

## 철도차량 구조물의 확률론적 피로수명 평가

구 병 춘\* · 서 정 원

한국철도기술연구원 차량기계연구본부

### Probabilistic Fatigue Life Evaluation of Rolling Stock Structures

Byeongchoon Goo\* · Jungwon Seo

Korea Railroad Research Institute, 374-1 Wolam-dong, Uiwang-city, Gyeonggi-do 437-050, Korea

(Received 7 March 2003 / Accepted 4 July 2003)

**Abstract** : Rolling stock structures such as bogie frame and car body play an important role for the support of vehicle loading. In general, more than 25 years' durability is needed for them. A lot of study has been carried out for the prediction of the fatigue life of the bogie frame and car body in experimental and theoretical domains. One of the new methods is a probabilistic fatigue life evaluation.

The objective of this paper is to estimate the fatigue life of the bogie frame of an electric car, which was developed by the Korea Railroad Research Institute (KRRI). We used two approaches. In the first approach probabilistic distribution of S-N curve and limit state function of the equivalent stress of the measured stress spectra are used. In the second approach, limit state function is also used. And load spectra measured by strain gauges are approximated by the two-parameter Weibull distribution. Other probabilistic variables are represented by log-normal and normal distributions. Finally, reliability index and structural integrity of the bogie frame are estimated.

**Key words** : Limit state function(한계 상태 방정식), Miner's rule(마이너의 법칙), Monte Carlo simulation(몬테카를로 시뮬레이션), Reliability index(신뢰성 지수), Structural integrity(구조 건전성)

#### Nomenclature

$Cov(X_i, X_j)$  : covariance of  $X_i$  and  $X_j$

$g$  : limit state function

$P_f$  : probability of failure

$\beta$  : reliability index

$\mu_G$  : mean

$\sigma_G^2$  : variance

#### 1. 서론

그동안 구조물의 피로 수명평가 연구는 주로 결

정론적(deterministic) 방법이 사용되어 오고 있다. 그러나 수명평가에 관여하는 대부분의 변수들은 일정한 값을 갖기보다는 넓은 범위에 걸쳐 확률적으로 분포되어 있어 결정론적 방법으로 현상을 제대로 기술하기에는 적절하지 않다고 할 수 있다. 최근 이러한 변수의 분포특성을 고려한 확률론적 평가기법이 구조물의 건전성 평가나 피로수명평가 등의 분야에 도입되어 활발히 연구되고 있다. Shin<sup>1)</sup>과 Kim 등<sup>2)</sup>은 철도 강 교량의 잔존피로수명을 신뢰성 이론을 적용하여 평가였고, Song과 Shin<sup>3)</sup> 선체구조물의 피로수명 해석에서 변동응력의 분포가 와이불(Weibull) 분포를 따른다고 가정하여 Miner-Palmgren의 피로누적손상을 유도하여 피로수명을

\*To whom correspondence should be addressed.  
bcgoo@krri.re.kr

예측하는 방법을 제시하였다. Kwak 등<sup>4)</sup>은 압력 배관의 확률론적 구조건전성을 몬테카를로 시뮬레이션 기법을 적용하여 평가하였고 Harlow와 Wei는<sup>5)</sup> 알루미늄 합금의 부식피로수명 예측에 확률론적 방법을 적용하고 있다. 철도차량의 대차와 차체의 주요 구조물은 25년 이상 사용이 가능하도록 요구되고 있어 수명평가기술의 개발이 필요하다. 철도차량 구조물의 노화의 주요 원인은 부식과 외부의 작용 하중이라 할 수 있다. 철도차량 구조물의 피로특성은 국내외의 여러 관련규격에 의한 시험을 거쳐 평가되고 있지만 피로수명평가에 대해서는 아직도 많은 연구를 필요로 하는 것이 현실이다.

본 연구에서는 확률론적 평가방법으로 기존의 S-N선도와 한계상태방정식 (Limit state function)을 이용하는 방법에 대하여 살펴보고 이들 방법에 몬테카를로 시뮬레이션 기법과 FORM (First Order Reliability Method)을 적용하여 실제 철도차량 구조물의 하나인 대차에 대해 수명평가를 수행하였다.

