

혼합 체적-경계 적분방정식법을 이용한 응력확대계수 계산

이 정 기* · 이 형 민*

(2002년 9월 30일 접수, 2003년 4월 18일 심사완료)

Calculation of Stress Intensity Factors Using the Mixed Volume and Boundary Integral Equation Method

Jung-Ki Lee and Hyeong-Min Lee

Key Words: Mixed Volume and Boundary Integral Equation Method(혼합 체적-경계 적분방정식법), Cracks(균열), Stress Intensity Factors(응력확대계수), Anisotropic Inclusions(이방성 함유체), Volume Integral Equation Method(체적 적분방정식법), Boundary Integral Equation Method(경계요소법)

Abstract

A recently developed numerical method based on a mixed volume and boundary integral equation method is applied to calculate the accurate stress intensity factors at the crack tips in unbounded isotropic solids in the presence of multiple anisotropic inclusions and cracks subject to external loads. Firstly, it should be noted that this newly developed numerical method does not require the Green's function for anisotropic inclusions to solve this class of problems since only Green's function for the unbounded isotropic matrix is involved in their formulation for the analysis. Secondly, this method takes full advantage of the capabilities developed in FEM and BIEM. In this paper, a detailed analysis of the stress intensity factors are carried out for an unbounded isotropic matrix containing an orthotropic cylindrical inclusion and a crack. The accuracy and effectiveness of the new method are examined through comparison with results obtained from analytical method and volume integral equation method. It is demonstrated that this new method is very accurate and effective for solving plane elastostatic problems in unbounded solids containing anisotropic inclusions and cracks.

1. 서 론

복합재료의 구성물들은 일반적으로 등방성 재료로 이루어진다. 그러나, 기존의 금속재료에 비하여 비강성, 비강도 및 내열성, 내마모성 등이 뛰어나 항공분야에 사용되고 있는 금속기지 복합재료에서는 Ti 기지가 등방성 재료로 이루어지지만 SiC 섬유는 강한 이방성 재료로 이루어진다.⁽¹⁾

따라서, 복합재료에서 균열의 생성 및 전파 등에 관한 파손 메카니즘을 정확히 예측하기 위해서는, 등방성 함유체 뿐만 아니라 이방성 함유체와 균열이 포함된 등방성 무한고체가 외부의 하중을 받을 때 균열선단에서의 응력확대계수에 대한 정확한 해석이 필요하다.^(2,3)

함유체와 균열사이의 상호작용에 관한 연구는 많은 연구자들에 의하여 활발하게 진행되고 있다. 예를 들면, Erdogan과 Gupta,⁽⁴⁾ Erdogan et al.,⁽⁵⁾ Atkinson,⁽⁶⁾ Li와 Chudnovsky,^(7,8) Sung과 Wong,⁽⁹⁾ Chen과 Nakamichi,⁽¹⁰⁾ Chen,⁽¹¹⁾ Helsing,⁽¹²⁾ Cheeseman과 Santare,⁽¹³⁾ Pahn과 Earmme,⁽¹⁴⁾ Wang과 Chau⁽¹⁵⁾ 그리고 Theotokoglou E. N.과 Theotokoglou E. E.⁽¹⁶⁾ 등이 등방성 함유체의 내부,

† 책임저자, 회원, 홍익대학교 기계정보공학과

E-mail : inq3jkl@wow.hongik.ac.kr

TEL : (041)860-2619 FAX : (041)866-9129

* 홍익대학교 대학원 기계정보공학과

외부 또는 경계에 존재하는 균열이나 등방성 함유체를 관통하는 균열에 대한 연구를 수행하였다. 최근에는 Hwu et al.,⁽¹⁷⁾ Chang,⁽¹⁸⁾ Kassam et al.,⁽¹⁹⁾ Bush,⁽²⁾ Cheeseman과 Santare,⁽²⁰⁾ Xiao와 Chen⁽²¹⁾ 그리고 Knight et al.⁽²²⁾ 등이 복잡한 하중을 고려한 문제들, 다수의 등방성 함유체들과 균열을 포함하는 문제들 또는 코팅(coating, interphase)을 포함하는 함유체와 균열이 포함된 문제들에 대한 연구를 수행하였다. 또한, 임원근과 최승룡⁽²³⁾은 2축 하중을 받는 직교이방성체내 경사균열진전의 해석에 대한 연구를 수행하였으나, 이방성 함유체와 균열 사이의 상호작용에 대한 연구는, 거의 이루어지지 않고 있다.

본 논문에서는 서로 상호작용을 하는 다수의 이방성 함유체 및 균열을 포함하는 등방성 무한고체가 정적 무한하중을 받을 때 균열선단에서의 응력확대계수에 대한 계산을 효과적으로 수행할 수 있는 혼합 체적-경계 적분방정식법이라는 새로운 수치해석 방법을 소개한다. 아울러, 본 해석 방법의 정확성 및 효율성을 검증하기 위하여, 비교적 간단한 형태의 이방성을 나타내는 직교 이방성 함유체와 균열을 포함하는 무한고체에서 균열선단에서의 응력확대계수에 대한 계산을 수행하고, 체적 적분방정식법 및 ANSYS를 이용한 유한요소법에 의한 결과와 비교 검토해 본다.

2. 체적 적분방정식법(VIEM)

Fig. 1은 재료특성이 다른 다양한 형태를 갖는 다수의 함유체 및 균열을 포함하는 무한고체가 무한하중을 받는 일반적인 탄성정역학 문제를 나타낸다. 여기서, 무한하중이란 무한원방에서 작용하는 하중을 나타낸다.

기지는 무한공간을 차지하는 균일한 등방성 재료로 이루어지고, 함유체들은 기지와 다른 이방성 재료로 이루어진다고 가정한다. $c_{ijkl}^{(1)}$ 은 함유체의 탄성상수를 나타내고, $c_{ijkl}^{(2)}$ 는 기지의 탄성상수를 나타낸다. 함유체들과 기지 사이의 경계면은 변위와 표면력 벡터의 연속성을 보장하는 완전결합이라고 가정한다.

