한국학교수학회논문집 제 6권, 제 1호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 6, Number 1, 101-113, June 2003

삼각함수에 관한 오류 유형 분석과 그 지도 방법

강 윤 수[1] · 박 수 정[2]

본 연구의 목적은 삼각함수에 관한 학생들의 오개념을 분석해보고 삼각함수 개념 지도 개선방안의 하나로 컴퓨터를 활용한 지도 방법을 고안하는 것이다. 이를 위해, 이미 삼각함수를 배운 학생들을 대상으로 삼각함수 개념과 관련된 학생들의 이해도 검사를 실시하여 호도법 활용과 삼각함수그래프와 관련된 학생들의 오개념을 분석하였다. 분석 결과를 바탕으로 GSP를 활용한 학생 주도형 교수-학습 자료를 고안하여, 삼각함수그래프 지도과정에 투입하였다. 그 결과, 컴퓨터 조작에 의한 역동적인 탐구과정이 학생들이 호도법과 삼각함수그래프를 이해하는데 도움을 줄 수 있음을 확인하였다.

주요용어: 삼각함수, 오류 유형, GSP

I. 서론

1. 연구의 필요성 및 목적

수학의 발달은 인류 문명의 발달과 그 궤를 같이 한다고 해도 과언이 아닐 것이다. 수학은 약 4천여 년 전인 바빌로니아, 이집트 시대에서부터 그리스 시대를 거쳐 현재에 이르기까지 제 관련 과학 분야에 그 활용 영역을 넓혀오고 있다. 이와 같이 수학은 중요한 위치를 차지하지만 현재 우리나라 학생들의 수학에 대한 이해 정도나 수학적 사고능력은 우려할 만한 수준이라는 것이 수학교사들의 보편적인 생각이다.[3] 이런 현실이 있게 된 원인은 여러 가지가 있겠으나 우선, 수학용어나 기호의 사용과정에서 학생들이 느끼는 어려움을 들 수 있다. 수학적인 용어나 기호는 상당히 추상적이며 많은 내용을 함축하고 있어서, 학생들이 쉽게 접근하기 어렵게 하거나 사용과정에서 여러 가지 오류를 범하게 만든다. 이러한 문제를 감안하면 수학적 개념들에 내재되어 있는 본질적인 의미를 외면한 채 학교수학을 연역체계로서 엄밀하게 전개해서는 안 되며 수학적 개념의 발생적 원리를 강조해야 할 필요가 있

1) 순천대학교 수학교육과, kangys@fw.sunchon.ac.kr
2) 순천대학교 교육대학원, psj9033@hanmail.net
3) 교육부의 조사에 따르면, '학생들이 수학교과를 어느 정도 이해한다고 생각하는가'라는 질문에 '50% 이상 이해한다'는 의견이 학생들의 경우 56.5%로 다른 교과에 비해 상대적으로 저조하며 교사의 경우는 48%만이 여기에 동의함으로써 학생들의 이해 정도를 낮게 평가했다.

다.

특히, 시계바늘이나 자동차 바퀴와 같이 한 점을 중심으로 회전하는 양, 스프링의 진동, 오실로스코프에 나타난 주기적인 교류전압의 파장 등과 같이 자연현상에서 주기적으로 일어나는 진동, 음향 파동 등 주기적 현상을 표현하는 중요한 도구로서 광범하게 활용되는 삼각함수(남창모, 2000)와 같은 수학적 개념은 그것이 발생된 주기적 현상을 고려한 지도가 바람직하다. 그러나 현행 교육과정에 의한 지도는 이와 관련된 고려가 부족한 듯하며 학생들의 이해 정도도 만족스럽지 못하다.

이런 관점에서, 본 연구에서는 삼각함수에 관한 이해도 조사를 통해 학생들의 오류 유형을 살펴보고 이를 바탕으로 삼각함수가 갖는 주기적 특성을 살려 발생적 원리로 지도할 수 있는 방법을 강구하였는 바, 그것이 바로 GSP를 활용한 삼각함수그래프 지도 방법이다. 삼각함수 특히, 삼각함수그래프를 지도하는 과정에서 활용 가능한 소프트웨어나 테크놀로지는 많이 있을 것이나 위에서 언급한 바와 같이 삼각함수가 갖는 주기적 특성을 고려한 발생적 지도방법을 고안하는데는 GSP가 가장 적절할 것으로 판단되었다.

2. 연구문제

본 연구의 목적 달성을 위해 다음과 같은 연구문제를 정한다.

연구문제1. 고등학교 학생들은 삼각함수의 이해 과정에서 어떤 오류를 범하는가?

연구문제2. GSP를 활용한 삼각함수그래프 지도는 어떤 효과가 있는가?

3. 연구의 제한점

1) 전라남도 순천시에 위치한 비평준화 고등학교인 H고교의 2학년 두 개 반과 1학년 한 개 반을 대상으로 삼았기 때문에 본 연구결과를 일반적으로 해석하는데는 한계가 있을 수 있다.

2) 접근제한성으로 인해 삼각함수의 이해도 검사는 이미 삼각함수를 배운 2학년 학생들을 대상으로 인지적 영역에 관련된 검사도구를 활용하고, GSP를 활용한 삼각함수의 지도는 1학년 학생들에게 실시한 후 이들을 대상으로 효과를 검증하였다.

