한국학교수학회논문집 제 6권, 제 1호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 6, Number 1, 27-43, June 2003

평가부분에서 지식공간과 퍼지이론의 활용 방안에 관한 연구*

박달원[1] · 장이채[2] · 김태균[3] · 정인철[4]

본 논문은 자데교수에 의해 소개된 퍼지집합을 정의하면서 시작된 퍼지이론과 도이거넌과 팔마건에 의해 발전된 지식공간의 수학교육의 교수학습에 효과적으로 적용될 수 있는 모색하고자 하는 의도로 새로운 이론을 소개한다. 특히, 위 두 이론은 평가부분에서 현재의 평가방법이 해결할 수 없는 부분을 접근하여 수학 학습 평가의 새로운 장을 열 것으로 기대한다.

주요용어 : 퍼지집합, 퍼지이론, 지식공간, 퍼지수행평가. 수학적교수 학습

I. 서론

퍼지이론은 1965년 자데교수에 의해 애매한 집합인 퍼지집합을 수학적 방법으로 정의하면서 시작된 학문이고, 지식공간은 1985년경 도이거넌과 팔마건(Doignon and Falmagne)이 지식 평가를 위한 공간 연구로 시작되었다. 이처럼 수학은 시대마다 새로운 영역에 핵심적인 아이디어를 제공해 주었고 미래에도 그러할 것이다. 본 논문에서는 지식공간과 퍼지이론을 소개하고 1950년대 말부터 시작하여 지금까지 수학교육에서 노력해오고 있는 '효과적으로 가르칠 수 있는 수학교육에 관한 방법'을 모색하고 특히 새로운 평가의 구현을 위해 적용해 볼 수 있는 새로운 이론들을 소개하고자 한다.

이어서 지식공간의 전반적인 이론들을 소개한다. 또한, 기초개념과 원리를 학생들에게 가장 효과적으로 가르칠 수 있는 방법을 제시하는데 새로운 대안이 될 수 있는 지식구조를 활용한 수학구조의 기초이론 및 활용 방안을 소개한다. 마지막으로 교수-학습 목표를 좀더 효과적 또는 효율적으로 달성하고 전략을 개발하기 위한 새로운 대안을 제시하고자 한다. 먼저 퍼지이론의 개념과 기초이론을 소개하고 이를 응용한 입시 퍼지모형과 수행평가 퍼지점수 등을 소개한다. 또한 지식공간에 퍼지이론을 접목시킨 퍼지지식 공간론에 대한 개념을

---

* 이 논문은 2001년도 한국학술진흥재단의 연구비에 의하여 지원되었음(KRE-2001-005-B22005)
1) 공주대학교 수학교육과, dwpark@kongju.ac.kr
2) 건국대학교 전산수학과, leechae.jang@kku.ac.kr
3) 공주대학교 과학교육연구소, tkim@kongju.ac.kr
4) 공주대학교 과학교육연구소, ijung@kongju.ac.kr

새로이 소개하며 그 활용성에 대한 가치를 설명한다.

Ⅱ. 지식공간과 수학구조의 기초이론 및 필요성

수학을 가르칠 때 학생과 교사 모두를 고려해야 한다. 이때 교사에게 가장 중요한 것들 중의 하나인 '무엇을 위하여 수학을 가르쳐야 하는가' 라는 근본적인 질문에 직면하게 된다. 이 질문은 교사 자신이 가르치고 있는 수학의 의미와 자신이 가르치고 있는 수업의 의미를 묻는 것이다. 이러한 질문에 대한 의미를 찾기 위해서 수학자 및 수학교육자들의 관심과 연구가 요구된다. 다시 말하면 '왜 가르쳐야 하는가?'와 '어떻게 가르칠 것인가?'에 대한 질문에 대한 답을 얻기 위한 끊임없는 노력이 필요하다는 의미이다. 수학교육 심리학에서는 이미 1960년대 후반부터 수학구조의 기초개념과 원리를 아동들에게 가장 효과적으로 가르칠 수 있는 방법에 관한 연구를 활발하게 진행해오고 있다. 상기 질문에 대한 좀 더 효과적인 답을 얻기 위한 핵심적인 아이디어를 제공하기 위해서 수학구조 및 이와 밀접한 관련이 있는 지식공간을 소개하고자 한다.

개인의 지식상태(knowledge state)는 이상적인 조건하에서 대답할 수 있는 문제 집합에 의해 우리의 접근방법으로 표현된다고 본다. 이상적인 조건(ideal condition) 이란 그가 시간적인 압박을 받지 않으며, 어떤 감정적인 혼란 등에 빠지지 않는다는 것을 의미한다. 실제로는 부주의한 실수가 일어나기도 하고, 때로는 문제를 제대로 이해하지 못하면서도 정답을 맞출 수 있다 (이것은 다중선다형의 문제일 때에는 더욱 그러하며, 다른 경우에도 일어날 수 있다). 그러한 의미에서 일반적으로 개인의 지식상태는 직접 관찰될 수 없으며, 문제에 대한 대답으로부터 추론해야 한다.

가령, 교사가 한 학생에게 어떤 수학 과정이 그의 학력 면에서 적합한지, 또는 그가 졸업할 수 있는지를 결정하기 위해 시험을 치른다고 하자. 교사는 하나의 질문을 할 것이다. 그리고 그 질문에 대한 학생의 대답에 따라 다음 질문을 할 것이다. 그러한 질문에 의해 학생의 지식상태가 묘사되고, 시험을 치르는 동안 상태는 점차 정확해질 것이다. 여기서 지식상태란 학생이 이상적인 조건에서 풀 수 있는 모든 문제의 집합이다 (우리는 이 때 부주의한 실수나 운 좋게 맞추는 일은 일어나지 않는다고 가정한다). 다음의 정의는 이 아이디어를 형식화한 것이다.

[정의 2.1] (1) 순서쌍 $(Q, \hbar)$가 지식구조(knowledge structure)라는 것은 $Q \neq \emptyset$ 이고 $\hbar \subseteq 2^Q$로서 $\emptyset, Q \in \hbar$ 일 때이다.

(2) $(Q, \hbar)$를 지식구조라 할 때, $q \in Q$에 관한 모든 상태의 모임을 $\hbar_q$로 표기하자. 즉,

$$\hbar_q = \{K \in \hbar \mid K \ni q\}.$$

[예제 2.2] 다음과 같이 주어진 $(U, \hbar)$는 지식구조이다.

$$U = \{a, b, c, d, e, f\}$$

$$\begin{aligned} \hbar = \ & \{\emptyset, \{d\}, \{a, c\}, \{e, f\}, \{a, b, c\}, \\ & \{a, c, d\}, \{d, e, f\}, \{a, b, c, d\}, \\ & \{a, c, e, f\}, \{a, c, d, e, f\}, U\}. \end{aligned}$$

이 지식구조 상에서 모든 상태의 모임들을 생각하자;

$$\hbar_a = \hbar_c = \{\{a,c\},\{a,b,c\},\{a,c,d\},\{a,b,c,d\},\{a,c,e,f\},\{a,c,d,e,f\},Q\}$$
$$\hbar_b = \{\{a,b,c\},\{a,b,c,d\},U\}$$
$$\hbar_d = \{\{d\},\{a,c,d\},\{d,e,f\},\{a,c,d,e,f\},U\},$$
$$\hbar_e = \hbar_f = \{\{e,f\},\{d,e,f\},\{a,c,e,f\},\{a,c,d,e,f\},U\}$$

문항 a와 c는 같은 상태들에 포함된다는 의미에서, $\hbar$에 관해서 같은 정보를 가진다. 즉, $\hbar_a = \hbar_c$이다. 실제적인 관점에서는, 이는 문항 a를 숙달한 개인은 반드시 문항 c를 숙달하며, 그 역도 성립한다는 것이다. 따라서 수검자의 습득된 지식을 검사할 때에는 이들 두 문제 중 하나만 질문되어야 한다.

