

## 불연속 복합체의 재료역학적 접근을 통한 응력해석

김홍건\*, 양성모<sup>+</sup>, 노홍길<sup>++</sup>

(논문접수일 2003. 6. 18, 심사완료일 2003. 7. 18)

### Stress Analysis of a Discontinuous Composite Using Mechanics of Materials Approach

H. G. Kim\*, S. M. Yang<sup>+</sup>, H. G. Noh<sup>++</sup>

#### Abstract

In discontinuous composite mechanics, shear lag theory is one of the most popular model because of its simplicity and accuracy. However, it does not provide sufficiently accurate strengthening predictions in elastic regime when the fiber aspect ratio is small. This is due to its neglect of stress transfer across the fiber ends and the stress concentrations that exist in the matrix regions near the fiber ends. To overcome this shortcoming, a more simplified shear lag model introducing the stress concentration factor which is a function of several variables, such as the modulus ratio, the fiber volume fraction, the fiber aspect ratio, is proposed. It is found that the modulus ratio( $E_f/E_m$ ) is the essential variable among them. Thus, the stress concentration factor is expressed as a function of modulus ratio in the derivation. It is found that the proposed model gives a good agreement with finite element results and has the capability to correctly predict the values of interfacial shear stresses and local stress variations in the small fiber aspect ratio regime.

**Key Words** : Discontinuous Composite Mechanics(불연속복합재료역학), Shear Lag(전단지연), Modulus Ratio(탄성계수비), Fiber Aspect Ratio(화이버형상계수비), Fiber Volume Fraction(화이버체적비), Interfacial Shear Stress(계면전단응력), Stress Concentration Factor(응력집중계수)

### 1. 서론

단섬유 복합체의 강화 과정을 이해하는 것은 양질의 복

합재료를 생산하는데 매우 중요하다. 피로 메커니즘과 함께 복합재료의 강화과정에 대한 지식은 강성과 강도를 위한 복합재료의 최적설계 개발을 촉진시켰다. 일반적으로

\* 주저자, 전주대학교 공학부 (기계공학전공)교수 (hkim@jeonju.ac.kr)  
주소: 전북 전주시 완산구 효자동 3가 1200  
+ 전북대학교 기계항공시스템공학부 교수  
++ 전북대학교 대학원 정밀기계공학과

단섬유와 모재 사이의 상호작용은 매우 복잡하며 불완전하게 이해되고 있는 경우가 많다. 단섬유 복합체에 있어 하중은 강화제인 섬유로 직접 전달되지 않고 모재에서 보강재 양단을 통하여 전달이 된다. 이 때 보강재의 길이가 긴 장섬유일 경우에는 양단의 수직응력전달은 전체에 비하여 매우 작기 때문에 무시할 수 있으며 하나의 연속섬유로 간주할 수 있다<sup>(1)</sup>. 그러나 단섬유 보강의 경우, 이러한 양단효과는 매우 커서 무시할 수 없으며 그 효과는 보강재 길이의 함수로 볼 수 있다<sup>(2)</sup>. 장섬유 보강의 경우, 재료역학적 접근으로서의 응력해석을 위해서 유도된 전단지연이론 (Shear Lag Theory : SLT)<sup>(3)</sup>이라 불리는 이론이 존재하나 단섬유 보강의 경우 이 이론은 잘 맞지 않는 것으로 알려져 있다<sup>(4)</sup>. 더구나, 보강재 사이에 위치하는 모재에는 상당한 응력집중이 발생되며 따라서 장섬유 보강 및 단섬유 보강 모두에 잘 맞는 이론이 필요하다고 할 수 있다. 이후 Nardone과 Prewo<sup>(5)</sup>, 그리고 Nardone<sup>(6)</sup>은 복합체의 항복응력을 계산하기 위하여 모재의 전면 항복상태를 가정하였으며 보강재 단의 응력에 이 항복응력을 적용하였다. 그러나 이러한 응력계산은 거시적인 복합체 응력상승효과의 근사적 해석에는 도움이 되나 순수 탄성영역인 인장 초기단계에는 적용할 수가 없다. 또 Taya와 Arsenault<sup>(7)</sup>는 보강재 단의 응력을 모재의 평균응력으로 가정하여 계산하였다. 즉, 보강재 단의 응력집중이 없다고 가정한 것이다. 이러한 단점들을 보완하기 위해 Kim<sup>(4)</sup>은 Closed Form의 해인 수정전단지연이론 (Modified Shear Lag Theory : MSLT)을 공식화시켰으며, 이의 기본원리는 응력집중이 심하게 일어나는 부분인 보강재와 보강재 사이의 모재에 가상의 보강재를 투입시켜 불연속 섬유를 연속섬유화시키는 것이다. 즉, 가상섬유를 사용하여 실제 섬유에 적용했던 미분방정식을 가상섬유에도 동시에 적용하는 것이다. 이어서 Kim<sup>(8)</sup>은 Closed Form의 해를 사용해 수정전단지연이론으로 기지의 항복시점과 기지 내의 응력집중을 예측할 수 있는 복합재료의 탄성과 탄-소성 거동을 규명하였다. 그러나 이러한 가상섬유 사용시 결과식이 매우 복잡하게 전개되어 단시간 내에 복합재료역학적 강화효과를 파악하기가 쉽지 않다.

