한국정밀공학회지 제 20 권 제 8 호 (2003 년 8 월)
Journal of the Korean Society of Precision Engineering Vol. 20, No. 8, August 2003.

경계요소법을 이용한 2 차원 복수 영역 열전도 고체의 형상 설계 민감도 해석

이부윤#, 임문혁*

Shape Design Sensitivity Analysis of Two-Dimensional Thermal Conducting Solids with Multiple Domains Using the Boundary Element Method

Boo Youn Lee#, Moon Hyuk Im*

ABSTRACT

A method of the shape design sensitivity analysis based on the boundary integral equation formulation is presented for two-dimensional inhomogeneous thermal conducting solids with multiple domains. Shape variation of the external and interface boundary is considered. A sensitivity formula of a general performance functional is derived by taking the material derivative to the boundary integral identity and by introducing an adjoint system. In numerical analysis, state variables of the primal and adjoint systems are solved by the boundary element method using quadratic elements. Two numerical examples of a compound cylinder and a thermal diffuser are taken to show implementation of the shape design sensitivity analysis. Accuracy of the present method is verified by comparing analyzed sensitivities with those by the finite difference. As application to the shape optimization, an optimal shape of the thermal diffuser is found by incorporating the sensitivity analysis algorithm in an optimization program.

Key Words : Shape design sensitivity analysis (형상설계민감도해석), Boundary integral equation (경계적분방정식), Boundary element method (경계요소법), Thermal conduction (열전도), Inhomogeneous (비균질), Multiple domain (복수영역)

1. 서론

형상최적화 문제는 주어진 제한조건하에서 목적함수를 최소화하는 연속체의 형상을 결정하고자 하는 문제이다. 형상최적화 알고리즘을 수치적으로 실행할 때 상태변수나 성능 범함수(performance functional)의 설계변수에 관한 민감도를 예측하기 위해 형상설계민감도해석이 요구되는데, 이 형상에 관한 민감도의 정확한 예측은 매우 중요하다. 그 이유는 부정확하게 예측된 민감도는 최적화에 소요되는 반복과정(iteration)의 수를 증가시켜 계산시간을 길어지게 하며 심지어는 정확한 최적해를 구할 수 없게 만들 수도 있다. 이러한 이유로 형상설계민감도해석 분야는 형상최적화 연구자들이 집중적으로 연구하는 주제 중의 하나이다.

근래에 형상설계민감도해석 분야에서 경계요

접수일: 2003 년 2 월 3 일; 게재승인일: 2003 년 7 월 114 일
교신저자: 계명대학교 기계자동차공학부
Email: bylee@kmu.ac.kr, Tel: (053) 580-5922
* 계명대학교 기계자동차공학부

소법 혹은 경계적분방정식이 특히 상당한 주목을 받아 왔다. 경계요소법에 기초한 형상설계민감도 해석의 문헌 연구를 위해서 Burczynski[1], Lee[2], Choi *et al.*[3] 을 참조할 수 있는데, 그 방법들은 준해석적 접근법과 해석적 접근법으로 구분할 수 있다. 준해석적 접근법에서는 먼저 상태방정식을 경계요소로 이산화(discretization)하고 다음에 시스템 행렬의 설계변수에 관한 미분을 해석적으로 유도하는데 반하여, 해석적 접근법에서는 먼저 상태방정식에 대하여 전미분(material derivative)[4] 을 취하여 연속체 관점에서 민감도 공식을 해석적으로 유도한 후에 단지 수치적 계산을 위해 이산화를 행한다.

이 중에서 해석적 접근법은 다시 보조변수법(adjoint variable method)과 직접미분법(direct differentiation method)으로 분류할 수 있다. 보조변수법에서는 성능 범함수에 따라 결정되는 보조시스템(adjoint system)을 도입하여 형상민감도 공식을 유도하는데 반하여, 직접미분법에서는 형상민감도가 상태변수인 새로운 경계적분방정식을 유도하여 이 식의 해를 구하여 형상민감도를 직접 계산한다.

한편, 형상설계민감도해석에 관한 많은 연구가 탄성 문제를 다루는데 반하여 열 환경에 있는 고체에 관한 연구는 그다지 많지 않다. 열전도 고체를 다루는 문헌의 대다수는 해석적 접근법에 속한다. Meric[5~7] 은 라그랑제 승수(Lagrange multiplier) 기법, 전미분 개념, 보조변수법을 사용하여 열전도와 열탄성 문제의 형상민감도 공식을 유도하였다. Park & Yoo[8] 은 변분 정식화 방법[4] 을 열전도 문제에 적용하여 민감도 공식을 유도하고 변분 방정식을 등가의 경계적분방정식으로 변환하여 해를 구하였다. Lee & Kwak[9,10] 은 열탄성 문제에 대하여, Lee *et al.*[11,12], Lee[13] 는 열전도 문제에 대하여 각각 경계적분방정식 정식화 방법에 기초하여 보조변수법 혹은 직접미분법을 사용하여 민감도 공식을 유도하였다. Aithal & Saigal[14] 은 열전도 문제에 대하여 디락 델타(Dirac delta) 형식의 성능 범함수의 민감도해석을 보조변수법을 사용하여 유도하였다. Sluzalec & Kleiber[15] 은 온도에 따라 열전도도(thermal conductivity)가 변화하는 비선형 열전도 문제의 형상민감도를 보조변수법을 사용하여 유도하였다. 한편, Kane & Wang[16,17] 은 준해석적 접근법을 사용하여 비선형 경계조건하에서 온도에 따라 열전도도가 변화하는 비선형 열전도 문제의 형상 민감도를 제시하였다.