체적 적분방정식은 본래 다수의 함유체를 포함하는 무한고체에서 탄성과의 산란문제를 해석하기 위해 개발되었으며,⁽¹²⁴⁾ 탄성정역학 문제해석의

경우에는 파형의 주파수가 0인 극한 경우의 탄성 동역학 문제로 수식화 할 수 있고, 탄성정역학 문제해석을 위한 체적 적분방정식은 아래와 같이 주어진다.^(25,26)

$$u_m(x) = u_m^o(x) - \int_R \delta c_{ijkl} g_{i,j}^m(\xi, x) u_{k,l}(\xi) d\xi \quad (1)$$

여기서, $u(x)$ 는 무한고체의 임의의 위치에서의 변위성분, $u^o(x)$ 는 무한하중에 대한 변위성분을 나타낸다. 식 (1)에서 적분은 전체 무한공간(R)에 대해서 이루어지고, $\delta c_{ijkl} = c_{ijkl}^{(1)} - c_{ijkl}^{(2)}$ 이며 함유체와 기지 사이의 탄성상수의 차이를 나타낸다. $g_{i,j}^m(\xi, x)$ 은 등방성 무한기지에서의 탄성정역학 Green 함수(또는, Kelvin의 해)이다. 즉, $g_{i,j}^m(\xi, x)$ 은 등방성 무한기지의 x 에서 m 방향으로 작용하는 단위 집중하중 때문에 ξ 에서 발생하게 되는 변위 벡터의 i 방향 성분을 나타낸다. 식 (1)에서 합의 규약과 콤마 표기법이 사용되었으며, 미분은 적분변수 ξ_i 에 관해서 행해진다. 여기서, δc_{ijkl} 가 함유체 내부에서만 0이 아니므로, 피 적분함수(integrand)는 함유체 외부의 무한공간에서는 0이 된다는 사실을 주목해야 한다.

만약 x 가 함유체 내부에 속하면, 식 (1)은 함유체 내부에서의 미정 변위 벡터 $u(x)$ 에 관한 적분-미분 방정식이 된다. 따라서, 임의의 형상을 갖는 단일의 함유체라 할지라도, 식 (1)의 해를 해석적으로 구한다는 것은 매우 어려운 문제가 된다.

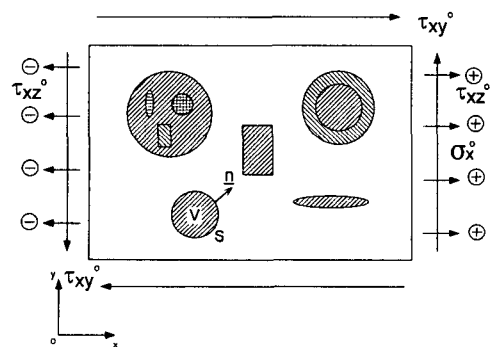


Fig. 1 Geometry of the general elastostatic problem

그러므로, 함유체 내부를 표준의 유한요소들을 사용해서 요소 분할하여 함유체 내부에서의 $u(x)$ 를 수치해석 방법으로 결정하는 체적 적분방정식법이 이 정기와 Mal^(24,25)에 의하여 개발되었다. 일단, 함유체 내부에서의 $u(x)$ 가 결정되면, 함유체 내부에서의 변형률 및 응력을 계산할 수 있고, 또한 함유체 외부에서의 변위 및 응력은 식 (1)의 적분 값을 구함으로써 별다른 어려움 없이 계산할 수 있다.

일반적으로 이방성 재료에서의 Green 함수는 등방성 재료의 경우와 비교해 볼 때 복잡한 형태로 나타나며, 특히, 탄성동역학 문제에서는 이방성 재료에서의 Green 함수를 구하는 것이 매우 어려운 것으로 알려져 있다.⁽²⁷⁾

식 (1)에서 g_i^m 은 등방성 무한기지에서의 탄성정역학 Green 함수이므로, 체적 적분방정식법에서는 이방성 함유체에서의 Green 함수를 필요로 하지 않는다는 장점이 있다.

Figs. 2와 3에 있는, 서로 인접한 등방성 또는 직교 이방성 함유체와 균열을 포함하는 등방성 무한기지가 무한 분포하중을 받는 경우에, 균열 선단에서의 mode I 응력확대계수를 결정하는 문제를, 평면 변형률(plane strain) 문제로 가정하여, 고찰해본다.

2.1 직교 이방성 함유체를 포함하는 무한 등방성 기지 해석

직교 이방성 함유체를 포함하는 무한 등방성 기지에서 2차원(plane-strain) 탄성정역학 문제해석을 위한 체적 적분방정식 (1)은

$$\begin{aligned}
 u_1(x) = & u_1^0(x) \\
 & - \int_R \{ [\delta c_{11} g_{1,1}^1 u_{1,1} + \delta c_{12} g_{1,1}^1 u_{2,2} \\
 & + \delta c_{66} g_{1,2}^1 (u_{1,2} + u_{2,1})] \\
 & + [\delta c_{22} g_{2,2}^1 u_{2,2} + \delta c_{21} g_{2,2}^1 u_{1,1} \\
 & + \delta c_{66} g_{2,1}^1 (u_{1,2} + u_{2,1})] \} d\xi_1 d\xi_2
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

와

$$\begin{aligned}
 u_2(x) = & u_2^0(x) \\
 & - \int_R \{ [\delta c_{11} g_{1,1}^2 u_{1,1} + \delta c_{12} g_{1,1}^2 u_{2,2} \\
 & + \delta c_{66} g_{1,2}^2 (u_{1,2} + u_{2,1})] \\
 & + [\delta c_{22} g_{2,2}^2 u_{2,2} + \delta c_{21} g_{2,2}^2 u_{1,1} \\
 & + \delta c_{66} g_{2,1}^2 (u_{1,2} + u_{2,1})] \} d\xi_1 d\xi_2
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

로 표시되며, $u_1(x)$ 와 $u_2(x)$ 는 고체의 임의의 위치에서의 변위 성분을 나타낸다. 식 (2)와 (3)에서 $x_1(x)$, $x_2(y)$, $x_3(z)$ 축은 직교 이방성 대칭축에 평행하다고 가정한다. 체적 적분방정식법에서는 직교 이방성 함유체^(28~30) ($c_{11}, c_{12}, c_{22}, c_{66}$)와 등방성 기지(λ_2, μ_2)의 물질 특성치(material properties)의 차이, 즉, $\delta c_{11} = c_{11} - (\lambda_2 + 2\mu_2)$, $\delta c_{22} = c_{22} - (\lambda_2 + 2\mu_2)$, $\delta c_{12} = c_{12} - \lambda_2$, 그리고 $\delta c_{66} = c_{66} - \mu_2$ 이 필요하게 된다. 식 (2), (3)에서 g_i^m 은 무한 공간을 차지하는 등방성 기지에서의 Green 함수이다.