이 논문의 목적은 단섬유의 복합강화효과를 계산하기 위한 식을 사용할 때, 이러한 MSLT를 사용하지 않고 섬유단의 응력집중계수 (Stress Concentration Factor; SCF)를 정의해 줌으로써 빠른 계산을 할 수 있는 해를 구하기 위한 데 있다. 즉, SCF 산정시 가장 민감한 변수인 탄성계수비 (Modulus Ratio;  $E_f=E_f/E_m$ )의 함수로만 정의해 주는 것이다. 이는 유한요소해석(FEA) 결과로부터도 함수관계를 도출해

낼 수 있으며<sup>(8)</sup> 이 논문에서는 응력집중계수를  $SCF=\sqrt{\frac{E_f}{E_m}}$  로 정의한 후 화이버의 응력 및 화이버와 모재 경계에서의 전단응력을 계산해 보았다. 이에 의해 복합강화효과가 어느 정도로 발생하는지 정량적으로 유도하였다. 대표모델 (Representative Volume Element : RVE)로서 축대칭 모델을 사용하였으며 이 모델의 개념은 종전의 연구내용<sup>(8-12)</sup>과 동일하다.

## 2. 불연속 복합재료역학 정식화

본 이론의 미세구조역학적 모델은 보강재와 모재가 탄성적으로 거동하고 있다고 가정하고, 계면이 항복이나 슬립 없이 보강재들로부터 모재로 응력이 전달된다고 가정한다. 각 보강재는 Fig. 1에서처럼 정육각형으로 규칙적으로 다른 보강재들에 의하여 둘러싸여 있다고 가정한다.

Fig. 1에서 모재의 변형률은 고려하고 있는 보강재로부터 거리  $R$  만큼 떨어진 가장 가까운 원형으로 이웃해 있는 보강재와 일정하다고 가정하고 또, 보강재(또는 화이버)의 변형률을  $\epsilon_f$  라 하고 모재의 변형률을  $\epsilon_m$  라 하며 복합재료의 변형률을  $\epsilon_c$  로 하면 보강재 중심으로부터 반지름  $r$  에 관한 함수로써 원형대칭의 응력분포(즉, 모재의 변위)와 전단응력  $\tau$  는 보강재 축에 대하여 방위(Orientation)가 변하지 않음을 알 수 있다. Fig. 1에서 복합재료 요소내의 자유물체도를 Fig. 2(a)와 같이 구성하면 보강재 표면( $r_f$ )에서의 전단력과 거리  $r$ 에서의 전단력을 같다고 놓으면,

$$2\pi r_f \tau_e dz = 2\pi r_f \tau_e dz \quad (\text{혹은, } \tau = r_f \tau_e / r) \quad (1)$$

