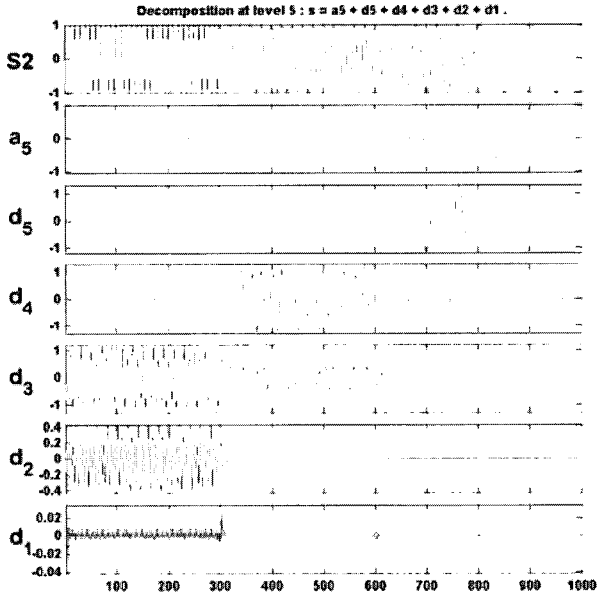


그림 12 신호 S2의 DWT 결과

말한다. 그림 11은 그림 2의 신호 S2에 대한 CWT 결과를 나타낸다. CWT의 경우 임의의 시간과 스케일(주기)에 대해 웨이블렛 계수가 계산되므로, 웨이블렛 계수값의 크기를 3차원형태의 그래프로 표현하거나 그림 11과 같이 등고선개념을 이용한 스칼로그램(Scalogram)의 형태로 결과를 표현하게 된다.

그림 11에서는 웨이블렛계수가 클수록, 즉, 상관도(유사성)이 클수록 밝게 나타나며, 독자의 편의를 위해 상단부분에 신호 S2를 다시 나타냈었다. 여기서, 그림3의 퓨리에변환에서는 표현할 수 없는 각 주파수성분별 진행시간과 그 경계가 확연히 나타나 있는 것을 쉽게 알 수 있다. 그림 11의 CWT는 그림 4의 마이어 (Meyer) 웨이블렛을 사용하였다.

이와 대조적으로 이산웨이블렛변환(Discrete Wavelet Transform, 이하 DWT)은 한정된 시간간격과 스케일에 대해서만 웨이블렛변환을 하는 것을 말한다. 흔히 쓰이는 방법으로 2진법 (Dyadic) DWT를 많이 사용하는데 이는 그림 6에서와 같이 웨이블렛의 스케일이 2의 제곱으로 늘어나는 것을 말한다. 이때 위치변경도 Δt 만큼이 아니라 단위 웨이블렛의 크기만큼 변경하며, 각 웨이블렛의 스케일에 따라 위치변경의 크기 또한 달라진다. 그림 12에 그림2의 신호 S2에 대한 DWT 결과를 나타내었다. DWT의 경우 CWT의 경우와 달리 스케일이 2의 배수로 커지므로 DWT 결과를 그림 12에서와 같이 해당 스케일의 웨이블렛과의 상관도 값을 시간별로 나타낸다. 이 그림 12에서도 그림 11과 마찬가지로 특정 주기특성을 갖는 웨이블렛 스케일에 따른 시간정보를 알 수 있으며, 각 주파수성분별 진행시간과 그 경계를 확연히 구분할 수 있다. 그림 12의 DWT는 DB7을 이용하여 구했다.

그림 12에서 a와 d는 각각 근사정보(Approximation) 디테일정보(Detail)를 나타내는데, 이는 이산변환(DWT)의 결과의 표현이다. DWT는 대상신호를 하이패스필터와 로우패스필터를 통과시키는 방식으로 진행되는데 하이패스필터를 거친 신호를 디테일정보, 로우패스필터를 거친 신호를 근사정보라 한다(그림 13). 그림 13에서 Down Sampling(한 단어로 Downsamling 이라 쓰기도 한다.)은 신호에서 하나 걸러 하나씩의 신호를 제거하는 것을 뜻한다. 이는 두 필터를 통과시킨 신호들의 합한 총 길이가 원래 신호의 길이와 같도록 하기 위함이다.