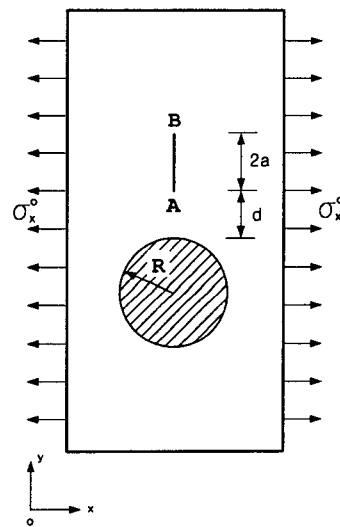


Fig. 2 Geometry of a crack and an isotropic cylindrical inclusion in an infinite isotropic medium subjected to remote stress

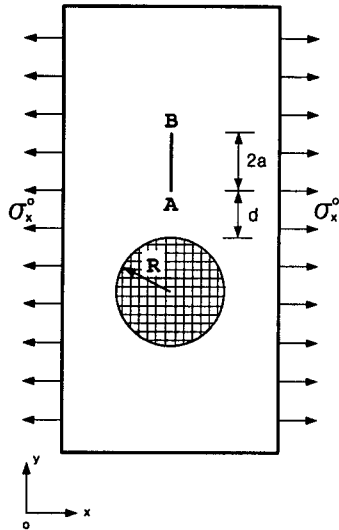


Fig. 3 Geometry of a crack and an orthotropic cylindrical inclusion in an infinite isotropic medium subjected to remote stress

2.2 체적 적분방정식법을 이용한 균열 모델

체적 적분방정식법은 함유체 문제에는 매우 잘 적용되지만, 식 (1)의 원래의 형태로는 균열과 공동(void)의 문제에는 적용되지 않는다. 그러나, 공동(void)을 매우 작은 물질상수(material constants)를 갖는 극한 개념의 함유체로써 취급하면, 체적 적분방정식법을 공동 및 균열 문제를 해석하는데 적용할 수 있다. 이 과정에서 발생할 수 있는 오차들은 공동에서의 물질상수의 적당한 선택으로 작게 만들 수 있다.^(24,25)

따라서, 체적 적분방정식법을 균열 문제에 적용하기 위하여, 균열을 매우 작은 물질상수(기지의 약 1/10,000정도)를 갖는 가늘고 긴 타원 형태의 함유체로써 모델링할 수 있다. 균열 모델에 사용된 타원의 가로와 세로의 비(aspect ratio)를 결정하기 위하여, 그 값을 여러 가지로 변화시켜 가면서 균열선단에서 계산된 균열개구변위(crack opening displacement)를 이용한 응력확대계수를 구하여 해석적 해와 비교 검토해 보았다. 그 결과, 타원의 가로와 세로의 비를 40 이상으로 하면 아주 정확한 응력확대계수가 얻어짐을 알 수 있었다.⁽²⁵⁾

Fig. 4는 PATRAN⁽³¹⁾을 사용해서 만든 대표적인

분할된 균열 모델의 1/4을 보여준다. 48개의 표준의 8-절점 사각형 및 6-절점 삼각형 유한요소가 사용되었다. Fig. 4(a)에 나타난 대로, 정확한 응력확대계수를 구하기 위하여 균열선단에 한 개의 4분점(quarter-point) 유한요소를 두었다.⁽²⁵⁾

2.3 응력확대계수 계산

유한요소법 또는 경계요소법 등과 같은 수치해석 방법에서 응력확대계수를 정확하게 결정하기 위하여 다양한 방법들이 시도되고 있다. 그러한 방법 중에서 많이 사용되고 있는 방법으로, 균열선단 근처에서의 변위에 대한 수치해석 결과를 해석적 해와 비교함으로써 응력확대계수를 결정하는 방법이 있다.⁽³²⁾

균열선단 근처에서 균열 면에서의 변위분포는 다음과 같이 표현됨을 잘 알 수 있다.

$$\begin{aligned}
 u_2^+ - u_2^- &= K_I \frac{(x+1)}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} + O(1) \\
 u_1^+ - u_1^- &= K_{II} \frac{(x+1)}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} + O(1) \\
 u_3^+ - u_3^- &= K_{III} \frac{4}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} + O(1)
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

여기서, K_I, K_{II}, K_{III} 은 각각 mode I, mode II, 및 mode III 응력확대계수를 나타내며, $x = 3 - 4\nu$ (plane strain), $\frac{(3-\nu)}{(1+\nu)}$ (plane stress) 이고, r 은 균열면에서 균열선단으로부터 임의의 곳까지의 거리를 나타내며, u_i^\pm 은 서로 마주보는 균열면에서의 변위성분을 나타낸다. 체적 적분방정식법에서는 균열선단에서 매우 가까운 요소 [A](Fig. 4(a))의 세 절점에서의 변위에 대한 수치해석 결과를 이용하여 응력확대계수를 구하고, 그 값들을 평균함으로써 응력확대계수를 결정하였다.⁽²⁵⁾

Fig. 5는 체적 적분방정식법에 사용된 대표적인 분할된 모델의 예이다. 표준의 8-절점 사각형 및 6-절점 삼각형 유한요소가 사용되었으며, 함유체에 사용된 요소의 수는 144개이며, 균열에 사용된 요소의 수는 192개이다.

체적 적분방정식법을 이용한 수치해석 결과는 4.1절에서 설명하기로 한다.

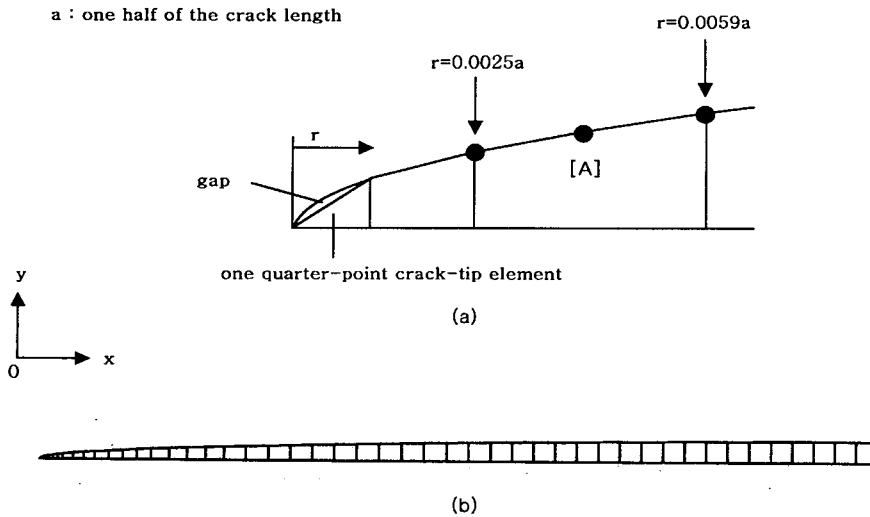


Fig. 4 (a) Enlarged view of the crack tip and (b) one quarter of a typical crack model in the VIEM