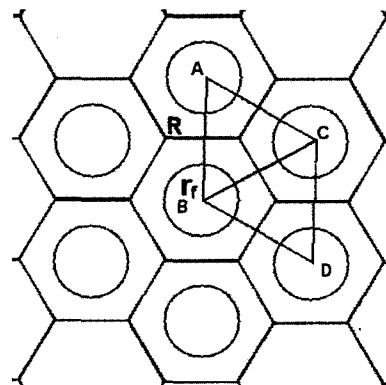


Fig. 1 Regularly arranged hexagonal model

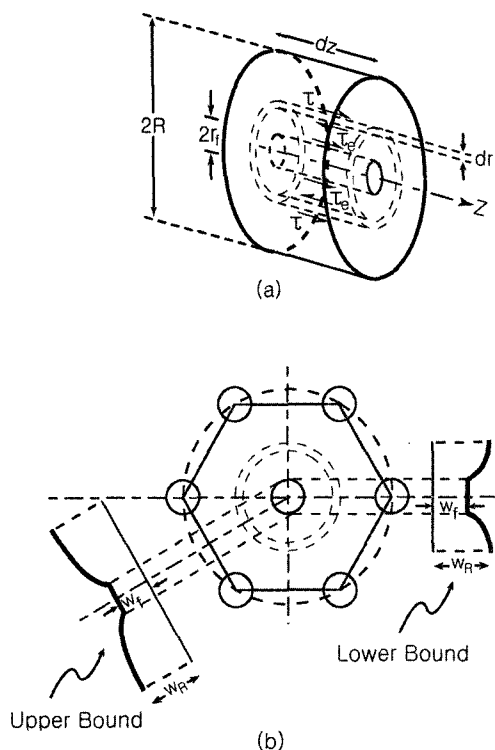


Fig. 2 Short length of fiber and surrounding matrix, (a) Free body diagram, (b) Fiber with nearest neighbors and associated displacements along the fiber axis.

이 된다. 이 때 전단변형률  $dw/dr$ 에 대한  $\tau$ 의 비율은 모재의 전단탄성계수  $G_m$ 이 되고, 그 결과 다음과 같이 식 (2)를 얻게 된다.

$$\frac{dw}{dr} = \frac{\tau}{G_m} = \frac{\tau_e \gamma_f}{G_m r} \quad (2)$$

이 방정식을 적분하면,

$$\int_{w_f}^{w_R} dw = \frac{\tau_e \gamma_f}{G_m} \int_{r_f}^R \frac{dr}{r} \quad (3)$$

이 되고 그 결과는 식 (4)와 같이 된다.

$$w_R - w_f = \frac{\tau_e \gamma_f}{G_m} \ln(R/r_f) \quad (4)$$

그리고 Fig. 2(b)에서의 Upper Bound 및 Lower Bound

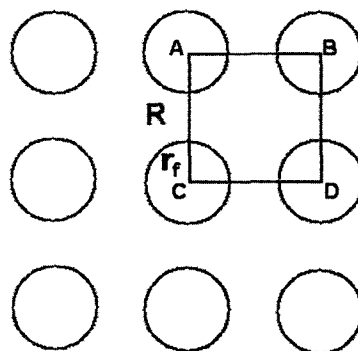


Fig. 3 Fiber packing model in the matrix. Fibers show square-packed arrangement.

는 이웃한 보강재와의 상호작용과 관계된다. 한편,  $\frac{R}{r_f}$ 의 값은 보강재 배열에 좌우된다. Fig. 3에서처럼 정사각형 배열을 고려하면 정사각형 ABCD의 면적은  $R^2$ 이고, 사분원의 합이 하나의 완전한 보강재와 같다. 따라서, 영역비와 같은 보강재들의 체적함유율  $V_f = \frac{\pi r_f^2}{R^2}$ 이다. 그러므로 식 (5)와 같은 식이 성립된다.

$$\ln\left(\frac{R}{r_f}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\pi}{V_f}\right) \quad (5)$$

유사한 방법으로 Fig. 1과 같은 정육각형 배열에 대해서는

$$\ln\left(\frac{R}{r_f}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}V_f}\right) \quad (6)$$

이 되며 두 결과의 차이는 매우 작다. 예를 들어,  $V_f=0.50$ 에 대해서 정사각형 배열은  $\ln\left(\frac{R}{r_f}\right)$  값이 0.919, 정육각형 배열은  $\ln\left(\frac{R}{r_f}\right)$  값이 0.991이다. 여기서 다음과 같은 식이 성립한다.