이상에서 기술된 경계요소법에 기초한 열전도 고체의 형상설계민감도해석을 다룬 이전의 모든 연구는 균질(homogeneous) 문제에 관한 것인데 반하여, 본 연구에서는 두 가지 이상의 다른 소재로 분할된 경계를 갖는 복수 영역으로 정의되는 비균질 열전도 문제의 형상설계민감도해석을 제시하고자 한다. 서로 다른 열전도도를 갖는 소재들로 구성된 냉각핀, 성형다이, 복합튜브 등을 이러한 문제의 예로 들 수 있다. 최근에 Choi *et al.*[3] 은 비균질 복수 영역 문제의 형상설계민감도해석을 제시하여 치과용 임플랜트(implant) 설계 문제에 적용하였는데, 이 방법은 경계적분방정식의 정식화에 기초하며 탄성 문제에 국한된다. 현재까지 문헌에 발표된 2 차원 복수 영역 열전도 고체의 형상설계민감도해석에 관한 연구는 Dems & Mroz[18] 가 유일한데, 그들은 유한요소법에 기초한 변분 정식화 방법을 사용하여 민감도 공식을 유도하였다. 본 연구에서 제시하는 방법은 경계적분방정식 정식화에 기초하여 민감도 공식을 유도하며 상태변수의 해를 구하기 위해 자연스럽게 경계요소법을 사용한다는 점에서 근본적으로 Dems & Mroz[18] 의 방법과 차별성을 갖는다. 본 연구에서는 형상설계민감도해석을 위하여 전미분 개념을 사용하여 외부와 내부 경계의 형상 변화를 나타내고 경계적분방정식으로부터 유도된 경계적분항등식(boundary integral identity)[11,12] 과 보조변수법을 이용하여 민감도 공식을 유도하였다.

수치적 예제로서 복합원통(compound cylinder)과 열확산기(thermal diffuser) 문제에 대하여 형상민감도를 해석하여 정확성을 검증하였다. 최적화에의 응용을 보이기 위하여, 제시한 형상민감도 공식을 비선형 최적화 알고리즘과 연계시켰으며 열확산기 문제에 대한 수치적 형상최적화를 수행하여 최적 형상을 구하였다.

2. 형상설계민감도해석 방법

본 연구에서 다루고자 하는 문제는 Fig. 1 과 같이 서로 다른 소재의 영역 $\Omega^{(1)}, \Omega^{(2)}$ 사이의 경계 Γ_I 를 갖는 복수 영역 Ω 로 정의되는 등방성(isotropic) 비균질 고체의 2 차원 열전도 문제이다. 모든 수식과 기호 표현에서 상첨자 (i)는 소재의 종류를 나타내는 영역 번호를 가리킨다. Ω 의 외부 경계는 $\Gamma = \Gamma_E^{(1)} \cup \Gamma_E^{(2)}$ 로 나타내며, $\Gamma_E^{(1)}$ 와

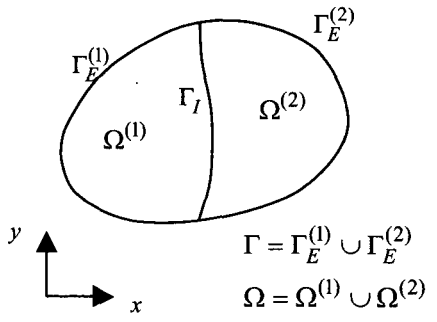


Fig. 1 A two-dimensional thermal conducting solid body of zoned-interface

$\Gamma_E^{(2)}$ 는 각 영역의 외부 경계를 나타낸다. 영역 Ω 의 임의 위치의 온도를 T 라 하면 열속(Heat flux) 벡터는 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$q_i = -kT_{,i} \tag{1}$$

여기서 k 는 소재의 열전도도를 나타낸다. 텐서 표기의 지수는 1 혹은 2 를 나타낸다. 열원이 없는 경우에 정상상태의 열전도 평형방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$-q_{i,i} = 0 \quad \text{in } \Omega \tag{2}$$

외부 경계는 주어진 경계조건의 형태에 따라서 $\Gamma = \Gamma_T \cup \Gamma_q \cup \Gamma_h$ 로 나타내며 다음과 같은 일반적인 형태의 온도, 열속, 대류경계조건을 적용한다.

$$\begin{aligned} &T = T_0 \quad \text{at } \Gamma_T \\ &q \equiv q_i n_i = q_0 \quad \text{at } \Gamma_q \\ &q \equiv q_i n_i = h(T - T_\infty) \quad \text{at } \Gamma_h \end{aligned} \tag{3}$$

여기서 q 는 경계에 수직한 방향의 열속을, n_i 는 경계에서 바깥 방향의 단위수직벡터를 나타낸다. 경계조건으로서 경계 Γ_T 와 Γ_q 에는 각각 온도 T_0 와 열속 q_0 가 주어지며, 경계 Γ_h 에는 열전달계수 h 와 주위 온도 T_∞ 의 대류경계조건이 주어진다. 영역간의 경계 Γ_I 에는 다음과 같이 온도와 열속의 연속성이 부과된다.

$$\begin{aligned} &T^{(1)} = T^{(2)} = T^c \\ &q^{(1)} = -q^{(2)} = q^c \end{aligned} \quad \text{at } \Gamma_I \tag{4}$$

여기서 T^c 와 q^c 는 Γ_I 에서의 온도와 열속을 나타낸다. 온도와 열속이 T^* 와 q^* 인 임의의 시스템을 도입하고 경계적분방정식 정식화 방법 [11,12] 을 복수 영역을 갖는 비균질 열전도 문제에 적용하면 다음과 같은 경계적분항등식을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma_E^{(1)} \cup \Gamma_I} \left(T^{(1)} q^{(1)*} - q^{(1)} T^{(1)*} \right) ds = 0 \\ &\int_{\Gamma_E^{(2)} \cup \Gamma_I} \left(T^{(2)} q^{(2)*} - q^{(2)} T^{(2)*} \right) ds = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

여기서 ds 는 경계를 따른 적분을 나타낸다. 식 (5)의 경계적분항등식은 온도와 열속이 $T^{(i)}$ 와 $q^{(i)}$ 인 하나의 평형상태와 온도와 열속이 $T^{(i)*}$ 와 $q^{(i)*}$ 인 다른 평형상태 사이에 성립되는 Green 의 제 2 항등식과 일치한다.