## 2. 확률론적 수명평가방법

### 2.1 신뢰성 지수

정확한 파손확률의 수학적 해석을 위해서는 각각의 확률변수  $X_1, X_2, \dots, X_n$ 로 구성된 결합확률밀도함수(joint probability density function)를 구하여 이를 적분하여야 한다. 그러나 결합확률밀도함수의 유도 및 적분이 난해한 경우가 대부분으로 해석이 용이하지 않다. 결합확률밀도함수가 주어진 경우 파손기준을 적용한 한계상태방정식(Limit state function)  $g(X)$ 를 수식으로 구성한다. 수식의 구성은 한계상태방정식이 0보다 크면 파손이 발생하지 않으며, 음의 값을 가지면 파손이 발생하도록 한다. 따라서 파손확률의 계산은 다음의 수식과 같이 한계상태방정식이 음의 값을 갖는 범위에 대한 적분을 수행하면 된다.

$$g(X_1, X_2, \dots, X_n) > 0 \quad (\text{safe}) \quad (1)$$

$$g(X_1, X_2, \dots, X_n) < 0 \quad (\text{unsafe}) \quad (2)$$

$$P_f = P\{g(X_1, X_2, \dots, X_n) < 0\} \quad (3)$$

여기서 확률변수  $X_i$ 는 항복강도, 탄성계수, 피로손상률 등이 될 수 있으며, 조건을 나타내는 한계상

태방정식  $g(X)$ 는 파괴역학 및 재료역학의 조건이 될 수 있다. 이러한 수식의 구성 및 적분의 계산이 가능하다면 FORM(First Order Reliability Method), SORM(Second Order Reliability Method)의 적용없이 파손확률의 예측이 가능하다.

반면 수식의 구성 및 적분이 용이하지 않은 경우 파손확률의 근사값을 얻기 위해 FORM, SORM을 많이 사용하고 있다. 파손확률의 근사값 계산시 Taylor 급수전개를 사용하며, Taylor 급수의 1차항만을 사용하는 경우 FORM, 2항까지 사용하면 SORM이라 한다. 위의 과정을 수식으로 나타내면 다음과 같다.

$$G = g(X) = g(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (4)$$

한계상태방정식에 대해 Taylor 급수의 1차항만을 사용하는 FORM의 경우에는 새로운 확률변수  $G$ 에 대한 평균( $\mu_G$ )과 분산( $\sigma_G^2$ )이 다음과 같이 간단한 식으로 주어진다.

$$\mu_G = g(\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n}) \quad (5)$$

$$\sigma_G^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial X_i} \frac{\partial g}{\partial X_j} Cov(X_i, X_j) \quad (6)$$

여기서,  $Cov(X_i, X_j)$ 는  $X_i$ 와  $X_j$ 의 공분산이다.

한계상태방정식  $g(X)$ 에 대한 파괴확률은 새로운 확률변수  $G$ 가 0보다 작을 확률이므로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$P_f = P(G \leq 0) = \Phi\left(\frac{0 - \mu_G}{\sigma_G}\right) = \Phi\left(-\frac{\mu_G}{\sigma_G}\right) \quad (7)$$

여기서 한계상태방정식의 표준편차에 대한 평균의 비인  $\mu_G/\sigma_G$ 를 신뢰도 지수(Reliability Index)라 하며  $\beta$ 로 정의하며  $\Phi$ 는 표준정규분포 누적확률밀도함수이다. 파괴확률  $P_f$ 와는 다음과 같은 관계가 있다.

$$P_f = \Phi(-\beta) \quad \text{여기서 } \beta = \frac{\mu_G}{\sigma_G} \quad (8)$$

FORM은 일계이차모멘트법으로 한계상태방정식을 확률변수의 평균점에서 Taylor 전개하여 근사한 후 일차항까지만 취하고, 신뢰도지수 산정시 평균에 대한 확률밀도함수의 이차모멘트인 분산까지

고려하는 방법이다. 이 방법은 한계상태방정식의 구성방법에 따라 파손확률에 차이가 발생할 수 있음에 유의할 필요가 있다.