$$\ln\left(\frac{R}{r_f}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{P_f}{V_f}\right) \quad (7)$$

단, Packing Factor  $P_f = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ 이다. 이 때 식 (7)을 식 (4)에 대입하여 정리하면

$$\tau_e = \frac{E_m (w_R - w_f)}{(1 + \nu_m) r_f \ln (P_f / V_f)} \quad (8)$$

이 된다. 단,  $G_m = \frac{E_m}{2(1 + \nu_m)}$  이다. 여기서  $\tau_e$ 는 보강재와 모재의 경계면에서의 표면 전단응력이다. 이 전단응력과 보강재내의 수직응력 사이에는 다음과 같은 지배방정식이 존재한다<sup>(4)</sup>.

$$\frac{d\sigma_f}{dz} = -\frac{2\tau_e}{r_f} \quad (9)$$

식 (8)을 식 (9)에 대입하면,

$$\frac{d\sigma_f}{dz} = -\frac{2E_m (w_R - w_f)}{(1 + \nu_m) r_f^2 \ln (P_f / V_f)} \quad (10)$$

이다. 보강재의 변위  $w_f$ 와 보강재의 변형률과의 관계는 다음과 같이 된다.

$$\epsilon_f = \frac{dw_f}{dz} \quad (11)$$

따라서

$$\frac{dw_f}{dz} = \frac{\sigma_f}{E_f} \quad (12)$$

여기서  $r=R$  일 때,  $\frac{dw_R}{dz} = \epsilon_c$  라 가정하며, 식 (10)을 미분한 후,  $\frac{dw_R}{dz}$  및  $\frac{dw_f}{dz}$  을  $\epsilon_c$  및  $\epsilon_f$ 로 각각 표현하면 식 (13)으로 유도된다.

$$\frac{d^2\sigma_f}{dz^2} = -\frac{2E_m (\epsilon_c - \sigma_f / E_f)}{(1 + \nu_m) r_f^2 \ln (P_f / V_f)} \quad (13)$$

여기서, 무차원수  $n$ 을 식 (14)와 같이 두면 다음과 같다.

$$n^2 = \frac{2E_m}{E_f (1 + \nu_m) \ln (P_f / V_f)} \quad (14)$$

따라서 식 (14)를 식 (13)에 대입하면 식 (15)와 같이 정리된다.

$$\frac{d^2\sigma_f}{dz^2} = -\frac{n^2}{r_f^2} (\sigma_f - E_f \epsilon_c) \quad (15)$$

이의 해를 구하면

$$\sigma_f = E_f \epsilon_c + A \sinh \left( \frac{nz}{r_f} \right) + B \cosh \left( \frac{nz}{r_f} \right) \quad (16)$$

이 된다. 여기서 기존의 SLT에 의하면 경계조건을  $z = \pm l$  일 때  $\sigma_f = 0$ 으로 설정하여 상수  $A$ 와  $B$ 를 구하면  $A = 0$ 이고,  $B = -\frac{E_f \epsilon_c}{\cosh(ns)}$ 이다. 단,  $s = \frac{l}{r_f}$  (보강재의 종횡비)이다. 이를 식 (16)에 대입하여 정리하면 식 (17)이 유도된다.

$$\sigma_f = E_f \epsilon_c \left\{ 1 - \frac{\cosh (nz/r_f)}{\cosh (ns)} \right\} \quad (17)$$

이를 미분하고 그 결과에  $\frac{r_f}{2}$ 를 곱하면 식 (9)에서 다음과 같은  $\tau_e$ 값이 나온다.