열전도 고체의 형상최적화 문제는 대부분이 외부 경계에서의 T , q 와 관련되어 있으므로 성능 범함수는 다음과 같이 외부 경계 Γ 에 정의된 일반적인 형태의 경계적분으로 정의하기로 한다.

$$\Phi = \int_\Gamma \psi(T, q) ds \tag{6}$$

형상최적화 문제에서 형상의 변화는 외부 경계 Γ 와 영역간의 경계 Γ_I 가 변화하는 것으로 나타내며, 전미분 개념 [4] 을 사용하면 Fig. 2 에 표시된 것처럼 형상 변화를 설계속도벡터 $\mathbf{V}$ 와 시간 매개변수 τ 에 의한 변환을 이용하여 정의할 수 있다. 식 (6)에 대하여 전미분을 취하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \delta\Phi &= \int_\Gamma \left(\psi_T \dot{T} + \psi_q \dot{q} \right) ds + \int_\Gamma \psi V_{j,s} s_j ds \\ &= \int_{\Gamma_T} \psi_q \dot{q} ds + \int_{\Gamma_q} \psi_T \dot{T} ds \\ &\quad + \int_{\Gamma_h} \left(\psi_T + h\psi_q \right) \dot{T} ds + \int_\Gamma \psi V_{j,s} s_j ds \end{aligned} \tag{7}$$

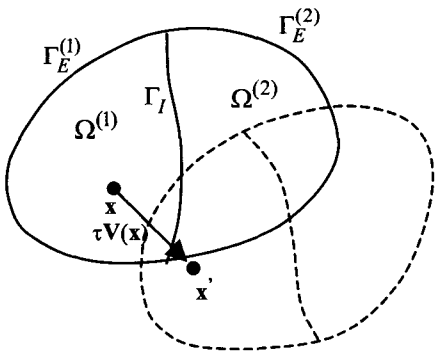


Fig. 2 Shape variation

여기서 ψ_T 와 ψ_q 는 각각 온도와 열속에 관한 편미분을, $\dot{T}$ 와 $\dot{q}$ 는 각각 온도와 열속의 전미분을, V_j 는 설계속도벡터를, s_j 는 경계 접선 방향의 단위벡터를 나타내며, 하첨자 $(,s)$는 경계에서 접선방향의 미분을 의미한다. 한편, 경계적분항등식 (5)의 두 식에 대하여 전미분을 취하고 두 결과식을 더하여 정리하면 다음과 같은 표현식을 얻을 수 있다.

$$\int_\Gamma \left(\dot{q}T^* - \dot{T}q^*\right)ds + \int_{\Gamma_I} \begin{Bmatrix} \dot{q}^c\left(T^{(1)*} - T^{(2)*}\right) \\ -\dot{T}^c\left(q^{(1)*} + q^{(2)*}\right) \end{Bmatrix} ds$$
$$= \int_\Gamma \begin{Bmatrix} -\left(qs_j + kT_{,s}n_j\right)V_j T_{,s}^* \\ +\left(qn_j/k - T_{,s}s_j\right)V_j q^* \\ -qT^* V_{j,s}s_j \end{Bmatrix} ds + \int_{\Gamma_I} R(\mathbf{V})ds \quad (8)$$

여기서

$$R(\mathbf{V}) = q^c \begin{Bmatrix} -s_j V_j\left(T_{,s}^{(1)*} + T_{,s}^{(2)*}\right) \\ -V_{j,s}s_j\left(T^{(1)*} - T^{(2)*}\right) \\ +n_j V_j\left(q^{(1)*}/k^{(1)} + q^{(2)*}/k^{(2)}\right) \end{Bmatrix} \quad (9)$$
$$-T_{,s}^c \begin{Bmatrix} n_j V_j\left(k^{(1)}T_{,s}^{(1)*} + k^{(2)}T_{,s}^{(2)*}\right) \\ +s_j V_j\left(q^{(1)*} + q^{(2)*}\right) \end{Bmatrix}$$

이다. 식 (8)에서 Γ_I 를 따른 적분은 영역 1 의 경계를 따른 적분을 의미하며 적분함수 $R(\mathbf{V})$ 에 나타나는 단위벡터 s_j, n_j 의 방향은 영역 1 에 관한 것이고, $k^{(1)}$, $k^{(2)}$ 는 각 영역의 소재의 열전도도를 나타낸다. 이제, 식 (8)을 식 (7)에 대입하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\delta\Phi = \int_{\Gamma_T}\left(\psi_q - T^*\right)\dot{q}\,dsds$$
$$+ \int_{\Gamma_q}\left(\psi_T + q^*\right)\dot{T}ds$$
$$+ \int_{\Gamma_h}\left\{\psi_T + h\left(\psi_q - T^*\right) + q^*\right\}\dot{T}\,ds$$
$$- \int_{\Gamma_I} \begin{Bmatrix} \dot{q}^c\left(T^{(1)*} - T^{(2)*}\right) \\ -\dot{T}^c\left(q^{(1)*} + q^{(2)*}\right) \end{Bmatrix} ds \quad (10)$$
$$+ \int_\Gamma \begin{Bmatrix} -\left(qs_j + kT_{,s}n_j\right)V_j T_{,s}^* \\ +\left(qn_j/k - T_{,s}s_j\right)V_j q^* \\ -qT^* V_{j,s}s_j \end{Bmatrix} ds$$
$$+ \int_\Gamma \psi V_{j,s}s_j ds + \int_{\Gamma_I} R(\mathbf{V})ds$$