II. 삼각함수에 대한 학생들의 이해도 조사

수학적 엄밀성은 수학이 갖는 중요한 특성 중의 하나이다. 그래서 대개 '수학적이다'라고 말할 때는 전개과정의 엄밀함을 전제로 한다. 수학적 절차의 이러한 엄밀하고 정확한 전개는 문제상황과 관련된 수학적 개념의 정확한 이해와 그것들을 활용하는 방법의 적합성을 바탕으로 한다. 특히, 삼각함수와 같이 외재적 문제 상황에 활용빈도가 높은 수학적 개념은 그 개념의 도입과정에서 생길 수 있는 오류에 특히 유의해야 하는데 많은 학생들이 이 과정에서 다양한 형태의 오류를 범한다. 이와 관련하여 본 연구에서는 학생들이 삼각함수 개념과 관련된 문제에 접했을 때 어떤 유형의 오류를 범하는지를 알아보기 위해 삼각함수 개념의 이해도 검사를 실시하였다.

1. 조사방법 및 절차

1) 표본 설정

이 조사의 대상학생은 비 평준화지역의 중상위권 학교인 전라남도 S시에 소재하는 H 남녀공학 고등학교 2학년 자연계 2학급으로 총 70명으로 구성되었으며 성별 변인은 고려되지 않았다. 대상학생들은 삼각함수 과정을 이수한 학생들로 문제에 답할 능력이 있다고 보았다.

2) 검사 도구 및 절차

검사도구는 11개의 큰 문항과 23개의 작은 문항들로 구성되었다. 문제의 형태에 따라서는 객관식 1문항과 주관식 10문항으로 구성되었으며 필요에 따라 풀이과정을 요구하는 문항도 있었다. 이 검사도구는 본 연구자들이 개발하였고 학교 현장의 교사들과 의논, 협의하여 문항 수, 난이도, 풀이시간을 조정하였다. 이 검사를 위한 제한시간은 30분이었으며 답은 검사지에 바로 기입하도록 하고 검사 후 문제지를 모두 회수하였다.

2. 조사결과 및 분석

1) 분석방법

분석방법은 대 문항과 소 문항별로 정답자, 오답자, 무응답자로 구별하여 백분율을 산정하였다. 또한, 오답자를 중심으로 오류의 유형을 살펴보기 위해 오답자의 답안지를 분석하였다.

2) 조사결과 및 분석 내용

【1번 문항】은 60분법과 호도법의 관계에 대한 이해 정도를 알아보기 위한 것으로 두 가지 각도표시로 되어 있는 각을 변환할 수 있는가에 관한 문제로 80% 학생들이 60분법을 호도법으로 혹은 호도법을 60분법으로 변환할 수 있었다. 하지만 60분법의 각도표시 단위(°)를 생략하는 경우가 많았는데, 전체 학생 중 16%가 각도표시(°)를 생략하였다.

【2번 문항】은 각을 반지름에 대한 호의 비(라디안)로 표시할 수 있는지에 대한 인식정도를 묻는 문제였는데, 약 70% 정도의 학생들이 이를 받아들인 반면에 이러한 사실을 아예 모르거나 부정적으로 생각하는 학생들도 30% 정도에 달했다. 이는 1번의 결과와 연계해 보면, 각도표시 단위를 기능적으로 변환할 수는 있으나 이를 개념적으로 받아들이지 않은 학생들이 많이 있음을 보여주는 결과이다.

【3번 문항】은 60분법과 호도법을 적절하게 활용할 수 있는지를 알아보기 위한 문제로 부채꼴(반지름이 3cm이고 중심각이 60°)과 호의 길이 구하는 공식($l=\frac{1}{2}r\theta$)을 알려주고 이것을 활용하여 호의 길이 구하는 과정을 기술하게 함으로써 60분법과 호도법의 혼용으로 인해 발생하는 오류를 알아보기 위한 것이었다. 그 결과 45%의 학생들만이 정답을 구했으며 나머지 학생들은 대부분 호도법의 의미를 이해하지 못하고 $3\times60° = 180°$와 같이 풀었다. 이는 호도법과 60분법의 차이를 인식하지 못하고 있다는 증거이며 문제해결 과정에 대한 반성이 없이 알고리즘에 함몰된 맹목적이고 기계적인 풀이에 의존하고 있음을 보여주는 사례이다. 더구나 몇몇 학생들은 각도표시를 생략한 채 180이라고 답하기도 해서 자신의 풀이과정에 대한 모순점을 발견하였으나 이를 임기웅변식으로 해결하기 위해 각도표시를 생략

하는 방법을 택함으로써 결과에 집착하는 경향을 보여 주었다.

【4번 문항】은 삼각함수의 형식적 정의를 알고 있는지 알아보고, 학생들의 개념 정의가 형식적 정의와 어떻게 다른지를 조사하기 위하여 '삼각함수의 정의를 아는 대로 쓰시오'라는 문제를 제시했는데, 대부분의 학생들은 답을 하지 못하였으며 '삼각형으로 응용한 함수', '$\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$로 이루어진 함수', '$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$', '피타고라스 정리', '삼각으로 된 함수' 등의 답을 제시하였다. 이는 삼각함수에 대한 이해 없이 관련된 법칙을 외워 계산과정에 활용하는 학생들의 잘못된 학습과정의 결과를 단적으로 보여주는 예로서 기본적인 개념의 이해를 위한 지도를 강화해야 할 필요성을 보여주는 전형적인 예이다.