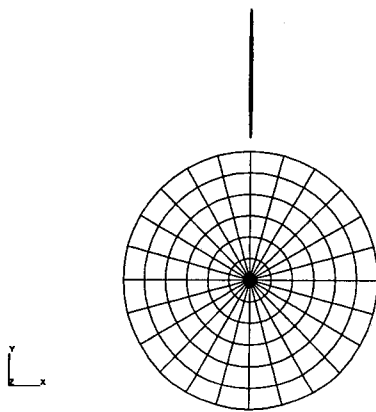


Fig. 5 A typical discretized model in the VIEM

3. 혼합-체적-경계 적분방정식법

앞에서는, Fig. 2와 Fig. 3에 있는, 등방성 또는 이방성 함유체와 균열이 등방성 기지에 포함되어 있는 무한고체가 무한 인장하중을 받는 경우에,

균열선단에서의 응력확대계수를 결정하는 평면변형률 문제를, 함유체 및 균열 모두에 체적 적분방정식법을 적용하여, 고찰해 보았다. 이번에는, 직교 이방성 함유체에 대하여는 체적 적분방정식법을 적용하고, 균열에 대하여는 경계요소법을 적용하는 혼합 체적-경계 적분방정식법에 대하여 고찰해본다. 체적 적분방정식법과 혼합 체적-경계 적분방정식법의 근본적인 차이는 균열 부분을 해석할 때, 체적 적분방정식을 적용하느냐 아니면 경계 적분방정식을 적용하느냐에 달려있다. 체적 적분방정식법 대신에 혼합 체적-경계 적분방정식법을 적용하면, 직교 이방성 함유체에 체적 적분방정식법을 적용함으로써 직교 이방성 재료에 대한 Green 함수를 필요로 하지 않는다는 장점을 이용할 수 있고, 균열에 경계요소법을 적용함으로써 분할요소의 수를 줄일 수 있으며, 또한, 균열의 경계면에서 표면력 벡터가 0이 된다는 사실을 이용할 수 있다.⁽²⁾

따라서, 혼합 체적-경계 적분방정식법이 체적 적분방정식법보다 더 효율적인 수치해석 방법이라고 사료된다.

식 (1)을 응용하면, 직교 이방성 함유체와 균열을 포함하는 무한고체에 대하여 혼합 체적-경계 적분방정식을

$$u_m(\mathbf{x}) = u_m^0(\mathbf{x}) - \int_V \delta c_{ijkl} g_{k,l}^{m(2)}(\xi, \mathbf{x}) u_{i,j}(\xi) d\xi + \int_S c_{ijkl}^{(2)} g_{k,l}^{m(2)} u_{i,j} n_j dS \quad (5)$$

로 표시할 수 있다.^(33,34) 여기서, $u_m(\mathbf{x})$ 는 고체의 임의의 위치에서의 변위성분을 나타내고, V 는 직교 이방성 함유체의 체적을 나타내며 S 는 균열의 경계면을 나타낸다. \mathbf{n} 은 S 에서의 바깥쪽 법선방향의 단위 벡터이고, 윗첨자 (2)는 등방성 기지에 대한 양(quantity)을 나타낸다.

혼합 체적-경계 적분방정식법에서는 균열을 해석하는데 경계 적분방정식을 적용하므로, 균열을 가늘고 긴 타원 형태로 모델링 할 수 있다. 균열 모델에 사용된 타원의 가로와 세로의 비는, 그 값을 여러 가지로 변화시켜 가면서 균열선단에서 계산된 균열개구변위(crack opening displacement)를 이용한 응력확대계수를 구하여 해석적 해와 비교 검토한 결과를 바탕으로 하여, 40으로 정하였다.⁽²⁵⁾

Fig. 6은 PATRAN⁽³¹⁾을 사용해서 만든 대표적인 분할된 균열 모델의 1/4을 보여준다. 46개의 표준의

2차 경계요소가 사용되었다. Fig. 6(a)에 나타난 대로, 정확한 응력확대계수를 구하기 위하여 균열선단에 한 개의 4분점(quarter-point) 경계요소를 두었다.⁽³²⁾

혼합 체적-경계 적분방정식법에서는, 실험 결과를 토대로 하여, 균열선단에서 매우 가까운 세 절점(Fig. 6(a)의 1, 2, 3)에서의 변위에 대한 수치 해석 결과를 식 (4)에 적용하여 응력확대계수를 구하고, 그 값들을 평균함으로써 응력확대계수를 결정하였다.⁽³²⁾ 여기서, a 는 균열의 전체 길이의 반을 나타내고, r 은 균열선단으로부터 임의의 곳까지의 거리를 나타낸다.

Fig. 7은 혼합 체적-경계 적분방정식법에 사용되어진 대표적인 분할된 모델의 예이다. 직교 이방성 함유체는 256개의 표준의 8-절점 사각형 및 6-절점 삼각형 유한요소를 사용하여 분할하였고, 균열의 경계면은 184개의 2차 경계요소를 사용하여 분할하였다.

식 (5)로부터, 직교 이방성 함유체의 분할된 절점(node)과 균열의 경계면의 절점(node)에서의 변위에 대한 선형 연립방정식은 다음과 같이 구해진다.

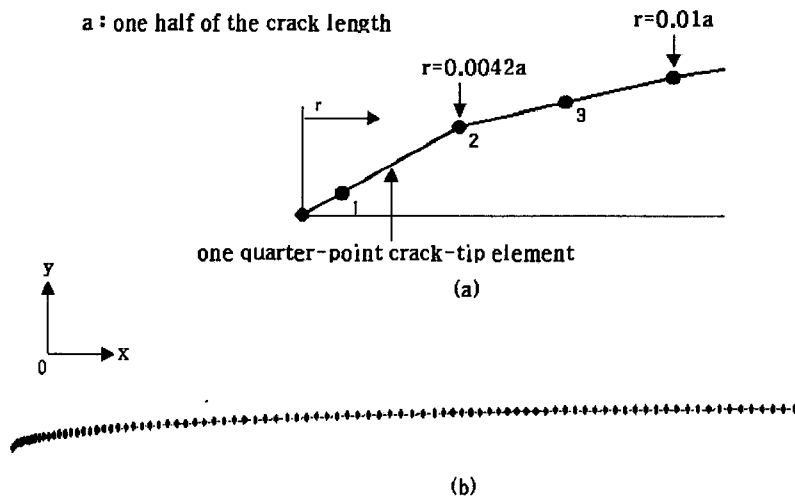


Fig. 6 (a) Enlarged view of the crack tip and (b) one quarter of a typical crack model in the mixed volume and boundary integral equation method

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} [E]_{[(m+n) \times (m+n)]} & [F]_{[(m+n) \times (m+n)]} \\ [G]_{[(m+n) \times (m+n)]} & [H]_{[(m+n) \times (m+n)]} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_1\}_{(m)} \\ \{u_1\}_{(n)} \\ \{u_2\}_{(m)} \\ \{u_2\}_{(n)} \end{Bmatrix} \\
 & = \begin{Bmatrix} -\{u_1^0\}_{(m)} \\ -\{u_1^0\}_{(n)} \\ -\{u_2^0\}_{(m)} \\ -\{u_2^0\}_{(n)} \end{Bmatrix} \quad (6)
 \end{aligned}$$