[정의 2.3] (1) 지식구조 $(Q, \hbar)$가 지식공간(knowledge space)이라는 것은 $\hbar$가 합집합에 닫혀 있을 때이다. 즉,

$$\jmath \subseteq \hbar \Rightarrow \bigcup \jmath \in \hbar.$$

(2) $(Q, \hbar)$의 쌍대(dual)라는 것은 지식구조

$$(Q, \hbar^c), \quad \hbar^c = \{K \in 2^Q \mid Q - K \in \hbar\}$$ 을 말한다.

지식공간의 중요성을 알 수 있는 구체적 사례를 찾아보기로 한다. 가령, 오랫동안 폭넓은 교류를 하고 있는 두 학생의 경우를 고려하자. 특정 정보에 관한 그들의 최초의 지식상태를 각각 K와 K'라고 하자. 어떤 시점에 이르면, 이들 중 한 학생은 양자가 결합된 지식을 가지게 된다. 이 때 그 학생의 지식상태를 $K \cup K'$로 표기한다. 물론 이러한 일이 항상 일어난다고는 할 수 없다. 그러나 구조의 입장에서 이러한 경우에 해당하는 합집합 지식상태가 지식공간 내에 존재한다고(합집합에 대해 닫혀있음을 의미함) 가정하는 것은 합리적이다.

전문가에게 다음과 같은 형태의 질문을 던진다고 하자.

[Q1] 한 학생이 문제 $q_1, \cdots, q_n$를 틀렸다고 하자. 이 학생이 다음 문제 q_{n+1}도 틀릴 거라고 생각하는가? 시행에 있어서 운 좋게 맞추거나 부주의한 실수와 같은 우연성의 요인은 일어나지 않고, 그 분야에 대한 학생의 실제적인 숙달 정도가 반영된다고 가정한다.

어떤 주어진 영역 Q에 있어서 그러한 모든 문제에 대한 긍정적인 대답에 의해, Q의 원소와 Q의 부분집합을 짝으로 하는 이항관계 $\wp$가 정의된다. 즉, 문제 [Q1]에 대한 긍정적인 대답은 다음과 같이 기호화할 수 있다;

$$\{q_1, \cdots, q_n\} \wp\, q_{n+1}.$$

만약 관계 $\wp$가 어떤 자연적인 조건을 만족한다면 그것은 유일하게 어떤 지식공간을 결정한다. 그 관계에 기초한 어떤 알고리즘들은 전문가가 질문할 때 도움이 된다. 그런데 이러한 알고리즘을 적용함에 있어서 전문가는 [Q1]의 질문에 대한 모호한 지식공간에 의존할지 모른다. 말하자면 그러한 과정의 결과는 그 전문가의 개인적 지식공간인 것이다. 실제로는 [Q1]의 아주 작은 일부만이 질문된다. 이러한 상황을 정확하게 추론하기 위해, $2^Q - \{\varnothing\}$상

에 다음과 같이 관계 ϑ를 정의한다.

$A\vartheta B \Leftrightarrow A$의 모든 문항의 실패로부터 B의 모든 문항의 실패를 추론한다.

다음 정리는 그러한 임의의 관계 ϑ는 유일한 지식공간을 정한다는 것을 보여준다.

[정리 2.4] $Q\neq\emptyset$에 대해 ϑ를 $2^Q-\{\emptyset\}$ 상의 관계라고 하자. $\hbar\subseteq 2^Q$를 다음과 같이 정의한다;

$$K\in\hbar \Leftrightarrow [\ \forall(A,B)\in\vartheta,\ A\cap K=\emptyset \Rightarrow B\cap K=\emptyset\ ] \qquad (2.1)$$

그러면 $\hbar$는 지식공간이다.

(증명) $K=\emptyset, Q$인 경우에 (2.1)의 우변 식은 자명하다. 따라서 $\emptyset, Q\in\hbar$이다. 다음으로 $\jmath\subseteq\hbar$를 택하자. $\bigcup\jmath\in\hbar$만 밝히면 된다. $A\vartheta B$이고 $A\cap(\bigcup\jmath)=\emptyset$라고 하자. 그러면 $\forall K\in\jmath$에 대해 $A\cap K=\emptyset$이다. $A\vartheta B$이므로 $\forall K\in\jmath$에 대해 $B\cap K=\emptyset$. 즉, $B\cap(\bigcup\jmath)=\emptyset$임을 알 수 있다.

이 관계 ϑ는 사람의 전문지식에 의존하고자 할 때, 실제로 지식공간을 구성하는 하나의 강력한 방법을 제공한다.

[정의 2.5] $\hbar$를 Q 상의 부분집합들의 모임(collection)이란 $\hbar\subseteq 2^Q$일 때이다. 순서쌍 $(Q,\hbar)$가 폐포공간(closure space)이란 $Q\in\hbar$이고 교집합에 닫혀 있을 때이다. 폐포공간 $(Q,\hbar)$이 단순(simple)이란 $\emptyset\in\hbar$일 때이다.

위의 정의에서 쉽게 알 수 있는 사실 중의 하나는 다음과 같은 동치 조건이다;

$(Q,\hbar)$가 지식공간 $\Leftrightarrow$ 쌍대 $(Q,\hbar^c)$가 단순 폐포공간.

이를 통해 지식공간과 단순 폐포공간과 서로 쌍대적임을 알 수 있고, 이는 지식공간론 연구에 매우 유용하게 이용할 수 있는 성질이다. 다음 정리는 이 공간의 한 가지 명백한 구성을 제시한다.

[정리 2.6] $(Q,\hbar)$을 폐포공간이라 하자. 그러면 임의의 부분집합 $A\subseteq Q$은 $\hbar$의 유일한 가장 작은 원소, 기호로 A', 에 포함된다. $A,B\in 2^Q$에 대해 다음이 성립한다;

(i) $A\subseteq A'$,

(ii) $A\subseteq B \Rightarrow A'\subseteq B'$,

(iii) $A''=A$.

역으로, 조건 (i) ~ (iii)를 만족하는 함수 $2^Q\rightarrow 2^Q, A\mapsto A'$는 Q 상에 유일한 폐포공간을 정의한다. 이것에 의해 그러한 함수와 Q 상의 폐포공간 사이에는 1:1 대응이 성립한다. 더욱이,

$$\emptyset'=\emptyset \Leftrightarrow \emptyset\in\hbar.$$

(증명) 주어진 $A\in 2^Q$에 대해, $A'=\bigcap\{K\in\hbar|K\supseteq A\}$이라 하자. 그러면 $A'\in\hbar$이다 ($\hbar$가 폐포공간이므로). 이것은 A를 포함하는 $\hbar$의 가장 작은 원소이다. 따라서 구하고자

하는 함수는 $2^Q \to 2^Q, A \mapsto A'$ 로 정의하면 된다. 조건 (i) ~ (iii)을 확인하는 것은 쉽다.