식 (10)에 나타나는 상태변수의 전미분 항 $\dot{T}$ 와 $\dot{q}$ 를 소거하기 위하여 다음과 같은 경계조건과 연속조건을 갖는 보조시스템을 정의한다.

$$T^* = \psi_q \quad \text{at } \Gamma_T$$
$$q^* = -\psi_T \quad \text{at } \Gamma_q \quad (11)$$
$$q^* = h\left\{T^* - (\psi_q + \psi_T/h)\right\} \quad \text{at } \Gamma_h$$

$$T^{(1)*} = T^{(2)*} = T^{c*}$$
$$q^{(1)*} = -q^{(2)*} = q^{c*} \quad \text{at}\Gamma_I \quad (12)$$

식 (11), (12)를 식 (10)에 대입하면 민감도 공식은 최종적으로 식 (13)과 같이 표현된다. 식 (13)의 공식은 복수 영역을 갖는 2 차원 비균질 열전도 고체의 외부 경계 Γ 와 영역간 경계 Γ_I 의 형상변화에 관한 일반적인 성능 범함수 식 (6)의 민감도 공식이다. 이 식은 경계적분방정식 정식화에 근거하여 해석적인 방법으로 유도되었으므로 자연

스럽게 경계요소법을 사용하여 경계조건과 연속조건 식 (3), (4)에 의해 정의되는 주시스템과 식 (11), (12)에 의해 정의되는 보조시스템의 해를 구할 수 있으며, 형상 변화를 설계속도벡터 **V** 로 변환하고 수치적분을 통하여 민감도를 해석할 수 있다.

$$\delta\Phi = \int_\Gamma \begin{Bmatrix} -\left(qs_j + kT_{,s}n_j\right)V_j T^*_{,s} \\ +\left(qn_j/k - T_{,s}s_j\right)V_j q^* \\ -qT^*V_{j,s}s_j \end{Bmatrix} ds + \int_\Gamma \psi V_{j,s}s_j ds + \int_{\Gamma_I} \begin{bmatrix} \begin{Bmatrix} q^c q^{c*}\left(\frac{1}{k^{(1)}} - \frac{1}{k^{(2)}}\right) \\ -T^c_{,s}T^{c*}_{,s}\left(k^{(1)} + k^{(2)}\right) \end{Bmatrix} n_j V_j \\ -2q^c T^{c*}_{,s} s_j V_j \end{bmatrix} ds \tag{13}$$

다음은 성능 범함수 중에서 하나의 구체적인 경우로서 다음과 같이 적분함수가 적분 구간 Γ_k 에서의 평균치를 나타내는 성능 범함수인 Φ_k 의 민감도 공식을 제시하고자 한다.

$$\Phi_k = \frac{\int_{\Gamma_k} \xi(T,q)ds}{L_k} \tag{14}$$

여기서 L_k 는 다음과 같이 성능 범함수의 적분 구간 Γ_k 의 길이를 나타낸다.

$$L_k = \int_{\Gamma_k} ds \tag{15}$$

Φ_k 를 전미분하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\delta\Phi_k = \int_{\Gamma_k} \left(\frac{\xi_T}{L_k}\dot{T} + \frac{\xi_q}{L_k}\dot{q}\right) ds + \int_{\Gamma_k} \frac{\xi}{L_k} V_{j,s}s_j ds - \Phi_k \frac{\delta L_k}{L_k} \tag{16}$$

여기서 δL_k 는 형상 변화에 의한 Γ_k 의 길이의 변화량이다. 앞에서 기술한 민감도해석 과정을 동일하게 적용하고, 보조시스템의 경계조건 식 (11)에서

$$\psi_T = \frac{\xi_T}{L_k}, \quad \psi_q = \frac{\xi_q}{L_k} \tag{17}$$

로 정의하면 Φ_k 의 민감도 공식은 최종적으로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\delta\Phi_k = \int_\Gamma \begin{Bmatrix} -\left(qs_j + kT_{,s}n_j\right)V_j T^*_{,s} \\ +\left(qn_j/k - T_{,s}s_j\right)V_j q^* \\ -qT^*V_{j,s}s_j \end{Bmatrix} ds + \int_{\Gamma_I} \begin{bmatrix} \begin{Bmatrix} q^c q^{c*}\left(\frac{1}{k^{(1)}} - \frac{1}{k^{(2)}}\right) \\ -T^c_{,s}T^{c*}_{,s}\left(k^{(1)} + k^{(2)}\right) \end{Bmatrix} n_j V_j \\ -2q^c T^{c*}_{,s} s_j V_j \end{bmatrix} ds + \int_{\Gamma_k} \frac{\xi}{L_k} V_{j,s}s_j ds - \Phi_k \frac{\delta L_k}{L_k} \tag{18}$$

식 (18)의 공식은 형상최적화 문제에서 성능 범함수를 경계의 일부 구간에서의 평균 온도와 평균 열속 등의 평균값으로 정의하고자 할 경우에 효율적으로 사용할 수 있으며, 이후의 수치 예제에서 이러한 경우를 다루고자 한다.

3. 수치 예제

본 절에서는 앞에서 제시한 민감도 공식을 사용하여 복합원통과 열확산기 예제에 대하여 수치적으로 형상설계민감도해석을 수행하여 유한차분 방법에 의한 민감도와 비교함으로써 본 연구에서 제시한 방법의 정확성을 검증하였다. 또한 형상최적화에의 응용을 보이기 위하여, 제시한 형상민감도 공식을 비선형 최적화 알고리즘과 연계시켰으며 열확산기 문제에 대한 수치적 형상최적화를 수행하여 최적 형상을 구하였다.