여기서,

$$\begin{aligned}
 & [E]_{[(m+n) \times (m+n)]} \\
 & = \begin{bmatrix} [[VV]-[I]]_{(m \times m)} & [VB]_{(m \times n)} \\ [BV]_{(n \times m)} & [[BB]-\frac{1}{2}[I]]_{(n \times n)} \end{bmatrix} \quad (6a)
 \end{aligned}$$

$$[F]_{[(m+n) \times (m+n)]} = \begin{bmatrix} [VV]_{(m \times m)} & [VB]_{(m \times n)} \\ [BV]_{(n \times m)} & [BB]_{(n \times n)} \end{bmatrix} \quad (6b)$$

$$[G]_{[(m+n) \times (m+n)]} = \begin{bmatrix} [VV]_{(m \times m)} & [VB]_{(m \times n)} \\ [BV]_{(n \times m)} & [BB]_{(n \times n)} \end{bmatrix} \quad (6c)$$

$$\begin{aligned}
 & [H]_{[(m+n) \times (m+n)]} \\
 & = \begin{bmatrix} [[VV]-[I]]_{(m \times m)} & [VB]_{(m \times n)} \\ [BV]_{(n \times m)} & [[BB]-\frac{1}{2}[I]]_{(n \times n)} \end{bmatrix} \quad (6d)
 \end{aligned}$$

을 나타내고, m 은 직교 이방성 함유체에서의 절점수를, 그리고 n 은 균열의 경계면(S)에서의 절점수를 나타내며, Fig. 7에 있는 모델에서 $m = 769$ 이고 $n = 368$ 이다. [VV]는 직교 이방성 함유체 내부에서의 상호작용(interaction)을, [VB]는 직교 이방성 함유체와 균열의 경계면과의 상호 작용을, [BV]는 균열의 경계면과 직교 이방성 함유체와의 상호작용을, 그리고 [BB]는 균열의 경계면에서의 상호 작용을 포함하는 행렬(matrix)들을 각각 나타낸다.

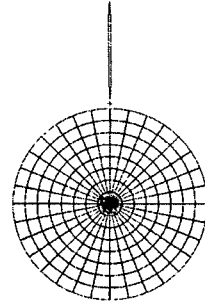


Fig. 7 A typical discretized model in the mixed volume and boundary integral equation method

따라서, 식 (6)으로부터 직교 이방성 함유체 내부에서의 변위 및 균열의 경계면에서의 변위를 구할 수 있고, 또한, 직교 이방성 함유체 내부에서의 변형률과 응력도 결정할 수 있다. 그 외의 모든 곳에서의 변위 및 응력은 식 (5)의 적분 값을 구함으로써 얻을 수 있다.

4. 응력확대계수

4.1 단일의 등방성 함유체와 단일의 균열 문제 해석

Fig. 2에 있는 서로 인접한 단일의 등방성 함유체와 단일의 균열을 포함하는 등방성 무한기지가 균일한 무한 분포하중을 받는 경우에, 균열선단에서의 mode I 응력확대계수에 대한 해석을 평면 변형률(plane strain) 문제로 가정하여 수행하였다. Fig. 5에 있는 체적 적분방정식법 모델과 Fig. 7에 있는 혼합 체적-경계 적분방정식법 모델을 사용하여, 체적 적분방정식법 및 혼합 체적-경계 적분방정식법에 의한 수치해석 해를 구하였다.

수치해석에 사용된 기지와 함유체의 물질 특성은 Table 1에 나타나 있다. 함유체와 기지에서 x 를 모두 2.0으로 가정하였으며, μ_1/μ_2 (μ_1 : 함유체의 전단계수, μ_2 : 기지의 전단계수)가 1/3(Iso #1)과 3.0(Iso #2)인 두 가지 경우에 대하여 수치해석을 수행하였다. 또한, 함유체와 균열 사이의 거리(d)를 변화시켜 가면서, 응력확대계수에 미치는 영향을 조사하여 보았다.

Table 1 Material properties of the isotropic matrix and the isotropic inclusion

(Unit: GPa)	Isotropic Matrix	Inclusion	
		Iso #1	Iso #2
λ	45.91	15.30	137.73
μ	45.91	15.30	137.73

우선, 체적 적분방정식법 및 혼합 체적-경계 적분방정식법에 의한 해석결과를 검증하기 위하여, $d/R=0.1$, $(d+2a)/R=1.1$ 그리고 $\mu_1/\mu_2=1/3$ 인 경우에 대하여 균열선단 A, B에서의 규준화된 mode I 응력확대계수를 구하여 Erdogan과 Gupta⁽⁴⁾의 해석해와 비교 검토해 보았다. 여기서, 규준화된 응력확대계수는 균열선단(A, B)에서 얻어진 K_I 값을 $\sigma_x \sqrt{\pi a}$ 으로 나눈 값(correction factor)을 의미한다. 체적 적분방정식법에 의한 A, B 선단에서의 응력확대계수는 각각 1.487, 1.150이었고, 반면에 혼합 체적-경계 적분방정식법에 의한 A, B 선단에서의 응력확대계수는 각각 1.503, 1.143이었다. 한편, 이에 대응하는 해석해⁽⁴⁾는 각각 1.482와 1.160이었다. 체적 적분방정식법에 의한 A선단에서의 오차(절대값)는 0.34%이고, B선단에서의 오차(절대값)는 0.86%로 나타났으며, 혼합 체적-경계 적분방정식법에 의한 A선단에서의 오차(절대값)는 1.41%이고, B선단에서의 오차(절대값)는 1.45%로 나타났다. 그러므로, 체적 적분방정식법 및 혼합 체적-경계 적분방정식법에 의한 해석결과가 정확함을 알 수 있었다.

체적 적분방정식법과 혼합 체적-경계 적분방정식법을 이용한 해석을 비교해 보면, 체적 적분방정식법에서는 균열 내부 전부를 표준의 유한요소를 사용하여 요소분할해야 하지만, 혼합 체적-경계 적분방정식법에서는 균열 면만을 표준의 경계요소를 사용하여 요소분할하므로, 분할요소의 수를 줄일 수 있다는 장점이 있다.