DWT는 이 필터링의 과정이 반복적으로 수행되는데[5] (그림 14), 만일 DWT에서와 같이 근사정보만을 계속 필터링하지 않고 디테일정보까지 계속적으로 필터링 하는 것을 웨이블렛 패킷분석(Wavelet Packet Analysis)

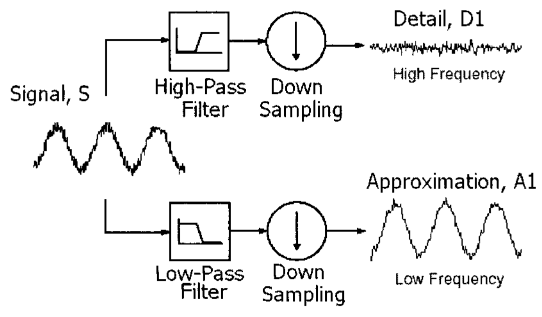


그림 13 단위레벨 DWT

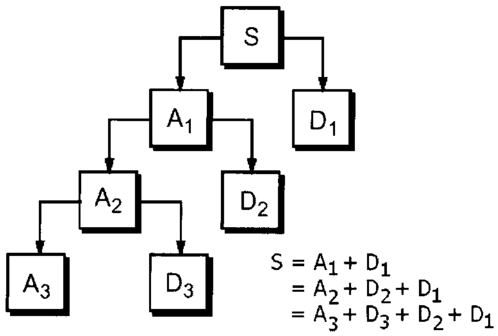


그림 14 다중레벨(Multi-level) DWT

라 한다. 이렇듯 연속적인 필터링에 의하여 DWT를 수행하는 것을 가속웨이블렛변환(Fast Wavelet Transform, FWT) 이라 하며, 가속퓨리에변환(Fast Fourier Transform, FFT)의 경우 계산량의 차수(Order)가 N(log(N)인 반면 FTW의 경우 차수가 N이기에 보다 빠른 변환이 가능하다.[1] 그림 14에서 보이듯이 임의레벨에서의 DWT의 결과는 하나의 근사정보(Approximation)와 여러 개의 디테일정보(Details)로 이루어 짐을 알 수 있다. 그림 12의 경우 필터링을 5레벨까지 수행한 경우이다.

5. 웨이블렛의 적용

웨이블렛의 적용분야는 아주 다양하다. 그 적용은 당연히 기존 퓨리에변환을 적용하였을 때 한계를, 예를 들어 시간정보의 부재를 극복하고자 하는 식으로 이루어 졌다. 여기서는 그 중 건축구조분야와 관련이 있는 적용 몇 가지에 대해 소개하고자 한다.

5.1 필터링

그림 13과 14에서 알 수 있듯이, 기본적으로 DWT 과정자체가 하이패스와 로우패스 필터링의 연속적인 과정이기에 이 자체가 필터로서 사용될 수 있다. 아래 그림 15는 주기함수에 잡음이 포함되어 있는 경우에 웨이블렛이 하이패스와 로우패스 필터로 사용된 예이다.[6] 각 함수들의 퓨리에 변환은 그림 16에 나타나 있다. 그림 15와 16에서 (a)는 원 신호를, (b)는 하이패스필터된 신호를, 그리고 (c)는 로우패스필터된 신호를 나타낸다.

5.2 잡음제거(Noise Removal, De-nosing)

잡음제거는 구조물의 진동제어, 특히 구조물의 식별(System Identification)에 있어 아주 필수적인 사항이다. 웨이블렛을 이용한 잡음제거의 경우 시각적으로는 앞 예제와 비슷한 결과를 나타내지만 방법에 있어서는 커다란 차이가 있다. 앞의 필터 예제의 경우 대상신호를 특정 주파수를 기준으로 그 보다 높은 주파수 성분과 낮은 주파수 성분의 신호로 나누는데 반해, 잡음제거의 경우는 웨이블렛 변환 결과 웨이블렛 계수가 일정한 값 이하일 경우 무시한 후(즉 0으로 만든 후) 웨이블렛 역변환을 하는 방식으로 진행된다. 퓨리에 변환과 달리, 웨이블렛 변환된 신호의 시간 해상도(Time Resolution)는 주파수가 커질수록 커지며, 주파수 해상도(Frequency Resolution)는 주파수가 작아질수록 커