역으로, 함수 $2^Q \to 2^Q, A \mapsto A'$가 조건 (i) ~ (iii)을 만족한다고 하자. 이로부터 폐포공간을 결정하자. $\hbar = \{A \in 2^Q | A' = A\}$로 두면, 이것이 구하고자 하는 폐포공간이다.

1:1 대응은 구성상 명백하다. 즉, $\hbar$가 폐포 공간 $\Leftrightarrow$ $\forall A \in 2^Q$에 대해, $A' \in \hbar$ $\Leftrightarrow$ 함수 $2^Q \to 2^Q, A \mapsto A'$가 결정.

[정의 2.7] 정리 2.6에서 쓰인 기호 $A' = \bigcap\{K \in \hbar | K \supseteq A\}$를 (폐포공간 $(Q, \hbar)$에서) A의 폐포(closure)라고 한다.

어떤 특별한 목적을 위해 지식구조의 일부 영역만 관심을 가질 때가 있다. 가령, 영역을 고등학교 수학의 전체 커리큘럼이라고 하자. 그러나 연구자는 대수학에 관계된 문제들만 고려할 수 있다. 이러한 경우 대수학에 관한 문제가 구해지면, 전체 영역 상의 지식구조와의 관련성을 고려하는 것은 자연스러운 발상이다. 가령, 전체 영역 상의 성질들이 그대로 보존되는지 의문을 가질 수 있다. 다음 정리는 공간이나 구별적 지식구조에 대한 유전적(hereditary) 성질이다.

[정리 2.8] (1) $(Q, \hbar)$가 지식구조이고 $\emptyset \neq A \in 2^Q$라고 하자. 그러면

$$\varsigma := \{G \in 2^A | G = A \cap K,\ K \in \hbar\}$$

는 지식구조이다.

(2) 만약 $\hbar$가 지식공간 (구별적 지식구조)이면 ς도 지식공간 (구별적 지식구조)이다. 그러나 그 역은 성립하지 않는다.

(증명) (1)의 증명은 자명하다.

(2) $A = A \cap Q$이고 $\emptyset = A \cap \emptyset$이므로 $A, \emptyset \in \varsigma$이다. 따라서 ς는 지식구조이다. $\hbar$가 공간이라고 가정하자. $K' \in \varsigma$에 대해, 정의에서 $K' = A \cap K$인 $K \in \hbar$가 존재한다. 그러면 $\bigcup K' = A \cap (\bigcup K)$이고 $\bigcup K \in \hbar$이므로 $\bigcup K' \in \varsigma$이다. 따라서 ς도 공간이다.

$\hbar$가 구별적 지식구조라고 하자. 서로 다른 두 문항 $q, q' \in A$를 택하자. 가정에서, $q \in K$, $q' \notin K$ (또는 그 반대) 인 $K \in \hbar$가 존재한다. 그러면 $q \in A \cap K$, $q' \notin A \cap K$이므로, ς도 구별적 지식구조이다.

역의 경우를 증명하자. 다음과 같은 반례를 잡을 수 있다.

만약 $\hbar = \begin{matrix}\{\emptyset, \{d\}, \{c,e\}, \{a,c,d,e\}, \\ \{b,c,d,e\}, \{a,b,c,d,e\}\}\end{matrix}$ 와 $K = \{a, b\}$로 두면,

$$\varsigma = \hbar|_{\{a,b\}} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$$

는 구별적 지식공간이지만 그 모구조 $\hbar$는 구별적 지식구조와 공간 둘 다 되지 않음을 알 수 있다.

본 논문의 한 가지 중요한 부분은 지식구조의 틀 안에서, 영역 Q상의 내용을 습득하는 가능한 방식의 분석이다. 여기서는, 단지 문제의 선행 (predecessor)의 개념을 고려한다. 직관적으로는, 논리적이건 역사적 이유이건, 문항 r이 문항 q 다음에 습득할 수 없다면 r은

q의 선행이 된다는 의미이다. 다음의 정의는 어떤 문항 q의 선행은 q를 포함하는 모든 상태에 포함된 문항들이 된다는 아이디어를 형식화한 것이다.

[정의 2.9] $(Q, \hbar)$를 지식구조라 하자. Q의 원소 p, q에 대해서 Q상의 관계

$$p \leq q \iff p \in \bigcap K_q \qquad (2.2)$$

를 추론 관계(surmise relation) 또는 선행 관계(precedence relation)라고 한다(용어에 대한 설명은 주의 2.11 참조). $r \leq q$일 때 r은 q로부터 추론가능(surmisable) 또는 r은 q에 선행한다(precede)라고 한다.

다음의 동치가 성립함을 주목한다;

$$r \leq q \iff \hbar_r \supseteq \hbar_q \qquad (2.3)$$

이로부터 바로 다음의 결과를 얻는다.

[정리 2.10] 지식구조 $(Q, \hbar)$의 추론관계 $(Q, \leq)$는 준순서이며, 특히 Q가 구별적일 때에는 부분순서이다.

지식구조의 하세 다이어그램에 대해 언급한다. 즉, 구별적 축소의 추론관계를 하세 다이어그램으로 도시할 수 있다.

[주의 2.11] 관계 $(Q, \leq)$를 고려함에 있어서 두 가지 관점이 있다. 하나는 추론의 관점이다. 만약 $r \leq q$이면 r의 숙달은 q의 숙달로부터 추론할 수 있다는 것이다. 다른 하나는 학습의 관점이다. $r \leq q$라는 의미는 r은 항상 q보다 앞서거나 같이 숙달될 수 있다는 것이다. 그것이 논리적 이유거나 표본집단의 습관 때문이거나 간에. 가령, 유럽사에 있어서 다음의 두 물음을 고려하자.

문제 q : 이차대전 바로 직전의 영국 수상은 누구인가?
문제 r : 이차대전 당시의 영국 수상은 누구인가?

지금 질문 q에 대한 정답이 쳄벌라인(Neville Chamberlain) 이라는 것을 아는 사람이라면, 누구나 다음 수상이 처칠(Winston Churchill) 임을 알 것이다. 다시 말해서, 이것은 q에 관한 어떤 상태는 r도 포함함을 의미한다, 즉 $r \leq q$. 논리가 이러한 의존에 아무런 역할을 하지 않는다는 것은 분명하다. 단지 상태들의 구조에 의거한다. 그 자체는 고려되는 수검자의 집단을 반영한다. 그러나 많은 경우, 특히 수학이나 과학에서 $r \leq q$라는 의미는 논리적 이유에서는 r은 항상 q보다 앞서거나 같이 숙달되어야 한다는 것이다.

추론시스템에서 다음의 자연스러운 아이디어를 형식화하는 추론관계의 개념을 일반화한다. 구조에서 임의의 문항 q에 그것에 이르는 가능한 학습 과정의 모임 r을 대응시킨다.