유한요소법과 혼합 체적-경계 적분방정식법을 이용한 해석을 비교해 보면, 균열과 함유체 사이의 거리를 변화시킬 때 유한요소법에서는 전체적인 모델을 변경해야 하는 번거로움이 있지만, 혼합 체적-경계 적분방정식법에서는 균열 면과 함유체 내부만을 요소분할하므로 함유체와 균열 사

Table 2 The normalized mode I stress intensity factor for a crack near an isotropic cylindrical inclusion in an infinite isotropic medium subjected to remote stress [VIEM]

d/R	(d+2a)/R	$K_I(A)$		$K_I(B)$	
		Iso #1	Iso #2	Iso #1	Iso #2
0.1	1.1	1.487	0.670	1.150	0.892
0.5	1.5	1.150	0.892	1.070	0.946
1.0	2.0	1.062	0.947	1.032	0.978

Table 3 The normalized mode I stress intensity factor for a crack near an isotropic cylindrical inclusion in an infinite isotropic medium subjected to remote stress [Mixed VBIEM]

d/R	(d+2a)/R	$K_I(A)$		$K_I(B)$	
		Iso #1	Iso #2	Iso #1	Iso #2
0.1	1.1	1.503	0.671	1.143	0.894
0.5	1.5	1.179	0.893	1.057	0.948
1.0	2.0	1.095	0.958	1.013	0.970

이의 거리를 편리하게 변경시킬 수 있고, 또한 분할요소의 수를 줄일 수 있다는 장점이 있다.

Table 2와 3은 등방성 함유체의 물질 특성치 및 함유체와 균열 사이의 거리를 변화시켜 보았을 때, 균열선단(A, B)에서의 규준화된 mode I 응력확대계수에 대한 체적 적분방정식법 및 혼합 체적-경계 적분방정식법에 의한 해석결과를 각각 나타내고 있다. 함유체가 기지보다 부드러운(soft) 재료로 이루어져 있으면, 균열만 존재할 때보다 응력확대계수가 증가하고 있다. 또한, 함유체와 균열 사이의 거리가 증가할수록 응력확대계수가 감소하고 있다. 반면에 함유체가 기지보다 단단하면(hard), 균열만 존재할 때보다 응력확대계수가 감소하고 있으며, 또한, 함유체와 균열 사이의 거리가 증가할수록 응력확대계수가 증가하고 있다.

4.2 단일의 직교 이방성 함유체와 단일의 균열 문제 해석

Fig. 3에 있는 서로 인접한 단일의 직교 이방성 함유체와 단일의 균열을 포함하는 등방성 무한기지가 균일한 무한 분포하중을 받는 경우에, 균열 선단에서의 mode I 응력확대계수에 대한 해석을 평면 변형률(plane strain) 문제로 가정하여 수행하였다. Fig. 5에 있는 체적 적분방정식법 모델과 Fig. 7에 있는 혼합 체적-경계 적분방정식법 모델을 사용하여, 체적 적분방정식법 및 혼합 체적-경계 적분방정식법에 의한 수치해석 해를 구하였다.

수치해석에 사용된 기지와 함유체의 물질 특성은 Table 4에 나타나 있다. 직교 이방성 함유체의 c_{11} 이 등방성 기지의 c_{11} 보다 작은 경우(Ortho #1)와 큰 경우(Ortho #2)를 고려해 보았다. 또한, 함유체와 균열 사이의 거리(d)를 변화시켜 가면서, 응력확대계수에 미치는 영향을 조사하여 보았다.

체적 적분방정식법 및 혼합 체적-경계 적분방정식법에 의한 해석결과를 검증하기 위하여, 상업용 코드인 ANSYS⁽³⁵⁾를 이용하여 유한요소법 해석을 수행하였으며, $d/R = 0.1$, $(d+2a)/R = 1.1$ 그리고 Ortho #1 함유체에 대하여 균열선단 A, B에서의 표준화된 mode I 응력확대계수를 구하여 보았다. 여기서, 표준화된 응력확대계수는 균열선단(A, B)에서 얻어진 K_I 값을 $\sigma_x \sqrt{\pi a}$ 으로 나눈 값을 의미한다. 유한요소법 해석에는 2072개의 8-절점 사각형 및 6-절점 삼각형 요소가 사용되었으며, 대칭축을 중심으로 하여 한 쪽 부분만을 모델링 하였다. 유한요소법 모델의 폭과 길이는 각각 함유체와 균열 사이의 가장 먼 거리 $(2a+d+2R)$ 의 7배와 5배로 정하였다. 또한, 정확한 응력확대계수를 구하기 위하여 균열선단 주위에는 균열선단요소(crack tip element)들을 이용하였으며, 균열선단요소에 속하는 절점들의 균열개구 변위 값들을 사용하여 응력확대계수를 산정하였다.⁽³⁾

체적 적분방정식법에 의한 A, B 선단에서의 응력확대계수는 각각 1.333, 1.106이었고, 반면에 혼합 체적-경계 적분방정식법에 의한 A, B 선단에서의 응력확대계수는 각각 1.346, 1.134이었다. 한편, 이에 대응하는 ANSYS를 이용한 유한요소법

해석 결과는 각각 1.330과 1.113이었다. 체적 적분방정식법 및 혼합 체적-경계 적분방정식법에 의한 해석결과와 유한요소법에 의한 해석결과가 서로 잘 일치함을 알 수 있었다.

이방성 함유체와 균열을 포함하는 등방성 무한기지에서 균열에 대한 응력확대계수를 결정할 때 체적 적분방정식법 및 혼합 체적-경계 적분방정식법과 경계요소법을 적용한 해석을 비교해 보면, 경계요소법에서는 반드시 이방성 함유체에 대한 Green 함수가 정의되어야 하는 반면에, 체적 적분방정식법 및 혼합 체적-경계 적분방정식법에서는 이방성 함유체에 대한 Green 함수는 필요하지 않고 등방성 기지에 대한 Green 함수만이 해석에 필요하다는 장점이 있다.

또한, 체적 적분방정식법 및 혼합 체적-경계 적분방정식법을 이용한 수치해석에서는, 최근에 많은 연구가 이루어지고 있는 코팅을 포함한 함유체와 균열이 포함된 문제⁽²⁰⁻²²⁾를 해석할 때, 코팅이 포함된 함유체 내부를 표준의 유한요소를 사용하여 요소분할하므로, 코팅이 없는 함유체와 균열이 포함된 문제를 해석할 때와 마찬가지로 별다른 어려움이 없게 된다.

4.1절에서와 마찬가지로, 체적 적분방정식법에서는 균열 내부 전부를 표준의 유한요소를 사용하여 요소분할해야 하지만, 혼합 체적-경계 적분방정식법에서는 균열 면만을 표준의 경계요소를 사용하여 요소분할하므로, 분할요소의 수를 줄일 수 있다는 장점이 있다.