유한차분에 의한 민감도 계산을 위한 설계변수의 증분은 설계변수 초기값의 0.1%를 사용하였다. 주시스템과 보조시스템의 해석을 위하여 2 차원 복수 영역의 비균질 열전도 문제 해석을 위한 경계요소해석 프로그램을 개발하였으며, 경계요소의 종류로는 3 절점 2 차(quadratic) 요소를 사용하였다.

3.1 복합원통문제

Fig. 3 과 같은 열전도도가 각각 k_1, k_2, k_3 인 3 겹의 소재로 이루어진 복합원통 문제를 고려하였다. 경계조건으로 복합원통의 내면과 외면에는 열전달계수와 주위 온도가 각각 $h_1, T_{\infty 1}$ 과 $h_2, T_{\infty 2}$ 인 대류경계조건이 주어진다. 원통의 길이가 단면의 크기에 비해서 충분히 길면 2 차원 열전도 문제로 가정할 수 있다. 해석을 위하여 a=0.5, b=0.6, c=0.7, d=0.8m, h_1 =100, h_2 =20W/m^2°C, $T_{\infty 1}$ =100, $T_{\infty 2}$ =20°C, k_1 =50, k_2 =30, k_3 =20W/m°C 의 수치를 사용하였다.

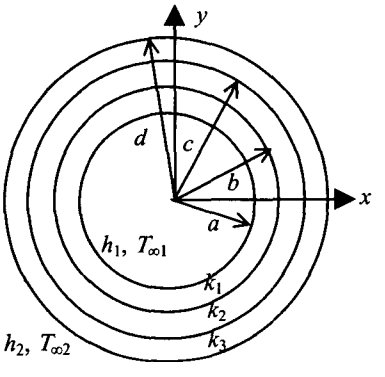


Fig. 3 A compound cylinder problem

경계요소해석을 위하여 Fig. 4 에 나타낸 바와 같이 대칭성을 감안하여 30° 구간의 부채꼴 영역을 고려하였으며, 총 70 개의 2 차 경계요소로 분할하였다. 경계요소 모델의 그림에서 검은 점들은 2 차 경계요소의 양끝 절점들을 나타낸다. 형상에 관한 설계변수로는 Γ_9 의 반경방향 좌표인 b 를 선정하였다. 다음과 같이 온도와 열속의 평균값을 성능 범함수로 정의하였다.

$$\Phi_T = \int_{\Gamma_k} Tds \Big/ L_k, \quad \Gamma_k \in \Gamma_2$$
$$\Phi_q = \int_{\Gamma_k} qds \Big/ L_k, \quad \Gamma_k \in \Gamma_4 \tag{19}$$

식 (19)에서 성능 범함수의 정의 구간인 Γ_k 는 온도 범함수에서는 Fig. 4 에 표시된 경계 Γ_2 의 요소번호 6~10 의 구간과 일치하며, 열속 범함수에서는 경계 Γ_4 의 요소번호 16~25 의 구간과 일치하도록 정의하였다. 온도 범함수와 열속 범함수에 대하여 해석된 민감도를 Table 1 에 수록하여 유한차분에 의한 결과와 비교하였다. Table 1 에서 볼 수 있듯이 제시된 방법에 의해 해석된 민감도는 정확하며 유한차분에 의한 민감도와 최대 0.28%의 작은 오차를 나타냄을 알 수 있다.

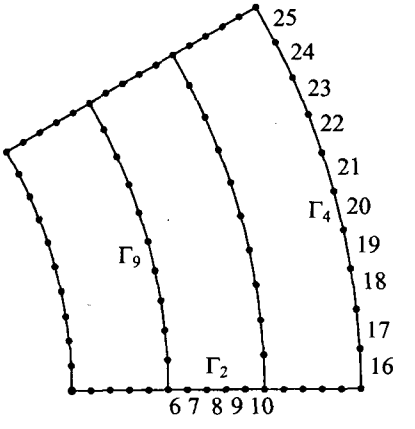


Fig. 4 Boundary element model of the compound cylinder problem

Table 1 Sensitivity of the compound cylinder problem

	Elem. no.	Functional values	Finite difference	Sensitivity prediction	Ratio (%)
Φ_T	6	0.8024D+02	-0.1591D-01	-0.159023D-01	99.94
	7	0.7936D+02	-0.1008D-01	-0.100840D-01	100.01
	8	0.7851D+02	-0.4615D-02	-0.461420D-02	99.97
	9	0.7769D+02	0.5228D-03	0.524311D-03	100.28
	10	0.7689D+02	0.5362D-02	0.536364D-02	100.04
Φ_q	16	0.1021D+04	0.1389D+00	0.138952D+00	100.04
	17	0.1021D+04	0.1389D+00	0.138929D+00	100.03
	18	0.1021D+04	0.1389D+00	0.138937D+00	100.03
	19	0.1021D+04	0.1389D+00	0.138938D+00	100.03
	20	0.1021D+04	0.1389D+00	0.138939D+00	100.03
	21	0.1021D+04	0.1389D+00	0.138939D+00	100.03
	22	0.1021D+04	0.1389D+00	0.138938D+00	100.03
	23	0.1021D+04	0.1389D+00	0.138937D+00	100.03
	24	0.1021D+04	0.1389D+00	0.138929D+00	100.03
	25	0.1021D+04	0.1389D+00	0.138952D+00	100.04

3.2 열확산기 문제

여기서는 Fig. 5 와 같이 열전도도가 k_1 =50, k_2 =100W/m°C 인 두 가지 소재의 영역으로 구성

된 열확산기의 형상최적화 문제를 예제로 고려하였다.