【5,6번 문항】은 동경의 위치에 따른 삼각함수의 값을 계산할 수 있는지를 알아보기 위한 것으로, 5번은 θ가 제 4사분면의 각이고, $\cos\theta = 3/5$일 때, $\sin\theta$, $\tan\theta$의 값을 구하는 문제이고, 6번은 '$\sin(2\pi + \pi/3) =$ ' 등 주어진 특수각에 대한 삼각함수 값을 구하는 문제였다. 그 결과 5번 문제는 약 51%의 정답률을 보였으나 많은 학생들이 각을 나타내는 동경의 위치가 몇 사분면에 있느냐에 따라 삼각함수의 부호가 결정된다는 사실을 제대로 이해하지 못하거나 삼각함수의 정의를 제대로 이해하지 못함으로써 θ가 4사분면의 각이라는 전제조건을 주었음에도 불구하고 오답자 중 70%가 θ를 1사분면에 있는 각으로 취급하여 답하였다.

한편, 6번 문제는 약 60%의 학생들이 정확하게 답했으나 대부분의 학생들이 60분법과 호도법을 혼용하여 쓰고 있었으며 대부분은 호도법을 60분법으로 고쳐서 풀거나 각도표시(°)를 생략하는 학생들이 많았다. 이는 60분법에 익숙한 학생들에게 호도법을 지도하는 과정에서 호도법의 의미와 호도법을 도입해야 하는 이유를 적절하게 설명하지 못한 결과로 분석된다. 이로 인해 학생들은 호도법이 갖는 특성을 이해하지 못하고 그것을 60분법 각도표시를 대체할 수 있는 또 하나의 수단에 불과하다고 인식하고 있는 것 같았다.

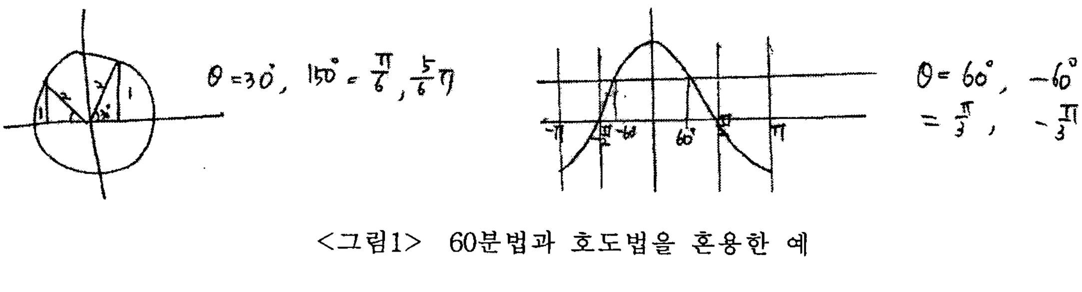
【7번 문항】은 삼각함수의 그래프를 그릴 수 있는지를 확인하기 위해 $0 \le x \le 2\pi$ 범위에서 $y = \sin x$, $y = \sin(x - \frac{\pi}{2})$, $y = \cos x$ 등과 같은 함수의 그래프를 그리는 문제를 제시하였는데, 첫 번째와 세 번째 함수의 그래프는 약 60%의 학생들이 그릴 수 있었으나 두 번째 함수는 정답자가 45%에도 미치지 못했다. 또한, 정의역이 호도법으로 주어졌음에도 불구하고 좌표평면 상에 60분법으로 삼각함수를 그리는 것에 별다른 차이점이 없다고 생각하는 학생들이 많았고, 삼각함수의 그래프를 이해하지 못해, 좌표평면 상에서 그래프 작도를 아예 시도할 수 없는 경우도 있었다. 이러한 결과는 60분법 각도표시에 의해 정의된 삼각함수에 대한 학생들의 표상이 너무 견고해 호도법을 받아들이기 힘들거나 호도법의 의미와 이와 관련된 그래프 작도를 지도하는 과정이 부실했음을 보여주는 증거이다.

【8,9번 문항】은 삼각함수의 그래프를 이해하고 정의역, 치역, 주기를 알고 있는지, 그것들을 표현할 때 60분법과 호도법 중 어떤 방법으로 표현하는지를 조사하기 위해
$y = \sin x$

의 정의역, 치역, 그리고 주기를 묻고(8번), $y=\sin 2x$, $y=2\cos x-1$, $y=\tan\frac{x}{2}$ 등과 같은 함수의 최대·최소값과 주기를 구하는 문제(9번)를 제시하였다. 그 결과, 70%에 달하는 학생들이 정의역, 치역을 정확하게 구하지 못했다. 또, 사인함수가 주기함수라는 사실은 알고 있었으나 그 주기가 얼마인지에 대해서는 무응답자를 포함하여 약 94%의 학생들이 정답을 맞추지 못했다. 이를 통해 학생들이 주기의 의미를 제대로 이해하지 못하면서 '삼각함수는 주기함수이다'는 식으로 수학적 결과를 단순히 암기하고 있다는 사실을 알 수 있었다.