Table 5와 6은 직교 이방성 함유체의 물질 특성치 및 함유체와 균열 사이의 거리를 변화시켜 보았을 때, 균열선단(A,B)에서의 표준화된 mode I 응력확대계수에 대한 체적 적분방정식법 및 혼합 체적-경계 적분방정식법에 의한 해석결과를 각각

Table 4 Material properties of the isotropic matrix and the orthotropic inclusion

(Unit: GPa)	Isotropic Matrix	Inclusion	
		Ortho #1	Ortho #2
c_{11}	143.10	55.80	279.08
c_{12}	67.34	1.56	7.80
c_{22}	143.10	6.12	30.56
c_{66}	37.88	2.36	11.80

나타내고 있다. 직교 이방성 함유체의 c_{11} 이 등방성 기지의 c_{11} 보다 작은 경우는(Ortho #1), 균열만 존재할 때 보다 응력확대계수가 증가하고 있다. 또한, 함유체와 균열 사이의 거리가 증가할수록 응력확대계수가 감소하고 있다. 반면에 직교 이방성 함유체의 c_{11} 이 등방성 기지의 c_{11} 보다 큰 경우는(Ortho #2), 균열만 존재할 때 보다 응력확대계수가 감소하고 있으며, 또한, 함유체와 균열 사이의 거리가 증가할수록 응력확대계수가 증가하고 있다.

다음으로, 직교 이방성 함유체의 c_{22} 가 균열선단에서의 mode I 응력확대계수에 미치는 영향을 조사하기 위하여, 직교 이방성 함유체들의 c_{11} 을

Table 5 The normalized mode I stress intensity factor for a crack near an orthotropic cylindrical inclusion in an infinite isotropic medium subjected to remote stress [VIEM]

d/R	(d+2a)/R	K _I (A)		K _I (B)	
		Ortho #1	Ortho #2	Ortho #1	Ortho #2
0.1	1.1	1.333	0.751	1.106	0.920
0.2	1.2	1.223	0.816	1.084	0.928
0.5	1.5	1.099	0.907	1.048	0.950

Table 6 The normalized mode I stress intensity factor for a crack near an orthotropic cylindrical inclusion in an infinite isotropic medium subjected to remote stress [Mixed VBIEM]

d/R	(d+2a)/R	K _I (A)		K _I (B)	
		Ortho #1	Ortho #2	Ortho #1	Ortho #2
0.1	1.1	1.346	0.747	1.134	0.923
0.2	1.2	1.238	0.816	1.100	0.930
0.5	1.5	1.124	0.909	1.066	0.942

고정하고 c_{22} 가 등방성 기지의 c_{22} 보다 큰 경우 (직교 이방성 함유체의 c_{11} 이 등방성 함유체의 c_{11} 보다 작으나, 직교 이방성 함유체의 c_{22} 가 등방성 기지의 c_{22} 보다 큰 경우와 직교 이방성 함유체의 c_{11} 과 c_{22} 가 등방성 함유체의 c_{11} 과 c_{22} 보다 큰 경우)를 고려해 보았다. 앞서서와 마찬가지로, 함유체와 균열 사이의 거리(d)를 변화시켜 가면서, 응력확대계수를 구하여 보았다. 직교 이방성 함유체의 c_{22} 가 등방성 기지의 c_{22} 보다 커져도, 직교 이방성 함유체의 c_{11} 이 등방성 기지의 c_{11} 보다 작은 경우는, 함유체와 가까운 균열 선단에서의 응력확대계수가 균열만 존재할 때의 응력확대계수보다 증가하였으며, 직교 이방성 함유체의 c_{11} 이 등방성 기지의 c_{11} 보다 큰 경우는, 함유체와 가까운 균열 선단에서의 응력확대계수가 균열만 존재할 때의 응력확대계수보다 감소하였다. 지면 부족으로 인하여, 이와 관련된 자세한 내용은 생략하였으나, 직교 이방성 함유체를 포함한 무한고체에서의 응력해석 결과에서도 동일한 현상을 확인할 수 있었다.⁽³⁴⁾

그러므로, 직교 이방성 함유체의 경우에는 등방성 함유체의 경우와 달리 c_{11} 이 mode I 응력확대계수의 값을 결정하는 가장 중요한 물질 특성치임을 알 수 있다.⁽³³⁾ 따라서, 다양한 물질 특성치들을 갖는 함유체들로 이루어지는 복합재료에서의 파손 메커니즘을 정확히 예측하기 위해서는, 등방성 함유체 뿐만 아니라 이방성 함유체와 균열이 포함된 등방성 무한고체가 외부의 하중을 받을 때 균열선단에서의 응력확대계수에 대한 정확한 해석이 필수적으로 요구된다.

5. 결론

서로 인접한 단일의 등방성 함유체 또는 단일의 직교 이방성 함유체와 단일의 균열이 포함된 등방성 무한기지가 균일한 무한하중을 받을 때, 균열선단에서의 mode I 응력확대계수에 대한 해석을 체적 적분방정식법 및 혼합 체적-경계 적분방정식법이라는 새로운 수치해석 방법으로 수행하였으며, 얻어진 결과가 Erdogan과 Gupta의 해석해 또는 유한요소법에 의한 해와 비교해 보았을

때 정확함을 알 수 있었다.

간단한 예제를 통하여, 체적 적분방정식법 및 혼합 체적-경계 적분방정식법이 다수의 이방성 함유체 및 다수의 균열을 포함하는 등방성 무한 고체가 무한하중을 받을 때 균열선단에서의 응력 확대계수의 계산을 효과적으로 수행할 수 있는 수치해석 방법임을 알 수 있었다.

체적 적분방정식법과 혼합 체적-경계 적분방정식법을 이용한 해석을 비교해 보면, 체적 적분방정식법에서는 균열 내부 전부를 표준의 유한요소를 사용하여 요소분할해야 하지만, 혼합 체적-경계 적분방정식법에서는 균열 면만을 표준의 경계요소를 사용하여 요소분할하므로, 분할요소의 수를 줄일 수 있다는 장점이 있었다.

또한, 체적 적분방정식법 및 혼합 체적-경계 적분방정식법을 이용한 수치해석에서는, 최근에 많은 연구가 이루어지고 있는 코팅을 포함한 함유체와 균열이 포함된 문제를 해석할 때, 코팅이 포함된 함유체 내부를 표준의 유한요소를 사용하여 요소분할하므로, 코팅이 없는 함유체와 균열이 포함된 문제를 해석할 때와 마찬가지로 별다른 어려움이 없게 된다.

후 기

본 연구는 한국과학재단 목적기초연구(R05-2001-000-01118-0) 지원으로 수행되었으며, 이에 사의를 표합니다.