[예제 2.12]

$$\varsigma = \{\ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}, \{b,c,e\}, \{a,b,c,e\}, \{a,b,c,d\}, \{a,b,c,d,e\}\} \qquad (2.4)$$

그러면 ς는 구별적 지식구조이다. 따라서 추론관계 $\leq$는 부분순서이다. 이것의 하세 다이어그램은 그림2.4.1에 주어진다. 사실,

$$\text{atom}\ (a, \varsigma) = \{\{a\}\}$$
$$\text{atom}\ (b, \varsigma) = \{\{b\}\}$$
$$\text{atom}\ (c, \varsigma) = \{\{b,c\}\}$$
$$\text{atom}\ (d, \varsigma) = \{\{a,b,c,d\}\}$$
$$\text{atom}\ (e, \varsigma) = \{\{b,c,e\}\}$$

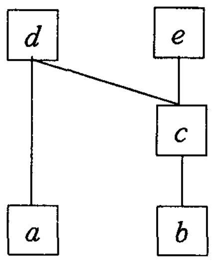

그림 2.1. 예제 2.12의 추론관계의 하세 다이어그램

추론관계는, 특히 영역이 유한일 때에는 적은 수의 원소로, 지식구조에 포함된 정보를 압축적으로 요약한다. 그러나 어떤 정보는 잃을 수 있음을 깨달아야 한다. 다른 지식구조가 같은 추론관계를 가질 수도 있다.

가령, 예제 2.12에서 지식구조 $\varsigma' = \varsigma - \{\{b,c\}\}$는 ς와 같은 추론관계를 가진다.

수학교육학의 구조는 내용적 명제(수학이라는 학문을 성립시키는 요소 명제들)로의 수학, 설명적 명제(수학의 역사, 수학의 발달의 사회적 배경, 수학적 사고의 성장 등을 포괄하는 명제들)로의 수학기초론과 수학사, 교육적 명제(수학을 가르치는 행위에 논리적으로 직결되는 명제들)로의 수학교육과정, 수학교재론, 수학교수학습론, 수학교육평가, 수학교육공학, 수학문제해결로 구성되어 있다. 여기서 언급하고자 하는 것은 지식공간과 퍼지이론을 활용한 응용분야로서의 가치를 설명하고 연구 가능성에 대한 구체적인 실천 방법들이다.

수학교육에 있어서 위에서 설명한 세 가지의 중요성은 아무리 강조해도 지나침이 없다. 수 십 년 간 수학교육을 받아오면서 '수학은 왜 배워야 하는가?'라는 기본적인 것에 대한 공감대 형성 과정을 초·중·고등학교의 어느 과정에서도 속 시원하게 경험 해보지 못해 왔다는 것이 우리의 현실이다. 수학교육이 학생들과 같이 호흡하는 수업이 진행된다면 딱딱하다고 느끼는 많은 학생들에게 창의력과 논리력을 키워주는 과목으로 인식할 것이다. 이러한 수학교육학의 구조 연구에 관한 영역들 가운데 지식공간과 퍼지이론을 활용하여 매우 효과적인 결과들을 이끌어 낼 수 있는 분야인 수학교수학습론, 수학교육평가, 수학문제해결에 관한 간단한 설명을 덧붙이고자 한다.

[설명 2.13 (수학교수 학습론)] 지금까지 좁은 의미로 수학교육학을 해석할 때는 수학교수법으로 축소시켜 동일시 할 수 있을 만큼 수학교수 학습이론은 수학교육의 중추적인 분

야로 자리잡고 있었다. 예전에는 학습자보다는 주로 교사의 측면에 치중하였으나, 최근에 들어와서는 가르침의 행위로서의 교수(teaching)와 배움의 행위로서의 학습(learning)이 공존하는 협력체제로서의 교수학습과정을 논의 대상으로 삼고 있다. 수학교수학습이론에는 브루너(Bruner)의 지식의 구조와 발견학습, 가네(Gagne)의 학습위계이론, 구성주의에 의한 교수학습이론, 캐롤(Carroll)의 완전학습이론, 형태주의 심리학에 근거한 학습이론 등과 같이 교육학 일반에서의 학습이론을 수학과의 특성에 맞게 각색한 이론도 있고, 수학과 고유의 이론인 폴리야(Polya)의 문제해결학습, 딘즈(Dienes)의 놀이를 통한 활동주의적 수학학습이론 등이 있다.

[설명 2.14 (수학교육평가)] 평가에 대한 좁은 의미의 정의는 성적을 내기 위한 집필고사라는 고정된 시점에서의 정적(static) 과정으로 볼 수 있으나, 좀더 넓은 의미로 해석하면 학생들이 수업에서 획득한 지식을 다양한 방법으로 진단하여 교수 학습과정에 반영(feedback)하는 지속적이고 역동적인 과정으로 볼 수 있다. 특히, 최근에 각광을 받고 있는 수행평가(performance assessment)의 여러 유형인 논술형 검사, 연구보고서, 면접법, 관찰법, 포트폴리오(portfolio) 등에 대한 연구는 수학교육평가의 주요 과제로 자리 잡고 있다.

[설명 2.15 (수학문제해결)] 1980년대부터 문제해결은 수학교육에 있어 하나의 모토가 되었으며, 수학교육의 지향점도 문제해결력 신장으로 집약되었다. 문제해결에서의 문제는 동형문제의 반복적 연습이나 지엽적인 질문의 수준을 뛰어넘는 복합적인 문제를 말한다. 문제를 해결하는 과정을 통해 기초적인 수학의 지식이나 기능에 대한 이해를 공고히 할 수 있을 뿐만 아니라, 의사결정, 비판적 사고, 창의적 사고 등과 같은 고급정신기능을 신장할 수 있다. 엄밀하게 말하면 문제해결은 수학교수학습론의 일부이지만, 문제해결에는 다양한 국면들이 있고 문제해결에 대해서는 수 많은 연구가 수행되어오고 있으므로 독립된 영역으로 설정하였다. 문제해결에 대한 대표적인 연구로는 폴리야의 문제해결 4단계가 있고, 이를 비판적으로 수용한 여러 대안들이 제시되고 있으며, 최근에는 사고과정에 대한 메타인식(meta cognitive)적인 측면에서 문제해결을 추구하는 연구들이 큰 흐름을 이루고 있다.

수학 수업은 많은 것을 목표로 한다. 수학의 특정한 지식의 획득과 절차의 숙달을 목표로 하기도 하고, 문제해결 전략과 같은 방법적 지식을 목표로 하기도 한다. 옛날에는 단순히 명제적 지식과 기능을 목표로 하였으나, 최근에는 방법적 인식을 수학교육의 목적으로 중시하고 있다. 폴리야(1965)는 수학교육의 제일의 과제는 젊은이에게 사고하는 것을 가르치는 것이라고 주장했다. 그가 말하는 수학적 사고는 엄밀한 증명과 같은 논증적 사고 뿐만 아니라 일반화, 유추, 추상화, 귀납 등과 같이 추측하고 발견하는 비형식적 사고를 포함하고 있다. 라카토스(Lakatos)(1978)는 논리주의와 형식주의에 대한 분석 및 수학사의 고찰을 통해 수학적 지식은 잠정적으로 참으로 인정되는 추측에 불과하며, 증명과 반박에 의해 성장 발전하는 것이라는 수학의 준경험성(quasi-empiricism)을 주장하였다. 라카토스의 이런 주장은 명제적 지식보다 방법적 지식이 왜 중요한가를 철학적으로 뒷받침해 준다고 할 수 있다.