한편, 9번 문항에서는 많은 학생들이 그래프를 그리지 못해서 최대·최소값을 정확하게 구하지 못하였다(정답률: 약 40%). 또한, 그래프를 그리지 않고 단지 공식에 의존하여 최대·최소값, 주기를 구하고 있어서 학생들이 삼각함수그래프에 대해 피상적인 이해에 그치고 있음을 보여줬다. 더구나 학생들이 몇 가지 그래프 개형을 기억해서 그것으로 관련된 문제를 해결하려고 시도하는 것으로 보아 삼각함수그래프를 매우 어려워하고 있음을 알 수 있었다.

【10, 11번 문항】에서는 학생들이 삼각방정식과 삼각부등식을 어떻게 푸는지를 알아보기 위해 $\sin\theta=\frac{1}{2}$ (단, $0\le\theta<2\pi$), $2\cos\theta-1=0$ (단, $-\pi<\theta\le\pi$), $\tan 2\theta=\sqrt{3}$ (단, $-\frac{\pi}{2}\le\theta<\frac{\pi}{2}$)와 $\cos\theta<\frac{1}{2}$ (단, $0\le\theta<2\pi$), $\sin\theta\le\frac{\sqrt{3}}{2}$ (단, $0\le\theta<2\pi$) 등의 문제를 제시했는데, 대부분의 학생들이 삼각함수의 그래프를 정확하게 작도하지 못해 풀이과정에서 그래프를 활용하지 못했다(오답률: 약 40%, 80%). 또 풀이과정에서는 60분과 호도법을 혼용함으로써 두 가지의 각도표시가 별개의 형태로 인식되고 있음을 보여주었다. 60분법과 호도법을 혼용한 대표적인 사례를 들면 다음 <그림1>과 같다.



<그림1> 60분법과 호도법을 혼용한 예

또한 삼각부등식, 삼각방정식을 삼각함수 개념의 고려 없이 다항식으로 표현된 부등식을 풀이하듯 문제를 푼 경우도 있었다(<그림2>).

11번 (1) $\cos\theta<\frac{1}{2}$

$\theta<60°$

<그림2> 삼각부등식 오류의 예

이해도 검사 결과를 분석한 결과, 학생들은 각을 반지름과 호의 길이의 비로 규정함으로써 각의 측도를 실수화했다는 호도법의 발생적 의미를 명확하게 파악하지 못하고 호도법은 60분법과 별 차이가 없는 또 하나의 각도표시에 불과하다고 생각하고 있는 것 같았다. 그 결과 어떤 상황에서 호도법을 사용해야 하는지에 대한 기준을 갖지 못하고 두 가지 각도표현을 사용하는데 있어 혼란을 겪고 있음을 알 수 있었다.

한편, 삼각함수 그래프를 활용한 문제해결 과정에서는 정의역이나 치역과 관련된 최소한의 이해조차 결여된 형태로 '삼각함수의 그래프는 이러 이러한 모양이다'라는 식의 내관적 자료를 활용함으로써 많은 오류를 범하였다. 이는 학생들이 삼각함수의 정의와 연계된 그래프 표현의 정확한 의미를 제대로 이해하지 못하고 있음을 말해 주는 증거이다.

Ⅲ. GSP(The Geometer's Sketchpad)를 활용한 삼각함수의 지도

컴퓨터는 교육을 포함한 사회의 모든 영역에서 널리 사용되고 있다. 수학교과의 성격상 실제로 확인이 안 되는 추상적인 개념을 다루어야 하는 경우가 많기 때문에 컴퓨터의 여러 가지 기능을 활용하면 수학학습의 과정을 직접 확인을 할 수 있어 컴퓨터는 교육매체로서 활용가치가 매우 높다고 본다.

컴퓨터가 가지는 다양한 기능은 추상적인 수학내용을 시각화 할 수 있을 뿐만 아니라 그 시각화가 학생들의 직접적인 경험이나 통제를 통해 이루어질 수 있다는 점에서 수학학습이 갖는 어려움을 완화시켜준다. 특히, 형식적인 증명이나 개념학습의 전 단계에서의 그래픽이나 애니메이션, 시뮬레이션을 통한 직관적, 탐구적 활동은 수학의 역동적이고 발생적인 측면을 부각시킬 수 있다.

1. GSP와 삼각함수의 그래프

수학교육의 각 영역에서 활용 가능한 수학교육용 프로그램은 많이 있다. 본 연구에서 관심을 갖는 삼각함수의 그래프를 지도하는 과정에서 활용할 수 있는 소프트웨어 또한 많다. 오늘날 여러 가지 함수의 그래프 지도에 많이 활용되는 소프트웨어로는 Mathematica, Maple 등과 같은 소프트웨어와 TI-92 등과 같은 휴대형 테크놀로지 등이 있다. 이들은 각기 고유한 특징을 갖고 있어서 어떤 관점에서 어떤 방법으로 활용하느냐에 따라 그 효과가 달라질 수 있다.