### 2.2 한계상태방정식

해석에 사용된 S-N 선도는 식 (9)와 같이 파손확률 50% 선도이다.

$$NS^m = A \quad (9)$$

여기서  $m$  = S-N 곡선의 기울기

$A$  : 재료상수, S-N 곡선의 N축과의 교점

확률론적 수명평가에서 하중이력은 등가응력으로 처리하거나 통계적 분포를 이용하여 처리할 수 있다. 먼저 등가응력을 이용하여 한계상태방정식을 구성하는 경우 하중이력에 대한 등가응력은 식 (10)과 같이 정의할 수 있다.

$$S_e = \sqrt[m]{\sum_{i=1}^{n_b} f_i S_i^m} \quad (10)$$

여기서  $S_e$  : Miner의 평균 등가응력

$S_i$  : 블록  $i$ 의 응력

$f_i$  : 전체 사이클 수에 대한 블록  $i$ 에 해당하는 응력 사이클 수의 비율

$n_b$  = 응력 블록의 수

식 (9)와 (10)으로부터 한계상태방정식(Limit state function)은 식 (11) 또는 식 (12)와 같이 쓸 수 있다.<sup>6)</sup>

$$g1 = \frac{\Delta \cdot A}{k_s^m S_e^m} - N_i \quad (11)$$

또는

$$g1' = \log(\Delta) + \log(A) - m \log(S_e) - m \log(k_s) - \log(N_i) \quad (12)$$

여기서  $\Delta$  : 피로손상률(fatigue damage ratio)

$k_s$  : 피로 응력 불확실도

$N_i$  : 수명 주기 (300백만 km) 동안 대차에 작용하는 총 하중 사이클의 수

식 (11) 혹은 (12)에서 확률변수로는 등가응력 ( $S_e$ ), 피로손상률( $\Delta$ ), S-N 선도의 계수( $A$ ), 등가응력에 대한 불확실도( $k_s$ )로서 4가지이다. 이러한 확률변수 중  $S_e$ ,  $\Delta$ ,  $A$ ,  $k_s$ 는 대수 정규 분포, 혹은 정규분

포로 가정할 수 있고 이로부터 신뢰성지수  $\beta$ 와 파손확률을 구할 수 있다.

한편 하중이력을 확률분포로 처리하여 한계상태방정식을 유도하는 경우의 하나로서 발생응력을 Weibull 분포로 나타내면 식 (13)과 같이 표현할 수 있다.

$$f(S) = \frac{a}{b} \left(\frac{S}{b}\right)^{a-1} \exp\left(-\frac{S}{b}\right)^a \quad (13)$$

여기서  $a$  : 형상모수,  $b$  : 척도모수

아래 Fig. 1은 한국철도기술연구원 (KRRRI)이 개발한 4량 1편성의 표준전동차의 외관을, Fig. 2는 대차에서 측정된 스트레인으로부터 구한 응력을, Fig. 3는 응력을 레인폴드 카운팅으로 처리하여 응력확률밀도를 구하고 이를 Weibull 분포로 근사시킨 결과를 보여준다.

Miner-Palmgren의 누적피로손상  $D$ 는 식 (14)와 같이 확률분포로 표시할 수 있다.

$$D = \sum \frac{n_i}{N_i} = \int_0^m \frac{N_i f(S)}{N(S)} dS = \frac{N_f}{A} \int_0^m S^{mf(S)} dS \quad (14)$$

여기서,  $f(S)$  :  $S$ 에 대한 확률밀도함수(probability density function)

$N(S)$  :  $S$ 에 대한 반복수

$N_f$  : 전체응력 사이클의 수 (Total number of stress cycles)