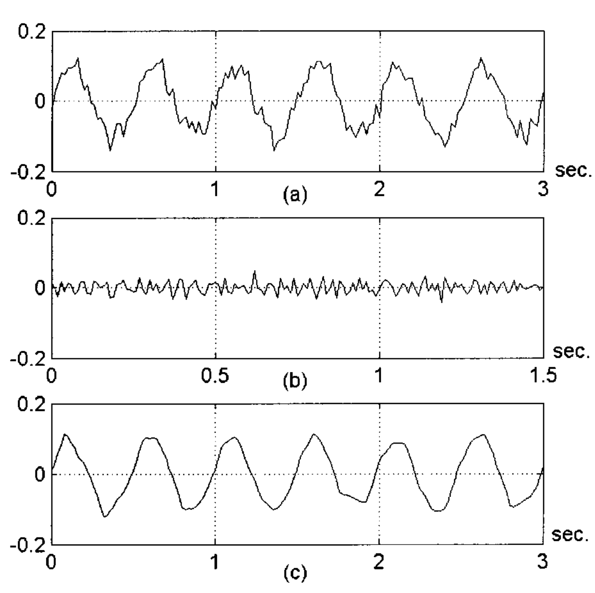


그림 15 하이, 로우패스 필터링(시간)

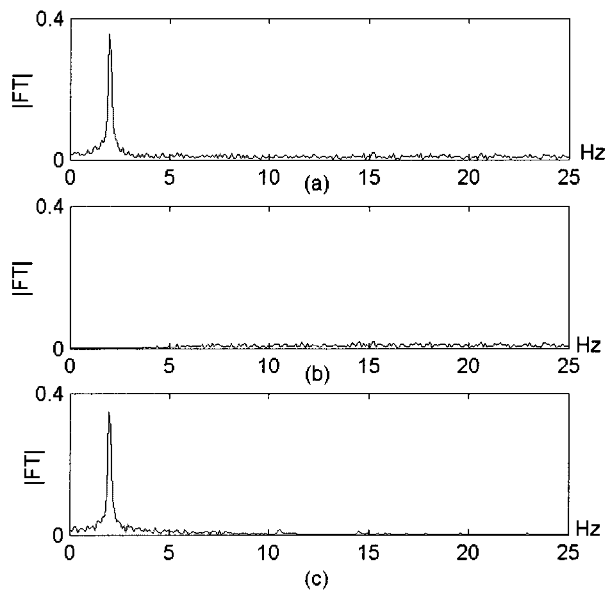


그림 16 하이, 로우패스 필터링(주파수)

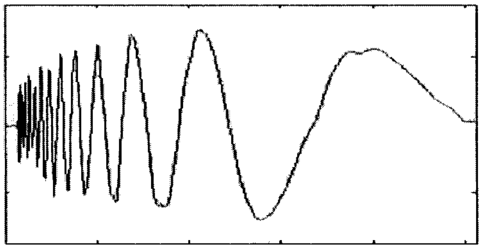


그림 17 잡음제거 예제

진다. 이러한 특징은 고주파수에서의 노이즈를 처리하는데 있어서 효과적이다. 그림 17은 잡음제거의 예를 보여준다. 여기서 원 신호는 시간에 따라 주기가 계속 길어지는 도플러(Doppler) 신호에 잡음이 추가된 경우이다.

5.3 구조물의 손상위치 추정(불연속점의 탐지, Detecting Discontinuity)

흔히 구조물의 비파괴 검사 등 에서는 고유주기 등의 구조물의 동적특성을 찾아 그 변화를 알아봄으로써 구조물의 손상을 추정한다. 이때 중요한 것이 불연속점의 탐지이다. 이는 불연속점이 손상된 구조부재의 위치를 나타내기 때문이다. 이를 위해서 웨이블렛변환에서는 시간축 대신에 위치축을 사용한다. 그림 12나 그림 13에서 x-축이 시간이 아닌 위치라면 이 위치에서 불연속이 생김을 쉽게 찾아낼 수 있을 것이다.