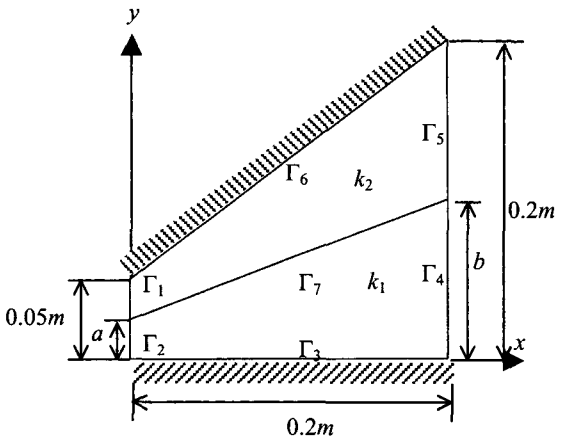


Fig. 5 A thermal diffuser problem

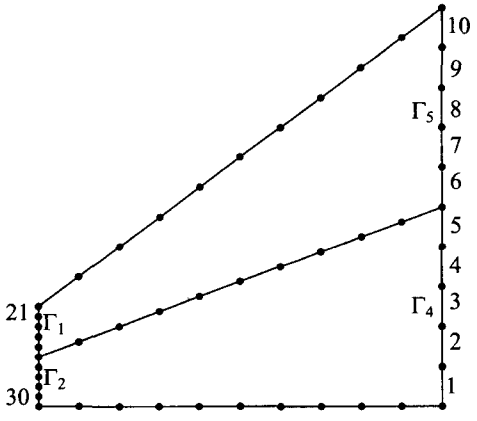


Fig. 6 Boundary element model of the thermal diffuser problem

열확산기의 열원 표면인 Γ_1 과 Γ_2 에서는 q_0 =100kW/m^2 의 균일한 열속이 유입되며, 열 방출면인 Γ_4 와 Γ_5 는 열전달계수와 주위 온도가 h =500W/m^2°C T_∞ =20°C 인 대류경계조건이 주어진다. 측면 Γ_6 은 단열되어 있고 Γ_3 은 상하 대칭면이다. 형상변화에 관한 설계변수는 영역간 경계인 Γ_7 의 양 끝점의 y 축 방향 좌표인 a 와 b 로 선정하고, 설계경계 Γ_7 의 형상은 양 끝점을 직선으로 연결하여 정의하였다. 경계요소해석을 위하여 Fig. 6 에 나타낸 바와 같이 총 50 개의 2 차 경계요소로 분할하였다

식 (19)에 정의된 것과 같은 형태의 평균 온도 및 열속 범함수에 관한 민감도를 해석하였다. 단, 열확산기 문제에서는 범함수의 정의 구간인 Γ_k 는 온도 범함수에서는 열 유입면인 경계 Γ_1 과 Γ_2 의 요소번호 21~30 의 구간과 일치하며, 열속 범함수에서는 열 방출면인 Γ_4 와 Γ_5 의 요소번호 1~10 의 구간과 일치하도록 정하였다. 설계변수의 값이 a=0.025, b=0.1m 인 경우에 온도 범함수와 열속 범함수에 대하여 해석된 민감도를 Table 2 에 수록하여 유한차분에 의한 결과와 비교하였다.

Table 2 Sensitivity of the thermal diffuser problem

	Elem. no.	Functional values	Finite difference	Sensitivity prediction	Ratio (%)
Φ_T	21	0.2036D+03	0.4138D-01	0.415196D-01	100.34
	22	0.2070D+03	0.3959D-01	0.394159D-01	99.56
	23	0.2103D+03	0.3847D-01	0.381349D-01	99.12
	24	0.2138D+03	0.3771D-01	0.370363D-01	98.22
	25	0.2180D+03	0.3678D-01	0.375701D-01	102.15
	26	0.2246D+03	0.3991D-01	0.404999D-01	101.48
	27	0.2297D+03	0.4520D-01	0.451647D-01	99.92
	28	0.2329D+03	0.4842D-01	0.483904D-01	99.93
	29	0.2347D+03	0.5040D-01	0.503190D-01	99.85
	30	0.2356D+03	0.5133D-01	0.515247D-01	100.39
Φ_q	1	0.2570D+05	0.2423D+01	0.242708D+01	100.17
	2	0.2561D+05	0.1842D+01	0.184800D+01	100.34
	3	0.2547D+05	0.7480D+00	0.757597D+00	101.28
	4	0.2541D+05	-0.7101D+00	-0.686964D+00	96.74
	5	0.2580D+05	-0.2189D+01	-0.231986D+01	105.97
	6	0.2651D+05	-0.3006D+01	-0.298101D+01	99.15
	7	0.2582D+05	-0.2817D+01	-0.279569D+01	99.24
	8	0.2466D+05	-0.1984D+01	-0.196957D+01	99.28
	9	0.2328D+05	-0.8125D+00	-0.801041D+00	98.59
	10	0.2177D+05	0.5514D+00	0.564108D+00	102.31

Table 2 에서 볼 수 있듯이 제시된 방법에 의해 해석된 민감도는 전체적으로 정확성이 높으며, 유한차분에 의한 민감도와 비교하여 최대 오차가 온도 범함수의 경우는 25 번 요소에서 2.15%, 열속 범함수의 경우는 5 번 요소에서 5.97%로서 두 영역이 만나는 기하학적 코너(corner)와 인접한 요소에서 최대 오차가 발생함을 알 수 있다. 이러한 오

차는 본 연구에서 제시된 민감도 공식이 갖는 오차가 아니다. 일반적으로 복수 영역을 다루는 경계요소법에서 영역간 코너의 경계에 존재하는 복수의 열속을 처리하기 위하여 보조식이 요구된다. 본 연구에서는 보조식으로 코너 절점 및 두 개의 인접 절점으로 정의되는 삼각형 영역 내에서의 온도장에 관한 선형보간법 [19] 을 사용하였으며, 이로 인하여 이 삼각형 영역에서는 열속이 일정한 것으로 근사화된다. 코너 근처에서의 민감도 오차는 이와 같은 경계요소해석의 오차로부터 발생하는 것이며, 향후에 이의 개선이 필요한 것으로 판단된다. 그럼에도 불구하고 Table 2 의 민감도 해석 결과를 전체적으로 보면, 경계요소해석 프로그램이 충분히 정확하면 본 연구에서 제시한 민감도해석 방법이 복수 영역 문제의 형상최적화를 위한 유용한 도구로 사용될 수 있다는 것을 알 수 있다.