누적피로손상  $D$ 는 식 (9)와 식 (14)의 조합으로 최종적으로 다음과 같이 표현된다.<sup>3)</sup>

$$D = \frac{N_f}{A} \frac{S_0^m}{(\ln N_0)^{\frac{m}{a}}} \Gamma\left(\frac{m}{a} + 1\right) \quad (15)$$

이로부터 한계 상태방정식은 식 (16)과 같이 표현

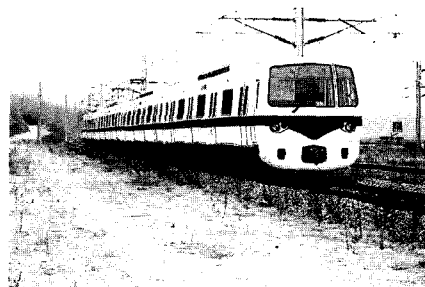


Fig. 1 Standard electric car developed by KRRRI

할 수 있다.

$$g_2 = \Delta - \frac{N_f}{A} \frac{(k_s S_0)^m}{(\ln N_0)^{\frac{m}{a}}} \Gamma\left(\frac{m}{a} + 1\right) \quad (16)$$

여기서 초과응력( $S_0$ )의 불확실성을 나타내기 위하여 불확실도 계수  $k_s$ 를 추가하였다. 식 (16)의 한계상태방정식(Limit state function)에서 확률변수는 초과응력  $S_0$ , 피로손상을  $\Delta$ , S-N 선도의 계수, A 및 등가응력에 대한 불확실도,  $k_s$ 가 된다.

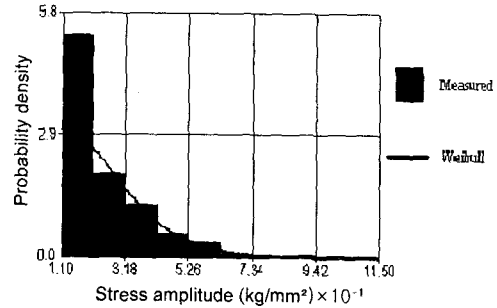


Fig. 3 Weibull distribution of the stress

### 3. 한계 상태방정식의 해석

식 (11) 혹은 (12)로 주어지는 한계 상태방정식으로부터 피로수명을 해석하는 방법으로 수학적인 방법과 몬테카를로 시뮬레이션이 사용된다. 몬테카를로 시뮬레이션은 해석대상에 제한이 없으나 많은 반복계산을 수행하여야 하는 단점이 있다. 본 연구에서는 Fig. 1에서 보여주는 한국철도연구원이 개발한 표준전동차의 대차에 대해 위에서 언급한 두 가지 방법을 적용하여 대차의 피로수명을 평가해 보고자 한다.

#### 3.1 몬테카를로 시뮬레이션

몬테카를로법(Monte Carlo Method)은 계산문제에 포함되는 미지량의 파라미터를 갖는 확률변수를 가정하여 샘플링의 기법을 이용, 랜덤한 표본으로부터 추출된 통계량을 구해 근사적으로 해를 구하는 방법이다. 몬테카를로법은 수학, 통계, 공학 등 다른 학문에서도 널리 사용되는 시뮬레이션 기법으로 원리는 N회의 실험에서 M회의 파손이 발생하였을 경우 파손확률,  $P_f$ 를 M과 N의 비로 정의한다.

$$P_f = \frac{M}{N} \quad (17)$$

각 시행마다 확률분포 또는 표본공간에서 데이터를 추출하여 해석을 수행하여 파손확률을 계산한다.

구조물의 파손에 대한 문제를 취급하는 경우, 확률변수  $x$ 에 대한 파손의 기준값을  $c$ 라고 한다면, 파손확률  $P(x > c)$ 는  $x$ 가  $c$ 보다 클 확률로서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