본 연구에서는 이미 분석된 삼각함수 그래프와 관련된 학생들의 오개념을 치유하고 삼각함수 개념이나 호도법과 연계된 삼각함수그래프 지도를 위해 GSP(The Geometer's Sketchpad)를 사용하였다. GSP는 보통 기하영역의 지도과정에서 많이 활용되는 소프트웨어이나 호도법과 삼각함수그래프의 상호관련성을 설명하기에 적합한 기능을 갖추고 있어 삼각함수의 그래프를 연속적이고 역동적으로 관찰할 수 있게 하며, 애니메이션(Animation)으로 만들어진 자취를 통해 삼각함수 그래프의 생성과정을 보여줄 수 있다는 장점을 갖고 있다. 특히, 자취(Locus) 기능으로 자취 전체를 한꺼번에 제공하기도 하는데 이를 통해, 여러 가지 변인에 따라 자취가 변하게 되어 다양한 경험을 할 수 있다.

2. GSP를 활용한 삼각함수 지도의 실제

1) 수업 적용 대상 및 장소

GSP를 활용한 삼각함수그래프에 대한 수업은 전라남도 순천시에 소재한 비평준화 남녀공학고등학교인 H고등학교 1학년 35명을 대상으로 하였다. 이들은 당시 삼각함수 단원을 배우기 시작하는 과정에 있었으므로 수업 적용 대상으로 적합하다고 판단되었다. 본시 수업은 H고교 컴퓨터실에서 실시하였는데 그곳은 1인 1대 컴퓨터 학습환경이 가능해서 좀더 직접적이고 효율적인 수업이 가능했다.

2) 수업 적용 절차 및 방법

(1) 현행 삼각함수 단원의 교과서 내용을 분석한다.

(2) 담당교사가 GSP의 기능을 숙지하여 필요한 자료를 만드는데 지장이 없도록 한다.

(3) 교수-학습 지도안을 작성하여 구체적인 수업 적용 절차를 완성한다.

(4) 대상학생들에게 사전에 GSP에 대한 기본적인 기능을 숙지시켜 준비된 교수-학습 계획을 이해하는데 도움을 준다.

(5) 대상학생들에게 준비된 학습지도안에 따라 수업을 진행한다.

(6) GSP를 활용한 수업에 관한 준비된 설문지를 작성하도록 한다.

(7) 작성된 설문지를 분석하여 결과를 도출한다.

3) GSP를 활용한 교수-학습지도안

실제 수업에서 GSP를 활용한 교수-학습 계획을 적용하기 위하여 교수-학습 지도안[4]을 아래와 같이 작성하였다.

교수-학습 지도안

<table>
<tr><td>단 원</td><td>VII. 삼각함수</td><td>소단원</td><td colspan="2">1. 삼각함수의 그래프</td><td>시간계획</td><td>50분</td></tr>
<tr><td>학습목표</td><td colspan="6">1. 삼각함수($y = \sin\theta$)의 그래프를 그릴 수 있다.
2. 삼각함수($y = \sin\theta$)의 치역과 주기를 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>학습요소</td><td colspan="3">주기함수, 사인함수의 성질</td><td>환경 및 자료</td><td colspan="2">컴퓨터 1인 1대
프로젝션TV</td></tr>
<tr><td>학습의도</td><td colspan="6">GSP를 활용하여 삼각함수($y = \sin\theta$)의 그래프가 그려지는 원리를 보여주고, 학생들로 하여금 삼각함수의 그래프를 직접 작도해 보도록 함으로써 학생 주도적인 학습이 가능하도록 하고, 삼각함수의 그래프를 쉽게 이해할 수 있도록 한다.</td></tr>
</table>

◆ 도 입

♣ 출석확인 및 단원 소개

♣ 전시학습 복습 및 선수학습 내용 확인

θ가 다음과 같을 때, $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$의 값을 구하여라.

(1) 30°　　(2) 45°　　(3) 120°

4) 코사인함수나 탄젠트함수 그래프에 관한 지도안도 아래에 제시된 지도안과 비슷한 형태로 작성되었으며 동일한 대상학생들에게 같은 시간 동안에 투입되었다.

◆ 전 개

1. $y = \sin x$의 그래프에 대하여 알아보자.

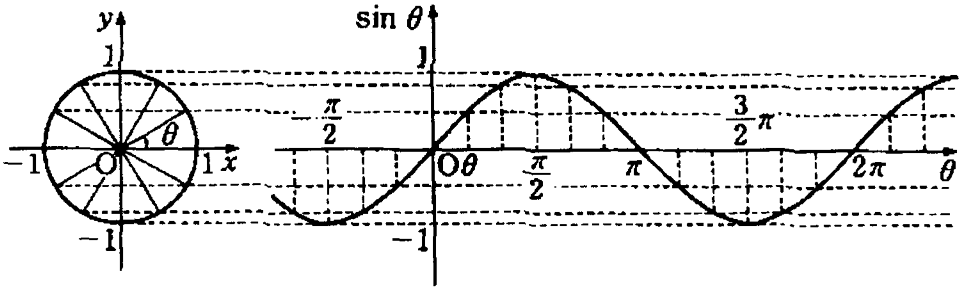
좌표평면 위에서 각 θ를 나타내는 동경과 단위원과의 교점을 $P(x, y)$라고 하면 $\sin\theta = y$이므로 교점 P의 y 의 좌표가 $\sin\theta$의 값이다.