형상최적화 문제는 다음 식과 같이 열 방출면에서의 열속의 최대값과 최소값의 차를 최소화하는 영역간 경계의 형상을 결정하도록 정하였다.

$$\text{Find } \{a,b\}$$

$$\text{minimizing } \Phi = \frac{\Phi_{q_{\max}} - \Phi_{q_{\min}}}{q_0} \tag{20}$$

$$\text{where } \Phi_q = \frac{\int_{\Gamma_k} q ds}{L_k}, \quad \Gamma_k \in \Gamma_4 \cup \Gamma_5$$

설계변수인 a 와 b 에 대하여 다음과 같은 상하한값을 설정하였다.

$$\begin{aligned} 0.01 \le a \le 0.04 \\ 0.01 \le b \le 0.19 \end{aligned} \tag{21}$$

최적화 알고리즘은 Arora[20] 의 방법을 사용하였는데, 이 알고리즘의 주요 특징은 최적화를 위한 반복과정 중에 이동거리를 계산하기 위한 일차원 검색을 하지 않으므로 한 반복과정에서는 각종 함수를 한번만 계산하면 된다. 또한 목적함수의 새로운 상한치와 하한치를 계속 찾아 나가는 방식을 사용하는데, 일단 상한치와 하한치를 설정한 후 목적함수치를 줄이기 위한 이차계획법(Quadratic Programming, QP) 부문제의 해석, 제한조건 위배의 보정을 위한 QP 부문제의 해석, 일정한 목적함수치를 유지하면서 제한조건을 보정하기 위한 QP 부문제의 해석 등의 체계적 방법을 사용하여 더 좋은 상한치와 하한치를 찾아나가게 되며 최적해를 발견할 때까지 반복과정을 수행하게 된다.

설계변수의 초기값은 a=0.0250, b=0.1000 로 설정하고 수치적 최적화를 실행한 결과 54 회의 반복과정을 거쳐 최적해로 수렴하였다. 설계변수의 최적값은 a=0.0150, b=0.1163 이다. 목적함수의 초기값은 0.04738 이고 최적해에서의 목적함수값은 0.04178 이다. Fig. 7 에 초기형상과 최적형상을 함께 나타내었으며, Fig. 8 은 초기형상과 최적형상에서의 온도 분포를 나타낸다. 초기설계와 최적설계에서 열 방출면에서의 열속의 분포를 Fig. 9 에 나타내었는데, 설계경계의 형상 변화에 따라 열속의 최대값과 최소값의 차가 초기설계보다 최적설계에서 줄어든 것을 확인할 수 있다.

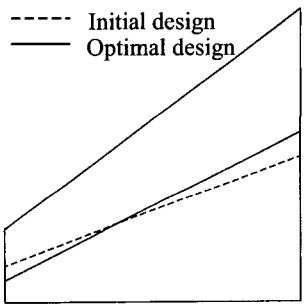


Fig. 7 Initial and optimal shapes of the thermal diffuser

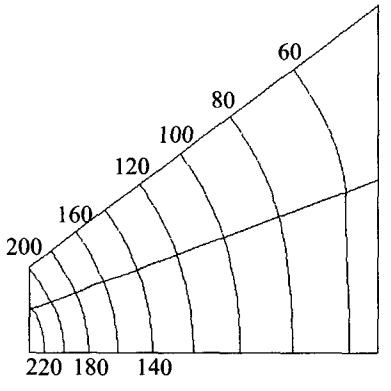
4. 결론

본 연구에서는 두 가지 이상의 다른 소재로 분할된 경계를 갖는 복수 영역의 비균질 열전도 문제의 형상설계민감도해석 방법을 경계적분방정식 정식화에 기초하여 제시하였다. 전미분 개념을 사용하여 외부와 내부 경계의 형상 변화를 나타내고 보조변수법을 이용하여 민감도 공식을 유도하였으며, 상태방정식의 해석을 위하여 2 차 경계요소법을 사용하였다.

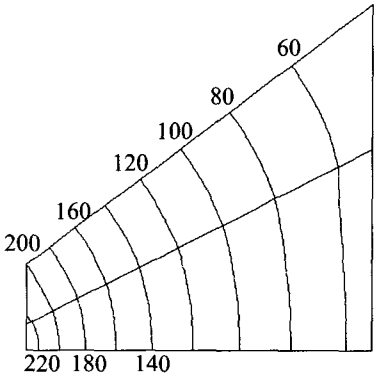
수치 예제로서 복합원통과 열확산기 문제에 대하여 형상민감도를 해석하여 유한차분에 의한 민감도와 비교함으로써 예측한 민감도의 정확성을 검증하였다. 상대적으로 영역간 경계의 코너 근처에서 민감도 오차가 약간 큰 것으로 나타났으나,

이것은 영역간 코너의 경계에 존재하는 복수의 열속을 처리하는 과정에서의 오차로부터 발생하는 것이므로 향후에 경계요소해석 프로그램의 개선이 필요한 것으로 판단된다.

제시한 형상민감도 공식을 비선형 최적화 알고리즘과 연계시켜 열확산기 문제에 대한 수치적 형상최적화를 수행하여 최적형상을 성공적으로 구하였다. 이와 같이 본 연구에서 제시한 민감도해석 방법은 복수 영역의 비균질 열전도 문제의 형상최적화를 위한 유용한 도구로 활용할 수 있다.