$$\tau_e = \frac{n E_f \epsilon_c \sinh (nz/r_f)}{2 \cosh (ns)} \quad (18)$$

기존의 연구<sup>(4)</sup>에서는 이 모델의 단점을 개선하기 위해 가상의 섬유를 연속섬유와 같이 연장시킴으로서 Closed Form의 해를 구한바 있다. 그러나 그 식의 전개가 다소 복잡해져서 재료설계에 응용시 다소 계산시간을 요하므로 이와 같은 MSLT를 사용하지 않고 섬유단의 응력집중계수(SCF)를 적절히 산정하여 이용하면 더욱 편리하고 단순화 될 것이다. 이 때 SCF에 영향을 주는 여러 인자중 가장 민감한 변수인 탄성계수비 (Modulus Ratio ;  $E_i = E_f/E_m$ )의 함수로만 정의를 해 주면 이를 유한요소해석(FEA) 결과<sup>(8)</sup>와 고려하여 다음과 같은 식을 제시할 수 있다.

$$SCF = \sqrt{\frac{E_f}{E_m}} \quad (19)$$

Fig. 4는 단섬유 모델에서의 하중주기 전 상태, 하중을 가한 상태 및 보강재와 모재의 경계면에서의 전단응력과 보강재 응력을 묘사한 것이다. 여기서 기존의 SLT에서는 모재에서 보강재 단을 가로질러 전달되지는 않는다고 가정하였다. 즉, 식 (16)에서 경계조건을  $z = \pm l$  일 때  $\sigma_f = 0$ 로

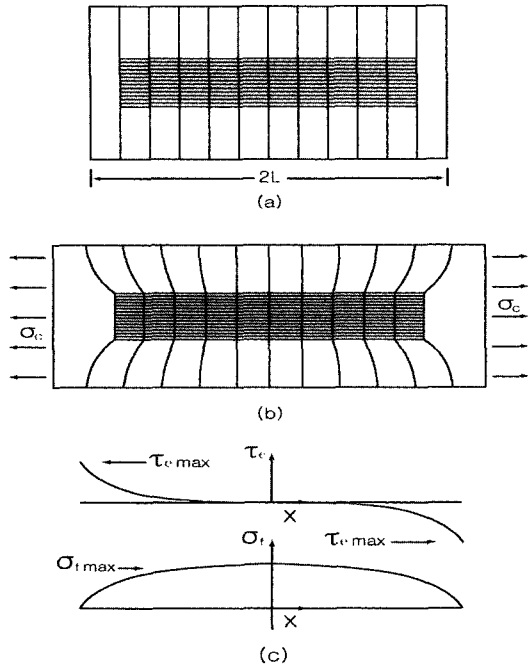


Fig. 4 Single fiber composite element for SLT (a) unstressed, (b) stressed (c) shows the fiber/matrix interfacial shear stress and fiber internal stress for elastic stress transfer

설정하였다. 그러나 이는 단섬유의 경우 비현실적인 가정이므로 본 논문에서는 보강재 단을 가로지르는 응력 전달을 고려하여 식 (20) 같이 유도할 수 있다.

$$\sigma_i = (SCF)E_m \epsilon_c \quad \text{for } z = \pm l \quad (20)$$

이 때 보강재 단에서의 응력을 편의상 Interfacial stress  $\sigma_i$ 로 하고 정리하면 다음과 같이 된다.

$$\sigma_i = \sqrt{E_f E_m} \epsilon_c \quad (21)$$

본 논문에서는 기존 경계조건을 수정함으로써 보강재 단에서 집중응력이 전달됨을 고려한 신전단지연이론(New Shear Lag Theory : NSLT)을 제시하고자 한다. 즉,  $z = \pm l$  일 때  $\sigma_f = \sigma_i$ 로 두고 구하면  $A = 0$ ,  $B = \frac{E_f}{\cosh(ns)}$  ( $\sqrt{\frac{E_m}{E_f}} - 1$ )  $\epsilon_c$  이 된다. 따라서 이 결과를 식 (16)에 대입하여 정리하면 식 (22)와 같이 된다.

$$\sigma_f = E_f \left\{ 1 + \left( \sqrt{\frac{E_m}{E_f}} - 1 \right) \times \frac{\cosh(nz/r_f)}{\cosh(ns)} \right\} \epsilon_c \quad (22)$$

이를 미분하고 그 결과에  $\frac{r_f}{2}$ 를 곱하면 식 (9)에서 다음과 같은  $\tau_e$ 값을 구할 수 있다.