각 θ의 크기에 따라 $\sin\theta$의 값의 변화를 살펴보면 아래 표와 같다.

θ	0	…	$\frac{\pi}{2}$	…	π	…	$\frac{3}{2}\pi$	…	2π
$\sin\theta$	0	↗	1	↘	0	↘	-1	↗	0

θ가 2π보다 큰 경우나 0보다 작은 경우에도 앞의 변화가 되풀이된다.

변수 θ를 가로축으로, $\sin\theta$의 값을 세로축으로 정하고 θ의 변화에 따른 $\sin\theta$의 변화하는 모양을 그래프로 나타내면 다음과 같은 곡선이 된다.



이 곡선을 사인곡선이라고 한다.

$y=\sin\theta$에서 θ에 x를 대입하여 $y=\sin x$ 인 사인함수를 정의한다.

2. 주기 함수에 대하여 알아보자.

정의역의 모든 점 x에 대하여 $f(x+p) = f(x)$를 만족하는 양수 p가 존재할 때, 함수 f를 주기함수라고 하고, 최소의 양수 p를 f의 주기라고 하는데 삼각함수에서의 이러한 주기성의 파악은 중요하다.

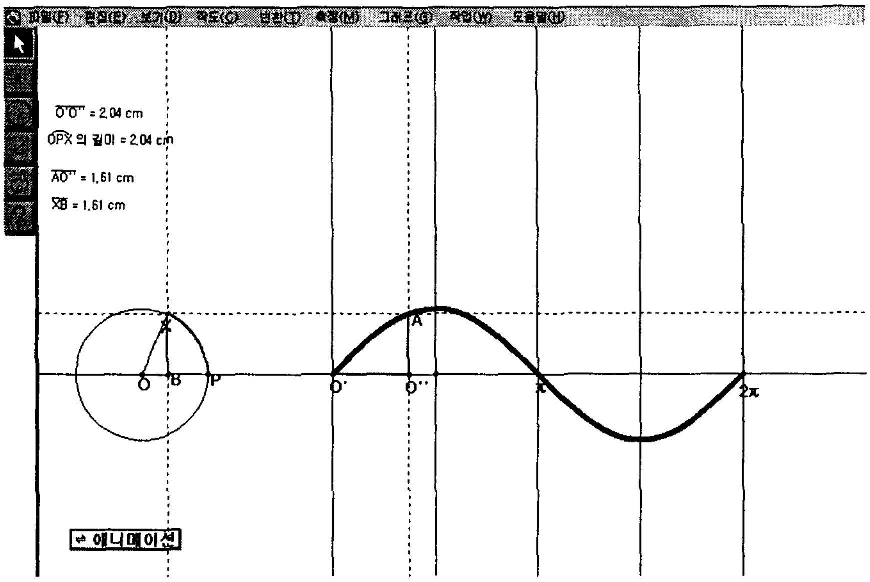
이 사인함수의 그래프는 동경 $\overrightarrow{OP}$ 가 1회전할 때에 그려지는 모양이 계속하여 반복됨을 알 수 있다. 곧, 임의의 실수 θ가 2π마다 같은 변화를 반복한다.

$$\sin(\theta + 2n\pi) = \sin\theta \quad (\text{단, } n\text{은 정수})$$

따라서, 사인함수는 주기함수이고 주기는 2π이다.

※ 일반적으로 함수 $f(x)$가 $f(-x) = -f(x)$를 만족할 때, 이 함수를 기함수라고 하며 이 함수의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다. 그런데, $\sin(-x) = -\sin x$이므로, 사인함수 $y=\sin x$는 원점에 대하여 대칭인 기함수이다.

3. GSP를 이용한 $y=\sin x$의 그래프5)를 보여준다.



<그림3> 호도법과 사인함수그래프

◉ $\overline{XB}$ 가 $\sin\theta$ 값을 결정짓는다는 것을 보여주기 위해 $\overline{AO''}$와 함께 선 모양을 굵게 하고 선 색을 다른 직선들과 다르게 한다.

◉ 호 OPX의 길이가 $\overline{O'O''}$와 같다는 것을 보여주기 위해 선 모양을 굵게 하고 선 색을 같게 한다.

☞ 원위의 점 X를 움직여 보면서 $y=\sin x$ 그래프가 그려지는 과정을 자세히 설명한다.

4. $y=\sin x$의 그래프를 GSP를 이용하여 학생들이 직접 작도하도록 한다.

☞ 작도과정을 설명하고, 순회하면서 도움이 필요한 학생들은 개별지도를 한다.

5. 학생들에게 작도한 그래프를 관찰하면서 $y=\sin x$의 성질을 알아보도록 한다.

함수 $y=\sin x$의 성질

❶ 정의역은 실수 전체의 집합이다.
❷ 치역은 $\{y|-1\le y\le 1\}$ 이다. 즉 $-1\le \sin\theta\le 1$ 이다.
❸ 주기가 2π 인 주기함수 이다.
❹ 그래프는 원점에 대해 대칭이다.