그러나 학생이 자발적으로 수학을 하고자 하는 마음이 형성되어 있지 않으면 어떠한 명제적 지식도 어떠한 방법적 지식도 학습하기 어렵다. 폴리야가 문제의 중요한 성분은 그것을 해결하려는 욕구, 의지, 결심이라고 한 것이 이를 시사해 주고 있다. 이러한 점에서

수학적 태도의 형성을 수학적 지식과 기능의 획득 및 수학적 사고방법의 형성과 함께 수학교육의 중요 목표로 삼아야 한다는 주장은 매우 중요하다고 믿는다. 학생들에게 문제를 해결하려는 욕구, 의지, 결심 등과 같은 수학적 태도를 가지게 만들기 위한 수행평가, 포트폴리오 등을 수업 중에 적용하고자 할 때 지식공간과 퍼지이론이 어떻게 응용되어질 수 있는지, 얼마나 효과가 있는지를 연구하고자 하는 것이 주요 아이디어임을 밝힌다.

수학을 가르치고 배우는 우리들의 현재의 모습을 살펴보자. 초등학교 수학교육에서는 수학교육이 왜 필요한 지를 학생들에게 인식시켜 주는 중요한 절차를 무시하고 형식화를 습득해야 한다는 전통적인 것에 얽매인 결과 수학의 실제적인 응용성과 창의성 개발에 여전히 아쉬움을 남기게 해주는 원인을 제공해 주고 있다.

중·고등학교의 경우 입시 지도에 대한 지나친 부담감과 관심이 어우러져 수학교육의 진면목을 학생들에게 보여주지 못하고, 입시 위주의 형식적 기능과 논증만을 강조하여 학생들로부터 결정적으로 수학을 싫증나게 해주는 역할을 본의 아니게 담당하고 있다. 대부분의 수학교사가 수학교육 지도에 잘못된 점을 인정하면서도 심각하게 받아들이지 않는 이상한 현상이 있다. 이는 수학이라는 과목이 본질적으로 중요해 주요 과목이 될 수 있었던 수학의 특성에 안주하고 또 본질을 오도하는 수학교육 하에서도 주요과목의 위치를 계속 지킬 수 있을 것이라는 믿음에 그 원인을 찾을 수 있을 것이다.

심증은 있으나 확실한 물증을 찾기 힘든 곳이 중·고등학교 과정이라면 잘못됨이 심증을 넘어서 물증까지를 확보할 수 있는 곳이 교양수학을 운영하는 대학과정이다. 대학생들에게 생각하는 법을 향상시키는 것을 주요 목표로 삼고 있는 대학 교양강좌도 중등과정의 수학교육만큼 그 중요성을 인정받고 있다. 그러나 필수과목에서 탈락되고 교양과목 선택권이 학생들에게 넘어간 지금 교양수학은 수강하고 싶지 않은 첫 번째 과목이라는 불명예를 안고 심지어는 폐강까지 가는 초라한 과목으로 전락하였다. 대다수의 교수들은 수학교육의 효용성을 전혀 인정받지 못하는 현실이 안타깝긴 하지만 전공에 직접적인 해를 끼치지 않는다면 상관하지 않겠다는 입장을 취하고 있다.

이상과 같이 수학교육의 현실적인 문제점은 다음과 같이 요약된다.;

(1) 교재의 내용이 맹목적인 암기와 계산.

(2) 고등정신기능(문제해결, 비판적 사고, 생산적 사고) 외면.

(3) 수학교육의 목적이 시험인가?

(4) 수학교사가 고대 피타고라스학파의 전통을 이어 받은 저명한 혈통의 교과를 가르친다는 자부심을 가지고 있는가?

(5) 수학은 과연 쓸모가 있는가?

학교 수학에서 교과 내용의 확장과 유의미한 학습이라는 새로운 교수방법을 개발하려고 노력하는 수학자, 심리학자, 교육학자들 사이에 공통 관심사인 수학교육에 대한 개념적 접근방법을 소개하고자 한다. 개념적 접근방법을 지향하는 연구자와 교육과정 개발자들은 학생들이 수학의 기저가 되는 구조를 직관적으로 이해할 수 있도록 해야 한다는 데 의견을 같이 하고 있다. 우리는 수학의 구조의 이해가 유의미 학습에 기초가 된다는 점에 유의하고자 한다.

1950년대 말과 1960년대 초에는 수학교육자들이 유의미한 학습에 관심을 기울일 수 있는 사건인 스푸트닉(Sputnik)의 발사와 미-소간의 우주전쟁이 있었다. 이후 학교에서는 학생들의 수학적 능력이 새로운 우주 시대의 기술과 일치해야 한다는 생각을 갖게 되었다. 이러한 현상은 수학을 더 많이 가르쳐야 한다는 것뿐만 아니라 학생들의 수학적 지식을 더 잘 통합

시켜야 한다는 것을 의미한다. 교육과정의 재평가와 개혁이 수학과 과학 분야에서 이루어졌다. 개혁의 초기에는 유의미한 학습에 대한 필요성이 비판을 받기도 했지만 이 시기에 유의미한 학습의 새로운 기준이 등장하였다.

교육과정의 재평가 기간 동안 두 개의 큰 회의가 열렸다. 한 회의는 1959년에 메사추세츠(Massachusetts)의 우드홀(Woods Hole)에서 열렸는데 심리학자, 교육자, 물리학자, 수학자들이 참여하였다. 이 회의에서는 수학과 과학에 있어서 교수-학습의 본질에 대한 일반적인 원리와 몇 가지 주장에 관하여 논의되었다. 1963년 메사추세츠 캠프리지(Cambridge)에서 열린 또 다른 회의는 대부분의 참석자가 수학자였으며, 학교에서 수학 교육의 폭넓은 확대 가능성을 확인했다. 아마도 서로 다른 분야의 사람들이 모인 이들 두 회의는 표면화된 목표가 겉보기에는 서로 다르더라도(우드홀에서는 교육과정을 상세화하고, 캠프리지에서는 그것의 내용을 탐구하였음), 두 회의가 이끌어낸 결론은 유사하다. 두 회의에서 제시된 수학 수업의 핵심적인 목표는 수학의 구조를 가르치는 것이다. 즉 학생들에게 개념과 기능의 수학적 토대, 즉 수학의 구조를 가르친다면 유의미한 학습이 이루어질 것이라는 의미이다.

Ⅲ. 지식공간과 퍼지이론의 기초이론 및 활용방안

1965년 캘리포니아 대학의 자데(L. Zadeh)교수에 의해 처음으로 도입된 퍼지집합은 그 이후 1984년 창립된 국제퍼지시스템학회 (The international fuzzy systems association: IFSA)를 중심으로 퍼지이론의 응용이 활발히 진행되고 있다. 인간에게 봉사하는 만능 로봇의 실현을 바라는 사회적 욕구를 충족시켜주는 인공지능과 자동제어분야 뿐만 아니라, 의료진단 및 의사결정이론 등의 분야에도 응용되고 있다.

특히, 21세기의 지식 기반, 정보화 기반 사회에서의 학교교육의 초점은 단순 기능인의 양성보다 자기 주도적으로 지적가치를 창조할 수 있는 자율적이고 창의적인 인간의 육성이기 때문에 원격교육에 관한 연구가 크게 중요시되고 있다. 퍼지이론을 이용하여 일반적 정보인 지식을 원격교육에 적합한 형태로 표현하고, 지식 베이스의 정확성과 효용성을 높이고, 구축된 지식을 바탕으로 한 새로운 지식에 대한 퍼지추론이 개발되어진다면 원격교육과 퍼지이론의 접목이 가능해질 것으로 본다. 이러한 연구의 목적은 원격교육을 통한 학교 학습에서 교사와 학생들간의 의사소통이 조화를 이루고 교육의 효과를 극대화하는데 있다. 퍼지이론의 기초개념과 퍼지이론을 이용한 교육평가에 대한 연구를 소개하고, 퍼지이론이 원격교육의 효과를 극대화하는데 어떤 역할을 할 수 있는지 설명하고자 한다.