참고문헌

- (1) Lee, J. K. and Mal, A., 1998, "Characterization of Matrix Damage in Metal Matrix Composites under Transverse Loads," *Computational Mechanics*, Vol. 21, pp. 339~346.
- (2) Bush, M. B., 1997, "The Interaction between a Crack and a Particle Cluster," *International Journal of Fracture*, Vol. 88, pp. 215~232.
- (3) Lee, J. K. and Ra, W. S., 1999, "Numerical Analysis of a Crack in the Vicinity of an Inclusion," *Journal of the Computational Structural Engineering Institute of Korea*, Vol. 12, No. 3, pp. 465~474.
- (4) Erdogan, F. and Gupta, G. D., 1975, "The Inclusion Problem with a Crack Crossing the Boundary," *International Journal of Fracture*, Vol. 11, pp. 13~27.
- (5) Erdogan, F., Gupta, G. D. and Ratwani, M., 1974, "Interaction between a Circular Inclusion and an Arbitrarily Oriented Crack," *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 41, pp. 1007~1013.
- (6) Atkinson, C., 1972, "The Interaction between a Crack and an Inclusion," *International Journal of Engineering Science*, Vol. 10, pp. 127~136.
- (7) Li, R. and Chudnovsky, A., 1993, "Variation of the Energy Release Rate as a Crack Approaches and Passes through an Elastic Inclusion," *International Journal of Fracture*, Vol. 59, pp. R69~R74.
- (8) Li, R. and Chudnovsky, A., 1994, "The Stress Intensity Factor Green's Function for a Crack Interacting with a Circular Inclusion," *International Journal of Fracture*, Vol. 67, pp. 169~177.
- (9) Sung J. C. and Wong D. C., 1995, "Effect of an Inclusion on the Interaction of Elastic Waves with a Crack," *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 51, pp. 679~695.
- (10) Chen, D.-H. and Nakamichi, S., 1996, "Stress Intensity Factors for an Interface Crack along an Elliptical Inclusion," *International Journal of Fracture*, Vol. 82, pp. 131~152.
- (11) Chen D.-H., 1997, "The Effect of an Elliptical Inclusion on a Crack," *International Journal of Fracture*, Vol. 85, pp. 351~364.
- (12) Helsing J., 1999, "Stress Intensity Factors for a Crack in front of an Inclusion," *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 64, pp. 245~253.
- (13) Cheeseman B. A. and Santare M. H., 2000, "The Interaction of a Curved Crack with a Circular Elastic Inclusion," *International Journal of Fracture*, Vol. 103, pp. 259~277.
- (14) Pahn L. O. and Earmme Y. Y., 2000, "Analysis of a Short Interfacial Crack from the Corner of a Rectangular Inclusion," *International Journal of Fracture*, Vol. 106, pp. 341~356.
- (15) Wang Y. B. and Chau K. T., 2001, "A New Boundary Element Method for Mixed Boundary

- Value Problems Involving Cracks and Holes: Interactions between Rigid Inclusions and Cracks," *International Journal of Fracture*, Vol. 110, pp. 387~406.
- (16) Theotokoglou E. N. and Theotokoglou E. E., 2002, "The Interface Crack along a Circular Inclusion Interacting with a Crack in the Infinite Matrix," *International Journal of Fracture*, Vol. 116, pp. 1~23.
- (17) Hwu, C., Liang, Y. K. and Yen, W. J., 1995, "Interactions between Inclusions and Various Types of Cracks," *International Journal of Fracture*, Vol. 73, pp. 229~245.
- (18) Chang, J. H., 1995, "Evaluation of Energy Release Rate for a Planar Crack in Heterogeneous Media," *International Journal of Fracture*, Vol. 74, pp. 163~179.
- (19) Kassam, Z. H. A., Zhang, R. J. and Wang, Z., 1995, "Finite Element Simulation to Investigate Interaction between Crack and Particulate Reinforcements in Metal-Matrix Composites," *Materials Science and Engineering*, Vol. A203, pp. 286~299.
- (20) Cheeseman B. A. and Santare M. H., 2001, "The Effect of the Interphase on Crack-Inclusion Interactions," *International Journal of Fracture*, Vol. 109, pp. 303~323.
- (21) Xiao Z. M. and Chen B. J., 2001, "Stress Intensity Factor for a Griffith Crack Interacting with a Coated Inclusion," *International Journal of Fracture*, Vol. 108, pp. 193~205.
- (22) Knight M. G., Wrobel L. C., Henshall J. L. and De Lacerda L. A., 2002, "A Study of the Interaction between a Propagating Crack and an Uncoated/Coated Elastic Inclusion Using the BE Technique," *International Journal of Fracture*, Vol. 114, pp. 47~61.
- (23) Lim, W. K. and Choi, S. Y., 2002, "Analysis of Inclined Crack Extension in Orthotropic Solids Under Biaxial Loading," *Transactions of the KSME, A*, Vol. 26, No. 6, pp. 993~1000.
- (24) Lee, J. K. and Mal, A. K., 1995, "A Volume Integral Equation Technique for Multiple Scattering Problems in Elastodynamics," *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 67, pp. 135~159.
- (25) Lee, J. K. and Mal, A. K., 1997, "A Volume Integral Equation Technique for Multiple Inclusion and Crack Interaction Problems," *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 64, pp. 23~31.
- (26) Lee, J. K., 1997, "Elastic Wave Field Calculations," *Journal of the Computational Structural Engineering Institute of Korea*, Vol. 10, No. 2, pp. 213~223.
- (27) Lee, K. J. and Mal, A. K., 1990, "A Boundary Element Method for Plane Anisotropic Elastic Media," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 57, pp. 600~606.
- (28) Banerjee, P. K., 1993, *The Boundary Element Methods in Engineering*, McGraw-Hill, England.
- (29) Hwu, C. and Yen, W. J., 1993, "On the Anisotropic Elastic Inclusions in Plane Elastostatics," *Transactions of ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 60, pp. 626~632.
- (30) Yang, H. C. and Chou, Y. T., 1976, "Generalized Plane Problems of Elastic Inclusions in Anisotropic Solids¹," *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 43, pp. 424~430.
- (31) PATRAN User's Manual, 1998, Version 7.0, MSC/PATRAN.
- (32) Liu, Y. J. and Xu, N., 2000, "Modeling of Interface Cracks in Fiber-Reinforced Composites with the Presence of Interphases Using the Boundary Element Method," *Mechanics of Materials*, Vol. 32(12), pp. 769~783.
- (33) Choi, S. J., Ra, W. S. and Lee, J. K., 1999, "Elastic Analysis of Unbounded Solids with Anisotropic Inclusions," *Transactions of the KSME, A*, Vol. 23, No. 11, pp. 1993~2006.
- (34) Lee, J. K., Choi, S. J., and Mal, A., 2001, "Stress Analysis of an Unbounded Elastic Solid with Orthotropic Inclusions and Voids Using a New Integral Equation Technique," *International Journal of Solids And Structures*, Vol. 38(16), pp. 2789~2802.
- (35) ANSYS User's Manual, 1997, Version 5.4, SAS IP, Inc..