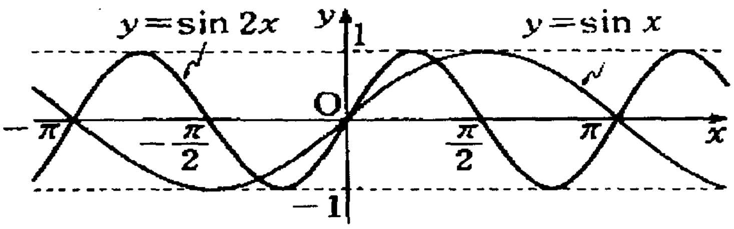
5) 그래프 작도방법은「손인수, 송영준, 조성윤, 김세식 지음, 예제로 배우는 한글 GSP, 수학사랑」을 참조할 것.

☞ 학생들에게 관찰하게 한 후 2~3명을 지명하여 발표하도록 한다

6. 학습활동지6)를 학생들에게 나누어주고 이것을 작성하도록 한다.
☞ 순회하며 지도하고, 학생들이 사인그래프의 형태를 정확히 알 수 있게 한다.

7. 학생들과 함께 문제를 해결한다.
$y = \sin 2x$의 그래프를 그리시오.

(풀이) $x = \frac{\theta}{2}$일때의 $\sin 2x$의 값은 $x = \theta$일때의 $\sin x$의 값과 같다. 그러므로 $y = \sin 2x$의 그래프는 $y = \sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$배 축소한 것과 같다.



위 그림에서 알 수 있듯이 $y = \sin 2x$의 주기는 π이다.

◈정리
♣학습내용정리
GSP로 작도한 $y = \sin x$의 그래프를 애니메이션 기능을 이용해 보여 주면서 그래프의 성질을 정리하여 준다.

형성평가문제

$y = \sin\frac{x}{2}$의 그래프를 그리고, 주기를 구하여라.

Ⅳ. 설문조사 및 결과 분석

1. 설문조사 도구

GSP를 활용한 수업을 진행한 후 대상학생들에게 설문지를 작성하도록 하였다. 설문지는

6) GSP를 활용해서 작도한 그래프에서 동경을 변화시켜 봄으로써 호도법으로 주어진 여러 각에 대한 함수값을 알아보고 이를 좌표 상에 표시하게 하는 활동지를 완성하게 한다.

본 연구자들이 직접 작성하였으며, 현장교사들과 협의하여 각 문항의 내용을 조정하였다. 설문지는 7개의 객관식 문항과 1개의 주관식 문항으로 구성되었다.

2. 결과 분석

【1번 문항】은 '이전에 컴퓨터를 활용한 수업을 받아 본 경험이 있느냐'는 물음에 응답자의 83%가 경험이 없다고 답변함으로써 수학과 교수-학습 과정에서는 아직도 컴퓨터가 교구로 유용하게 활용되는 단계에 다다르지 못했음을 알 수 있었다.
【2번 문항】은 '일반적인 수업과 컴퓨터를 활용한 수업의 흥미도 비교'를 요구한 물음에 71%가 컴퓨터를 활용한 수업이 더 흥미로웠다고 답변했다. 이것은 '1번 문항'의 결과를 고려하면 컴퓨터를 활용한 수업 경험이 없는 학생들이 컴퓨터를 활용한 새로운 수업환경에 대한 일시적인 흥미 증가로 볼 수도 있겠다. 하지만 컴퓨터의 활용이 수업목표를 달성하는데 부정적인 요인을 포함하지 않고 지필환경이 갖는 한계를 극복할 수 있는 상황이라면 이 결과를 긍정적으로 검토해야 마땅하다.
【3,4번 문항】은 '사전에 숙지한 GSP에 관한 기능을 이해하고 교사의 안내에 따라 그래프를 작도하는데 어려움이 없었는지'를 묻는 질문에 각각 80%, 74%의 학생들이 긍정적인 답을 함으로써 컴퓨터 환경이 갖춰진다면 GSP를 활용하기 위해 별도로 많은 시간을 투자할 필요가 없음을 보여주었다. 즉, GSP를 활용하기 위해 GSP 기능 익히기가 목표가 되는 '메타인지적 이동'이 일어나지 않음을 말해 준다.
【5,6번 문항】은 'GSP를 활용하여 설명한 그래프가 이해가 잘 되었으며, 삼각함수그래프를 이해하는데 GSP가 결정적인 도움을 주었는가'라는 물음에 각각 80% 이상의 학생들이 긍정적인 답변을 보였다. 이는 학생들이 삼각함수 그래프를 이해하는데 많은 어려움을 나타낸 삼각함수 이해도 조사 결과와 대비되는 것으로 GSP가 갖는 특성이 학생들이 삼각함수그래프를 이해하는데 결정적인 도움을 준 것으로 이해될 수 있다. 특히, GSP를 활용함으로써 반지름에 대한 호의 길이의 비로 각을 표시한 '호도법'에 의한 각도의 변화에 따른 삼각함수값의 변화 상태를 역동적으로 보여줌으로써 삼각함수 개념과 삼각함수그래프의 의미를 이해하는데 큰 도움을 줄 수 있다.
【7번 문항】은 'GSP를 활용한 수업에 만족하는가'를 묻는 질문에 상당히 긍정적인 반응(매우 만족한다: 62%, 만족한다: 21%, 보통이다: 14%)을 보임으로써 학생들의 입장에서는 'GSP를 활용한 삼각함수그래프의 지도'가 상당한 효과가 있다고 인식하고 있음을 보여주었다. 특히, 많은 학생들이 교사의 안내에 따라 GSP를 이용하여 삼각함수그래프를 직접 그려본 것이 호도법과 삼각함수그래프를 이해하는데 크게 도움이 되었다는 반응을 보였다.