애매하게 표현된 자료를 사용 가능한 자료로 만들기 위하여, 퍼지집합(fuzzy set)과 퍼지논리(fuzzy logic)등의 개념이 이용되어 왔다. 우선 보통집합(퍼지집합과 구분하기 위해 지금까지 수학에서 정의되어 이용되어 오던 집합을 보통집합이라 부르기로 함)의 표현을 알아보자. 어떤 원소가 집합에 속하면 참 혹은 1로, 속하지 않으면 거짓 혹은 0으로 표현할 수 있고, 이는 2치 평가 $\{0,1\}$로 표현되는 2치 세계라고 볼 수 있다. 이러한 2치 평가를 $[0,1]$의 실수치 평가로 확장해서 퍼지집합을 아래와 같이 정의한다.

[정의 3.1] 전체공간 X상의 퍼지집합 A와 소속함수 m_A는 다음과 같은 순서쌍의 집합으로 정의한다:

$$A = \{ (x, m_A(x)) \mid x \in X \} \quad \text{혹은} \quad A = m_A(x_1)/x_1 + m_A(x_2)/x_2 + \cdots + m_A(x_n)/x_n$$

여기서 $m_A : X \to [0, 1]$인 A의 소속함수이고, m_A를 대신하여 μ_A와 f_A 등의 기호가 사용하기도 한다.

[예제 3.2] (1) A = "10보다 비교적 큰 실수"의 퍼지집합을 아래와 같이 정의할 수 있다; $A = \{(x, m_A(x)) \mid x \in R\}$

여기서, $$m_A(x) = \begin{cases} 0 & , x \le 10 \\ (1+(x-10)^{-2})^{-1} & , x > 10 \end{cases}$$

(2) A = "10에 가까운 정수"의 퍼지집합을 아래와 같이 정의할 수 있다;

$$A = 0.1/7 + 0.5/8 + 0.8/9 + 1/10 + 0.8/11 + 0.5/12 + 0.1/13$$

현대 산업사회는 정보통신기술과 멀티미디어기술의 혁신적인 발전으로 기존의 주입식 집단교육을 탈피하여 새로운 교육방법에 의한 학습이론이 개발되어지기 시작하면서 컴퓨터와 인터넷은 학습효과를 극대화하는데 없어서는 안 될 중요한 도구가 되었다. 이러한 현실 속에서 퍼지논리와 퍼지추론에 관한 퍼지이론은 인간과 각종 첨단시스템을 결부시키는 새로운 역할을 하고 있다. 특히, 퍼지학습규칙을 이용한 퍼지신경회로망과 퍼지논리에 기반한 언어변수의 지식표현 등에 관한 많은 자료들이 교사와 학생들 사이의 학습효과를 보다 자유롭고 다양하게 누릴 수 있는 교육평가 방법들의 연구에 이용될 것이다. 이러한 분야를 세 가지 형태로 나누면 기계, 인간, 기계와 인간의 시스템으로 볼 수 있다.

지식 정의역은 문제들의 유한집합 Q로 표시되어지고 지식상태는 어떤 사람이 해결할 수 있는 문제들의 집합이다. 지식상태의 모임 $\mathcal{J}$이 공집합과 전공간 Q을 포함할 때 그것을 지식구조라 정의한다. 만약 지식구조 $\mathcal{J}$가 합집합 연산에 대하여 닫혀있을 때 그것을 지식공간이라 정의한다.

Schrepp(1997)은 지식공간의 중요한 두 가지 응용으로서 (1) 지식공간은 지식의 효과적인 수행평가에 적용되어질 수 있다, (2) 지식공간은 문제해결 과정의 심리학적 모델을 테스트하는데 적용되어질 수 있다. 문제해결 과정의 심리학적 모델은 학생(피실험자, subject)이 지식정의역에 있는 문제들을 풀기위한 지혜를 지녀야만 하는 기본 인식 능력(cognitive abilities)을 표현하는 것이다. 이러한 인식과정의 세분화된 분석은 특별한 능력을 가진 학생이 어떤 문제를 해결할 수 있을 것인지 예상할 뿐만 아니라 문제를 풀고자 하는 그/그녀의 노력이 얼마나 행해졌는지를 예상할 수 있도록 한다.

그러므로 모든 문제가 학생들에 의해 정확하게 혹은 틀리게 해결한다고 가정하는 것은 너무 강한 제약임을 알 수 있다. Schrepp은 이 가정을 문제들의 대등성과 관련된 선형비율로 해가 평가되어지는 문제들의 정의역으로 일반화하는 연구결과를 얻었다. 이는 주관적 평가에 대한 일반화에 해당이 되며, 이러한 애매성이 내포한 수학의 구조 혹은 지식구조의 표현을 하는데 퍼지이론의 필요성이 있음을 알 수 있다.

우리는 퍼지이론에서 새로운 개념(퍼지수행평가 방법 혹은 퍼지점수 등)과 그들의 응용들을 연구해 왔다. 퍼지이론은 애매성을 내포하고 있는 연구영역에 매우 유용한 연장이다. 위에서 설명한 바와 같이 문제해결과정에서 참(정확함)과 거짓(틀림)의 두 가지 방법으로 명확하게 평가할 수 없는 경우가 생길 수도 있고 수학의 구조 자체의 "이해"에 관한 분석도 매우 애매한 경우가 생길 수 있다.

우선 $\wp(Q)$을 문제들의 유한집합 Q의 멱집합이라고 하자. 전체집합 X의 퍼지집합 A는 다음과 같이 정의된다;

$$A = \{(x, m_A(x)) \mid x \in X\}$$

여기서 함수 $m_A : X \to [0,1]$은 퍼지집합 A의 소속함수로 정의한다. 이 정의는 1965년 Zadeh교수에 의해 처음으로 정의되었다. 이 개념을 이용하여 퍼지지식구조와 퍼지지식공간의 개념을 정의한다.

[정의 3.3] 멱집합 $\wp(Q)$의 퍼지집합 Ψ이 소속함수

$$m_\Psi : \wp(Q) \to [0,1]$$

를 가지고 $m_\Psi(\emptyset)=1$과 $m_\Psi(Q)=1$의 조건을 만족할 때 Ψ를 Q상의 퍼지지식구조라 정의한다.

[정의 3.4] 퍼지지식공간 Ψ이 다음과 같은 조건을 만족할 때 Ψ를 Q상의 퍼지지식공간이라고 정의한다; $F_1, F_2 \in \wp(Q) \setminus \{\emptyset\}$이고 $F_1 \cup F_2 \neq Q$ 에 대하여

$$m_\Psi(F_1 \cup F_2) = \max\{m_\Psi(F_1), m_\Psi(F_2)\}.$$

[정의 3.5] 퍼지지식공간 Ψ이 다음과 같은 조건을 만족할 때 Ψ를 Q상의 준순서 퍼지지식공간이라고 정의한다;

$F_1, F_2 \in \wp(Q) \setminus \{\emptyset\}$ 이고 $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$ 에 대하여, $m_\Psi(F_1 \cap F_2) = \min\{m_\Psi(F_1), m_\Psi(F_2)\}$.