5.4 시스템식별(System Identification)

잡음제거나 손상위치 측정뿐 아니라, 웨이블렛변환이 시스템식별에 직접 사용되기도 한다. 시스템 식별 방법 중 많은 방법이 Markov 파라미터로 알려진 펄스 응답에 기초하고 있다. 이것을 구하기 위한 주파수 영역의 방법은 측정된 입출력 데이터를 퓨리에 변환하여 전달함수(Transfer Response Function)를 구하고, 이를 퓨리에역변환하여 Markov 파리미터를 구하는 것이었다. 그러나 퓨리에 역변환 과정에서 알리아싱(Aliasing)에 의한 Markov 파라미터의 왜곡 현상이 발생되며, FFT-기반의 방법이 실용적이 되기 위하여서는 입력 신호의 Frequency Spectrum이 모든 주파수를 포함하여야 하며, 특히 신호 자체가 주기적(Periodic) 이어야 한다는 단점을 갖고 있다.

한편, 시간 영역 방법은 시간 영역에서의 입출력 데이터로부터 직접 Markov 파라미터를 구하게 된다. 이 방법은 알리아싱 등에 의한 Markov 파라미터의 왜곡은 없으나 감쇠 성능이 낮은 시스템의 경우 매우 큰 입력 행렬의 역행렬을 구해야 하는 단점이 있다. 또한 측정된 입출력 데이터에 상당한 노이즈가 포함되어 있을 경우 시간영역 방법에서는 Averaging 방법에 의존하여 노이즈 문제를 처리하고 있으나, 측정된 신호양이 적거나 할 때에는 시스템 식별의 신뢰성을 떨어뜨리며 이러한 문제를 처리할 수 있는 체계적인 방법이 없다.

웨이블렛을 이용하여 Markov 구하는 경우, 시간에 따라 주파수성분이 변하는 비정상적인 신호의 처리에 있어 특히 효과적이다. 이러한 특징은 지진이나 바람에 의한 구조물의 진동에 대한 해석에 있어 중요한 역할을 한다. 특히 앞의 예제에서 설명하였듯이 잡음을 많이 포함하고 있는 현장 측정 데이터의 분석에 있어서 효과적이다

6. 결　론

앞에서 밝힌 예 이외에도 웨이블렛이 쓰이는 분야는 아주 많다. 특히 데이터압축(Data Compression)에서 상당히 많은 연구가 이루어 졌는데, 영상과 음성의 압축표준의 하나인 MPEG4(Moving Picture Experts Group)와 MPEG2000에 이 웨이블렛이 쓰인다. 그리고 미국 FBI에서 지문의 감식과 처리에서도 사용되고 있으며, 심지어 의사들이 뇌파 (EEG)의 특성을 분석하는데 쓰이기도 한다.

웨이블렛이 실질적으로 연구되기 시작한 것은 이제 15년이 채 되지 않는다. 이는 아직도 웨이블렛의 적용 가능성이 무수히 크다는 것을 말해준다. 특히, 건축 구조분야에도 이제 차츰 그 적용이 시작되고 있는 추세이다. 이 글이 앞으로 웨이블렛을 연구하고자 하는 독자에게 조금이나마 도움이 되길 바란다.

참 고 문 헌

1. Newland, D. E., An Introduction to Random Vibrations, Spectral & Wavelet Analysis, John Wiley & Sons, Inc, NY, 1994
2. Polikar, R. The Wavelet Tutorial, http://engineering.rowan.edu/~polikar/WAVELETS/WTtutorial.html
3. Daubechies, I., Ten Lectures on Wavelets, SIAM, Phiadelphia, 1992
4. Misiti, M, Misiti, Y., Oppenheim, G., and Poggi, J.-M., Wavelet Toolbox for Use with Matlab,

2002, The Mathworks
5. 김홍진, Wavelet-based Adaptive Control of Structures under Seismic and Wind Loads, 박사논문, 2002, The Ohio State University
6. Adeli, H. and Kim, H. Wavelet-Hybrid Feedback LMS Algorithm for Robust Control of Structures, Journal of Structural Engineering, accepted to be published