(a) Initial design



(b) Optimal design

Fig. 8 Temperature distribution of the thermal diffuser at the initial and optimal designs (unit: °C)

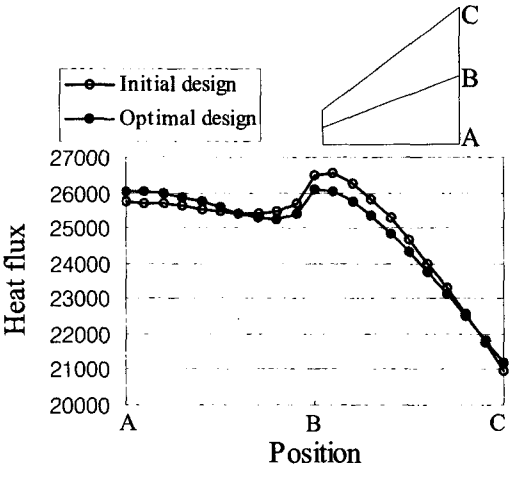


Fig. 9 Distribution of heat flux at the heat discharge surface of the thermal diffuser (unit:W/m^2)

후 기

본 연구는 2002 년도 계명대학교 비사연구기금으로 이루어졌음.

참고문헌

1. Burczynski, T., "Recent Advances in Boundary Element Approach to Design Sensitivity Analysis - a Survey," In Design-Sensitivity Analysis (Edited by M. Kleiber and T. Hisada), Atlanta Technology Publications, Atlanta, pp. 1-25, 1993.
2. Lee, B. Y., "Direct Differentiation Formulation for Boundary Element Shape Sensitivity Analysis of Axisymmetric Elastic Solids," Int. J. Solids Struct., Vol. 34, pp. 99-112, 1997.
3. Choi, J. H., Lee, B. Y. & Han, J. S., "Boundary Integral Method for Shape Optimization of Interface Problem and its Application to Implant Design in Dentistry," Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., Vol. 190, pp. 6909-6926, 2001.
4. Haug, E. J., Choi, K. K. & Komkov, V., Design Sensitivity Analysis of Structural Systems, Academic Press, New York, 1986.
5. Meric, R. A., Boundary Elements in Shape Design Sensitivity Analysis of Thermoelastic Solids, In Computer Aided Optimal Design: Structural and

Mechanical Systems, (Edited by C.A. Mota Soares). Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, pp. 7643-652, 1987.

6. Meric, R. A., "Shape Design Sensitivity Analysis for Nonlinear Anisotropic Heat Conducting Solids and Shape Optimization by the BEM," Int. J. Numer. Methods Engng., Vol. 26, pp. 109-120, 1988.
7. Meric, R. A., "Differential and integral sensitivity formulations and shape optimization by BEM," Engng. Anal. Boundary Elem., Vol. 15, pp. 181-188, 1995.
8. Park, C. W. & Yoo, Y. M., "Shape Design Sensitivity Analysis of a Two-Dimensional Heat Transfer System using the Boundary Element Method," Comp. Struct., Vol. 28, pp. 543-550, 1988.
9. Lee, B. Y. & Kwak, B. M., "Shape Optimization of Two-Dimensional Thermoelastic Structures using Boundary Integral Equation Formulation," Comp. Struct., Vol. 41, pp. 709-722, 1991.
10. Lee, B. Y. & Kwak, B. M., "Axisymmetric Thermoelastic Shape Sensitivity Analysis and its Application to Turbine Disc Design," Int. J. Numer. Methtods Engng., Vol. 33, pp. 2073-2089, 1992.
11. Lee, B. Y., Choi, J. H. & Kwak, B. M., "Shape Optimization of Two-Dimensional Thermal Conducting Solid using Boundary Integral Equation Formulation," Korean Soc. Mech. Engrs J., Vol. 6, pp. 114-121, 1992.
12. Lee, B. Y., Choi, J. H. & Kwak, B. M., Direct Differentiation Method for Shape Design Sensitivity Analysis of Thermal Conducting Solids, In Design-Sensitivity Analysis, ed. M. Kleiber & T. Hisada, Atlanta Technology Publications, Atlanta, pp. 140-165, 1993.
13. Lee, B. Y., "Shape Sensitivity Formulation for Axisymmetric Thermal Conducting Solids," Proc. Instn Mech. Engrs, Part C J. Mech. Engng. Sci., Vol. 207, pp. 209-216, 1993.
14. Aithal, R. & Saigal, S., "Shape Sensitivity Analysis in Thermal Problems using BEM," Engng. Anal. Boundary Elem., Vol. 15, pp. 115-120, 1995.
15. Sluzalec, A. & Kleiber, M., "Shape Sensitivity Analysis for Nonlinear Steady-State Heat Conduction Problems," Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 12, pp. 2609-2613, 1996.
16. Kane, J. H. & Wang, H., "Boundary Element Shape Sensitivity Analysis Formulations for Thermal Problems with Nonlinear Boundary Conditions," AIAA. J., Vol. 29, pp. 1978-1989, 1991.
17. Kane, J. H. & Wang, H., "Boundary Formulations for Shape Sensitivity of Temperature Dependent Conductivity Problems," Int. J. Numer. Methtods Engng., Vol. 33, pp. 2073-2089, 1992.
18. Dems, K. & Mroz, Z., "Sensitivity Analysis and Optimal Design of External Boundaries and Interfaces for Heat Conduction Systems," J. Thermal Stresses, Vol. 21, pp. 461-488, 1998.
19. Mustoe, G. G. W., "A Combination of the Finite Element Method and Boundary Integral Procedure for Continuum Problems," Ph.D. Thesis, University of Wales, University College, Swansea, 1980.
20. Arora, J. S., An Algorithm for Optimum Structural Design without Line Search, In New Directions in Optimum Structural Design, ed. E. Atrek, Wiley, New York, pp. 429-441, 1984.