V. 결 론

학생들의 수학적 개념에 대한 이해와 그것의 활용가능성은 그 개념이 발생한 원리와 그와 관련된 개념들 간의 상호관련성에 관한 이해를 전제로 한다. 특히, 삼각함수와 같이 외재적 문제 상황에서 활용가능성이 큰 수학적 개념은 호도법이나 삼각함수그래프 등이 삼각함수 개념 자체와 연계되어 이해되어야 그것의 활용과정에서 보다 더 강력한 힘을 발휘할 수 있

다. 하지만 많은 학생들은 삼각함수의 정의, 호도법의 의미, 삼각함수의 그래프 등이 갖는 상호관련성에 대한 이해가 부족한 상태로 삼각함수에 관한 여러 가지 공식들을 활용한 단편적인 문제들을 해결하는 것에 만족하고 있다.

이런 관점에서 본 연구에서는 삼각함수와 관련된 영역에서 학생들에게 나타나는 개념상의 오류, 호도법, 삼각함수그래프에 대한 이해도 등을 조사함으로써 삼각함수의 지도과정에서 학생들이 느끼는 어려움을 분석해 보았다. 그런 후에 현재의 지도방법을 개선시킬 수 있는 대안의 하나로서 탐구형 소프트웨어인 GSP를 활용한 삼각함수그래프의 지도를 시도하였다. 그 후, 대상 학생들에게 이런 형태의 지도과정의 효과에 관한 설문을 실시하였다.

그 결과, 많은 학생들이 이러한 형태의 수업 방식이 삼각함수와 그 그래프를 이해하는데 매우 효과적이라고 응답하였다. 특히, 60분법과 호도법의 구분이 모호한 학생들에게 호도법의 의미를 이해시키고 호도법으로 표현된 각의 변화에 따라 역동적으로 변하는 삼각함수그래프를 직접 작도해 볼 수 있게 한 것은 GSP가 갖는 특징을 적절히 활용한 것으로 다른 종류의 테크놀로지로는 구현하기 힘든 장면이었다.

수학과 교수-학습 과정에서 테크놀로지를 활용하는 방법은 여러 가지 형태가 있을 수 있다. 하지만 어떤 도구도 모든 수학적 개념의 지도 과정에 유용하게 활용되기는 어렵다. 그래서 우리는 구체적인 수학적 개념을 지도하는 특정한 교수-학습 상황에서 유용한 테크놀로지를 선택하는 문제가 중요하며 이와 관련된 다양한 연구가 진행될 필요가 있다고 본다. 이런 관점에서 다른 여러 가지 도구나 테크놀로지를 활용하여 삼각함수그래프를 지도하는 다양한 방법들이 연구될 필요가 있으며 그 결과를 비교하여 가장 그럴듯한 삼각함수그래프 지도 방법을 찾는 연구들이 진행될 필요가 있다.

참 고 문 헌

권병도(2000). 고등학교 교육과정에서 삼각함수의 도입과 지도방법에 관한 연구, 서강대학교 교육대학원 석사 학위 논문.

남창모(2000). 고등학교 수학교육에서 삼각함수의 효율적인 지도방법에 관한 연구 -공통수학을 중심으로, 동국대학교 교육대학원 석사 학위 논문.

박상호, 윤삼열(1999). 고등학교 수학에서의 GSP 활용, 수학사랑.

손인수, 송영준, 조성윤, 김세식(1999). 예제로 배우는 한글 GSP, 수학사랑.

신영섭(1999). GSP를 활용한 수학과 교육자료 개발 연구-중학교 함수의 그래프를 중심으로, 공주대학교 교육대학원 석사 학위 논문.

최복순(2000). 고등학교 2학년 학생의 삼각함수에 대한 오개념과 오류에 관한 연구, 충남대학교 교육대학원 석사 학위 논문.

http://www.mathlove.org 수학 Q & A

Analysis of Misunderstood Types Relate to Trigonometric Function and Its Teaching Method

Kang, Yun Soo[1] · Park, Su Joung[2]

Abstract

The purpose of this study is to analyze students misunderstood types relate to trigonometric function and to devise its teaching method using GSP. To do this, we performed several steps as followings:

First, we performed questionnaire survey to 70 students belong to second year at high school to find students comprehension degree about radian angle representation and trigonometric function graph.

Second, we devised the teaching-learning materials relate to trigonometric function graph using GSP. And then, we used them in the class of 35 students who are at the time to learn trigonometric function in the first year at high school.

Third, we conducted questionnaire survey to students studied through teaching and learning materials using GSP. As a result of doing the survey, we found that general students were interested in the class using GSP and they could also operate computer without difficulty.

Key Words: Trigonometric function, Types of misunderstood concepts, GSP

1) Dept. of Mathematics Education, Sunchon National University, Sunchon, 540-742, Korea, kangys@fw.sunchon.ac.kr

2) Graduate School of Education, Sunchon National University, psj9033@hanmail.net