$$\tau_e = \frac{n E_f (1 - \sqrt{E_m/E_f}) \sinh(nz/r_f)}{2 \cosh(ns)} \epsilon_c \quad (23)$$

### 3. 결과 및 고찰

위에서 유도된 결과식 (22) 및 (23)의 정확성을 검증하기 위하여 실제 수치를 대입해 도출된 결과를 타이론의 결과 및 유한요소해석(FEA) 결과와 동시에 비교해 보았다. 이때 적용한 재료는 Al 2124를 기지로 하고, 보강재는 SiC Whisker로 하였으며 축방향의 인장하중을 가하였다. 이들의 대표치는 다음과 같다. 즉,  $E_m = 70\text{GPa}$ ,  $E_f = 480\text{GPa}$ ,  $\nu_m = 0.33$  으로 적용하였다<sup>(4)</sup>. 또,  $r_f = 1$ ,  $s = 4$ ,  $P_f = 2\pi/\sqrt{3}$ 로 하고 이 조건하에서 SLT, MSLT, FEA 및 본 논문의 제안 모델인 NSLT의 해석을 각각 수행하였으며  $V_f = 0.2$ ,  $n = 0.2751$ 의 값을 사용하였다.

Fig. 5 및 6는 SLT, MSLT, FEA 및 NSLT에 대한 0.1%의 변위로 하중을 가한 경우의 해석 결과이다. Fig. 5는 화이버의 내부응력을 나타낸다. 앞에서 기술한대로 SLT의 계

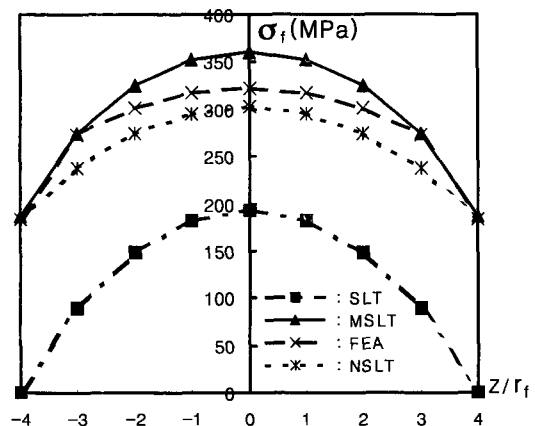


Fig. 5 Fiber internal stress for elastic stress transfer

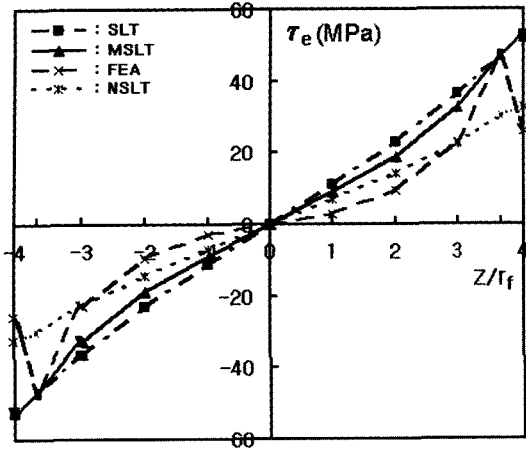


Fig. 6 Fiber/Matrix interfacial shear stress for elastic stress transfer

산결과는 화이버 양단에서 0이 되며 이는 기존이론(SLT)에서 하중전달을 무시하는 가정을 전제로 했기 때문에 나타나는 당연한 결과라 볼 수 있으며, 기존의 개선된 모델인 MSLT의 결과는 매우 큰 응력이 전달됨을 보여주고 있다. 본 논문의 제안모델인 NSLT의 결과는 FEA 결과보다 약간 낮은 화이버 응력을 보여주고 있다. 즉, MSLT의 결과와 NSLT의 결과 사이에 FEA 결과가 존재함을 알 수 있다.

Fig. 6은 화이버/모재 경계면에서의 전단응력을 나타낸다. 이 그림에서 알 수 있듯이 SLT, MSLT, FEA 및 NSLT의 모든 결과가 큰 차이를 보이고 있지는 않으나, 본 논문의 제안모델인 NSLT의 결과가 FEA 결과와 가장 잘 일치되는 것을 알 수 있다. 이와 같은 결과식을 이용하여 불연속 섬유 강화 복합체의 응력해석에 유용하게 적용될 것으로 기대된다.