$0 \le \alpha \le 1$로 두자.

$\Psi^\alpha = \{F \in \wp(Q) \mid m_\Psi(F) \ge \alpha\}$을 퍼지지식공간 Ψ의 α-수준 지식공간이라고 부른다. 다음 정리들은 쉽게 얻을 수 있다.

[정리 3.6]

(1) 만약 Ψ이 Q상에서 퍼지지식공간이고 $0 < \alpha \le 1$이면 , Q상에서 α-수준 지식공간 Ψ^α은 지식공간이다.

(2) 만약 Ψ이 Q상에서 준순서 퍼지지식공간이고 $0 < \alpha \le 1$이면 , Q상에서 α-수준 지식공간 Ψ^α 은 준순서 지식공간이다.

$(Q, \Im)$를 지식구조이고 $\sqsubseteq$이 다음과 같은 조건을 만족할 때 $\sqsubseteq$을 Q상에서 추론관계라고 정의한다;

$$p \sqsubseteq q \Leftrightarrow p \in \cap \Im_q$$

여기서 $p, q \in Q$ 이고 $\Im_q = \{F \in \Im \mid q \in F\}$이다.

이제 퍼지추론관계를 정의하고 이와 관련된 성질들을 소개한다.

[정의 3.7] (Q, Ψ)는 퍼지지식구조이고 $0 \le \alpha \le 1$으로 두자.

(1) 퍼지관계 $\sqsubseteq_f$가 다음과 같은 조건을 만족할 때 $\sqsubseteq_f$를 Q상에서 퍼지추론관계라고 정의한다;

$$p \sqsubseteq_f q \Leftrightarrow p \in \bigcap \Psi_q$$

여기서 $\Psi_q = \{F \in \mathscr{F}(Q) | q \in F \text{ and } m_\Psi(F) > 0\}$이다.

(2) Q상에서 $\sqsubseteq_f$의 α-수준 추론관계 $\sqsubseteq_f^\alpha$는 다음과 같이 정의된다;

$$p \sqsubseteq_f^\alpha q \Leftrightarrow p \in \bigcap \Psi_q^\alpha .$$

$\alpha \in (0, 1]$로 두자. 한편 Ψ^α은 지식공간이기 때문에, $\sqsubseteq_f^\alpha$은 Q상에서 추론관계임은 쉽게 알 수 있다.

[정리 3.8] 만약 Ψ가 Q상에서 퍼지지식공간이고 $q \in Q$이면, 다음과 같은 만족된다;

(1) Ψ_q 은 유한집합이고.

(2) $\inf\{m_\Psi(F) \mid F \in \Psi_q\} > 0$ 이고,

(3) $\alpha_0 \in (0, 1]$이 존재해서 $\Psi_q = \Psi_q^{\alpha_0}$이 성립한다.

위 정리의 증명은 생략하기로 한다. Ψ_q 가 유한집합이기 때문에, α-수준 지식공간의 경우에 다음과 같은 사실을 알 수 있다. 다음과 같은 조건을 만족하는 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$이 존재한다;

$$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n \le 1 \text{ 이고 } \emptyset \ne \Psi_q^{\alpha_n} \subseteq \Psi_q^{\alpha_{n-1}} \subseteq \cdots \subseteq \Psi_q^{\alpha_1} \subseteq \Psi_q \text{ 이다.}$$

[정리 3.9] 만약 Ψ이 Q상에서 퍼지지식공간이고, 임의의 $p, q \in Q$이고, $p \sqsubseteq_f q$ 이고, α_0은 정리 3.8(3)에서와 같은 수이면, 다음조건을 만족하는 $\alpha_1 \in [\alpha_0, 1]$이 존재한다;

$$p \sqsubseteq_f^{\alpha_1} q.$$

(증명) 정리3.8(3)에 의하여, 다음 조건을 만족하는 $\alpha_0 \in (0, 1]$가 존재한다;

$$\Psi_q = \Psi_q^{\alpha_0}.$$

$\alpha_1 = \inf\{\alpha \in [\alpha_0, 1] \mid p \in \bigcap \Psi_q^\alpha\}$인 조건을 만족하는 α_1을 잡을 수 있다.

한편 $\{\alpha \in [\alpha_0, 1] \mid p \in \bigcap \Psi_q^\alpha\}$이 유한이므로, $\alpha_1 \in \{\alpha \in [\alpha_0, 1] \mid p \in \bigcap \Psi_q^\alpha\}$이 된다. 따라서 $p \in \bigcap \Psi_q^{\alpha_1}$이고 이는 $p \sqsubseteq_f^{\alpha_1} q$임을 의미한다.

이제, 우리는 한 퍼지관계 $\sqsubseteq_f^*$ 을 다음과 같이 정의한다; $p \sqsubseteq_f^* q \Leftrightarrow m_{\sqsubseteq_f^*}(p, q) > 0$.

여기서 소속함수 $m_{\sqsubseteq_f^*} : Q \times Q \to [0, 1]$는 다음 조건을 만족한다; $(p, q) \in Q \times Q$에 대하여, $m_{\sqsubseteq_f^*}(p, q) = \inf\{m_\Psi(F) | p \in F \text{ for all } F \in \Psi_q\}$. 이 때 우리는 다음 정리를 얻을 수 있다.

[정리 3.10]

(1) 만약 Ψ이 Q상에서 퍼지지식공간이고, $p\sqsubseteq_f^* q$을 만족하는 $p, q\in Q$이면, 다음 조건을 만족하는 $\alpha_2\in[\alpha_0, 1]$이 존재한다; $m_{\sqsubseteq_f^*}(p, q)=\alpha_2$이고 $p\in\bigcap\Psi_q^{\alpha_2}$이다.

(2) 만약 Ψ Q상에서 퍼지지식공간이고, $p\sqsubseteq_f^* q$을 만족하는 $p, q\in Q$이고, $m_{\sqsubseteq_f^*}(p, q)=\alpha_2$이면, 그 때 $p\sqsubseteq_f^{\alpha_2} q$ 이다.

(증명) (1) $p\sqsubseteq_f^* q$의 정의에 의해, 다음 조건을 만족하는 $\alpha_2\in[\alpha_0, 1]$을 잡을 수 있다;

$$m_{\sqsubseteq_f^*}(p, q)=\alpha_2.$$

한편 Ψ_q은 유한이므로, 모든 $F\in\Psi_q$ 에대하여 $p\in Fm_\Psi(F)\geq\alpha_2$이다. 그러므로 $p\in\bigcap\Psi_q^{\alpha_2}$이다.

(2) 만약 $p\sqsubseteq_f^* q$이면, (1)에 의하여 $p\in\bigcap\Psi_q^{\alpha_2}$을 만족하는 α_2를 잡을 수 있다. 따라서 $p\sqsubseteq_f^{\alpha_2} q$을 얻는다.

만약 $p, q\in Q$ 이고 $\alpha=\alpha_1=\alpha_2$이면, 정리 3.9(3)와 정리 3.10(2)에 의하여 이들 두 퍼지추론관계들의 α-수준 추론관계들은 상등, 즉 $\sqsubseteq_f^{*\alpha_2}$ = $\sqsubseteq_f^{\alpha_1}$. 또한 퍼지추론관계에 관한 성질들을 좀더 조사하기로 한다.