#### 4. 결론

이 논문에서는 단섬유의 복합강화효과를 계산하기 위한 강화재 응력 및 강화재/모재의 경계면 전단응력 계산 방법에 관하여 기존의 SLT의 문제점을 분석하고 이를 개선하여 단순화된 식 NSLT를 유도하였으며 결론은 다음과 같다.

- (1) 모재에서 단섬유로의 응력전달에 있어서 영향을 주는 주요 인자는 보강재의 종횡비, 섬유함유율 및 탄성계수비를 들 수 있으며 이 3가지 인자중 가장 민감한 변수는 탄성계수비이다.

- (2) 응력집중계수를  $SCF = \sqrt{\frac{E_f}{E_m}}$ 로 제안하여 화이버 단의 응력을 새로운 값으로 대입한 후 예측한 후 기존의 SLT를 개선하여 빠른 계산을 할 수 있는 해를 구할 수 있었다.
- (3) 유도된 식(NSLT)을 이용하여 화이버의 응력 및 화이버/모재 경계면에서의 전단응력을 계산하여 보았으며 FEA 결과와 매우 유사한 결과를 얻을 수 있었으며 복합강화효과가 어느 정도로 발생하는지 정량적으로 계산하였다.

#### 참고 문헌

- (1) Agarwal, B. D., Lifshitz, J. M. and Broutman, L. J., 1974, "Elastic-Plastic Element Analysis of Short Fiber Composites", *Fiber Science and Technology*, Vol. 7, pp. 45~62.
- (2) Agarwal, B. D. and Broutman, L. J., 1980, *Analysis and Performance of Fiber Composites*, Johns Wiley and Sons, New York, pp. 71~104.
- (3) Cox, H. L., 1952, "The Elasticity and Strength of Paper and Other Fibrous Materials", *British J. of Applied Physics*, Vol. 3, pp. 72~79.
- (4) Kim, H. G., 1994, "Stress Transfer in Shear Deformable Discontinuous Composites", *Trans. of KSME*, Vol. 8, No. 4, pp. 475~484.
- (5) Nardone, V. C. and Prewo, K. M., 1986, "On the Strength of Discontinuous Silicon Carbide Reinforced Aluminum Composites", *Scripta Metallurgica*, Vol. 20, pp. 43~48.
- (6) Nardone, V. C., 1987, "Assessment of Models used to Predict the Strength of Discontinuous Silicon Carbide Reinforced Aluminum Alloys", *Scripta Metallurgica*, Vol. 21, pp. 1313~1318.
- (7) Taya, M., and Arsenault, R. J., 1987, "A Comparison between a Shear Lag Type Model and an Eshelby Type Model in Predicting the Mechanical Properties of Short Fiber Composite", *Scripta Metallurgica*, Vol. 21, pp. 349~354.
- (8) Kim, H. G., 1998, "Analytical Study on the Elastic-Plastic Transition in Short Fiber Reinforced Composites", *KSME Int. J.*, Vol. 12, No. 2, pp. 257~266.

- (9) Kim, H. G. and Chang, I., 1995, "Analysis of the Strengthening Mechanism Based on Stress-Strain Hysteresis Loop in Short Fiber Reinforced Metal Matrix Composites", *KSME Int. J.*, Vol. 9, No. 2, pp. 197~208.
- (10) Kim, H. G., 1997, "An Investigation of the Thermoelastic Behavior in Short Fiber Reinforced Composite Materials", *Trans. of KSMTE*, Vol. 6, No. 3, pp. 89~95.
- (11) Ryu, S. R. and Lee, D. J., 2001, "Effects of Short Fiber End Shape on Tensile Properties of Reinforced Rubber", *Trans. of KSME-A*, Vol. 25, No. 6, pp. 1023~1030.
- (12) Kim, H. G. and Choi, C. Y., 2003, "A Study on the Tensile Strength of Glass Woven Fiber Reinforced PET Composites", *Trans. of KSMTE*, Vol. 12, No. 1, pp. 45~49.