[정리 3.11] 만약 Ψ이 Q상에서 퍼지지식공간이고 $p\in Q$이면, 이때 $p\sqsubseteq_f p$ 이고 $p\sqsubseteq_f^* p$ 이다.

위 정리의 증명은 생략하기로 한다. 정리 3.11로부터, 우리는 아래 따름정리를 얻는다.

[따름정리 3.12] 만약 Ψ이 Q상에서 퍼지지식공간이고 퍼지추론관계 $\sqsubseteq_f$와 $\sqsubseteq_f^*$은 $Q\times Q$ 상에서 반사관계이다.

[정리 3.13] 만약 Ψ이 Q상에서 준순서 퍼지지식공간이고, 임의의 $p, q, r\in Q$에 대하여 $p\sqsubseteq_f^* q$이고 $q\sqsubseteq_f^* r$이면, 이때 $p\sqsubseteq_f^* r$이다.

위 정리의 증명은 생략하기로 한다. 마지막으로, 우리는 퍼지추론함수를 정의하고 그들의 성질들을 소개한다.

[정의 3.14] $F(\wp(Q))$을 멱집합 $\wp(Q)$의 모든 퍼지집합들의 모임이라고 두자. 퍼지사상 $\delta_f: Q\to F(\wp(Q))$이 다음 조건을 만족할 때 δ_f를 퍼지추론함수라 정의한다;

(i) $m_{\delta_f(q)}(E)\leq\chi_E(q)$,

(ii) 임의의 원소 $E\in\wp(Q)$에 대하여, $\exists E'\in\wp(Q)$ with $E'\subseteq E$ 이 $\min\{m_{\delta_f(q)}(E), \chi_E(p)\}\leq m_{\delta_f(p)}(E')$,

(iii) 임의의 원소 $E, E'\in\wp(Q)$ with $E\subseteq E'$에 대하여,

$$1-\min\{m_{\delta_f(q)}(E), m_{\delta_f(q)}(E')\}\geq\chi_{E\cap E'}.$$

여기서 $p, q \in Q$ 이고 χ_E 은 Q상에서 E의 특성함수이다.

사상 δ : $Q \to \wp(\wp(Q))$이 다음 조건들을 만족할 때 δ를 추론함수라 정의됨을 주목하자;

(i) $W \in \delta(q) \to q \in W$,

(ii) $W \in \delta(q) \wedge p \in W \to \exists\, W' \in \delta(p)\,(W' \subseteq W)$,

(iii) $[W, W' \in \delta(q)] \wedge [W \subseteq W'] \to W = W'$.

$\alpha \in (0, 1]$로 두고 퍼지추론함수 δ_f 의 α-수준 추론함수 δ_f^α 는 다음과 같이 정의된다;

$$\delta_f^\alpha(q) = \{E \in \wp(Q) \mid m_{\delta_f(q)}(E) \geq \alpha\}.$$

이때 우리는 δ_f^α이 Q에서 $\wp(\wp(Q))$로 가는 사상이 되고 추론함수가 됨을 밝힌다.

[정리 3.15] 만약 δ_f : $Q \to F(\wp(Q))$이 퍼지추론함수이고 $0 < \alpha \leq 1$이면, 이때 α-수준 추론함수 δ_f^α : $Q \to \wp(\wp(Q))$는 추론함수이다.

위 정리의 증명은 생략하기로 한다.

[주의 3.16] 퍼지지식공간이론의 새로운 개념을 이용할 때 우리는 퍼지추론관계와 관련된 준순서 퍼지지식공간의 연관성에 응용할 수 있고, 퍼지지식공간과 퍼지추론함수와의 유사한 연관성에 응용할 수 있다. 이러한 연구들은 수학적 구조의 "이해"를 분석하는데 결정적 역할을 할 것으로 보인다. 또한, 잘 등급화된 퍼지지식공간의 성질들을 조사할 필요성도 있으며, 적합성(compatability), 최대화 조직(the maximal mesh)과 부과(entailment) 등에도 응용되어질 수 있다.

참 고 문 헌

교육부 (1997). 수학과 교육과정.

교육부 (2000). 2001년 교육정보화촉진시행계획(안).

구광조외 3인 (1995). 수학학습심리학, 교우사.

길형석, 손충기 (1998). 교육과정과 교육평가, 동문사.

김승동, 김응환, 김태균, 노영순, 박달원, 변두원, 이덕호 (2002). 지식공간론 입문, 도서출판 보성.

박인학 (2002). 교사를 위한 교재연구 및 지도법의 이해, 대왕사.

변두원, 김태균, 박달원 (2001). 지식의 위계와 교과의 평가, 한국학교수학회 2001년도 여름 학술 발표회 논문집 제5권, 51-59.

이광형 외 1명 (1991). 퍼지이론 및 응용Ⅰ,Ⅱ, 홍릉과학출판사.

이재돈 (1999). 수학교사와 수학교육, 대구대학교 출판부.

장이채 (1996). 퍼지수학과 그 응용에 관한 고찰, 자연과학연구소, 논문집, 제6집, 103-125.

장이채 (1998). 퍼지과학의 세계, 교우사.

한재영 (2001). 수학교육론 연구 해설서(중), 교우사.

Cosyn, E. (2002). Coarsening a knowledge structure, *Journal of Mathematical Psychology, 46*, 123-139.

Doignon, J. P., & Falmagne, J.-C. (1999). Knowledge spaces, Springer.

Duntsch, I., & Gediga, G. (1996). On query procedures to build knowledge structures, *Journal of Mathematical Psychology, 40*, 160-168.

Jang, L. C., Kim, T., et al., (2002). On knowledge structures and spaces, *Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society, 5*(1), 1-14.

Jang, L. C., Pak, H. K., Kim, T., & Rim, S. H. (2002). On education of mathematics by using the history of mathematics, *Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society, 5*(2), 73-86.

Schrepp, M. (1997). A generalization of knowledge space theory to problems with more two answer alternatives, *Journal of Mathematical Psychology, 41*, 237-243.

Schrepp, M. (2001). A method for comparing knowledge structures concerning their adequacy, *Journal of Mathematical Psychology, 45*, 480-496.

Wang, Z., & Klir, G. J. (1992). Fuzzy measures Theory, New York.

Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets, *Information and Control 8*, 338-353.

The Study of Applications of Knowledge Space and Fuzzy Theory from the Perspective of Evaluation

Park, D.[1] · Jang, L.[2] · Kim, T.[3] · Jung, I.[4]

Abstract

This paper introduces some theories that can be effectively applied for the development of teaching and learning mathematics using fuzzy theory developed by Zadeh who defined fuzzy set and knowledge space by Doignon and Falmagne. Especially, we expect that two thoeries mentioned above are expected to solve the situation that could not be taken care of the present evaluation method.

Key Words : Fuzzy set, Fuzzy theory, Knowledge space, Fuzzy evaluation method, Teaching and learning mathematics.

1) Kongju National University, Department of Mathematics Education, dwpark@kongju.ac.kr
2) Konkuk University, Department of Math. & Comput. Sci., leechae.jang@kku.ac.kr
3) Kongju National University, Institute of Science Education, tkim@kongju.ac.kr
4) Kongju National University, Institute of Science Education, ijung@kongju.ac.kr