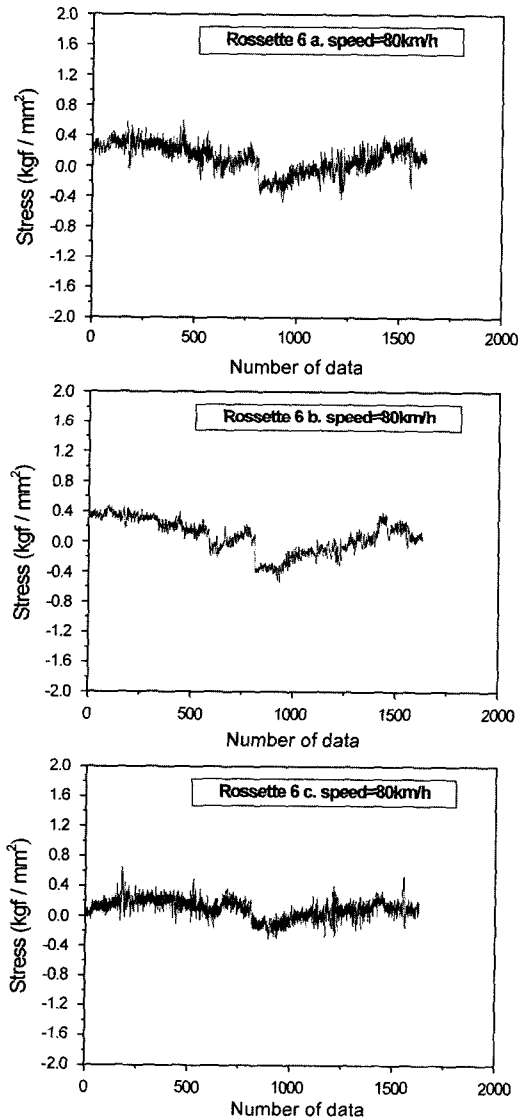


Fig. 2 Stress measured on the bogie frame

$$P(x > c) = \int_c^{\infty} f(x) dx \quad (18)$$

여기서  $f(x)$ 를 응력 혹은 하중의 확률밀도함수라고 생각할 수 있다.

위의 식은 다음과 같은 식으로 표현이 가능하다.

$$P(x > c) = \int_{-\infty}^{\infty} I_c(x) f(x) dx \quad (19)$$

$$I_c(x) = \begin{cases} 1 & (x > c) \\ 0 & (x \leq c) \end{cases} \quad (20)$$

위의 식을 몬테카를로법으로 구하기 위해서는 실제  $f(x)$ 에 따라 임의로  $x$ 를 발생시켜 다음 식을 평가하면 된다.

$$P(x > c) = \frac{\sum_{i=1}^N I_c(x_i)}{N} \quad (21)$$

여기서  $N$ 은 수행횟수,  $x_i$ 는  $i$ 번째 수행으로 발생하는  $x$ 의 값이다. 위 식은 수행횟수  $N$ 이 충분히 클 경우, 근사적으로 성립한다. 따라서 엄밀해를 구하기 위해서는 매우 많은 몬테카를로 시뮬레이션을 수행하여야 한다.

여기서는 한계상태방정식 식 (11)을 사용하여 몬테카를로 시뮬레이션을 적용한다. 각각의 확률변수에 대해 컴퓨터를 이용하여 난수를 발생시킨 후 상태방정식에 대입한다. 이때 상태방정식이  $g_1 < 0$  일 경우에 파손된 상태이므로 이를 카운팅한다. 파손확률은 총 시행횟수에 대한 파손횟수의 비가 된다. 즉 1,000,000 번 수행 후 파손횟수가 10번이면, 파손확률은  $P_f = 10/1,000,000$ 이 된다. 본 해석에서는 시행횟수 1000만번을 적용하였다. 확률변수  $S_e$ ,  $\Delta$ ,  $A$ ,  $k_s$ 의 평균과 변동계수(C.O.V.)는 Table 1과 같다. 시뮬레이션의 결과는 Fig. 4에 FORM의 결과와 함께 나타내었다.

Table 1 Used values of the parameters

Random variable	Mean	COV*	Distribution type
$S_e$	0.38	0.2	Log-normal
$\Delta$	1.0	0.4	Log-normal
$A$	7.64E9	0.11	Log-normal
$k_s$	1	0.2	Normal
$m$	3.8		

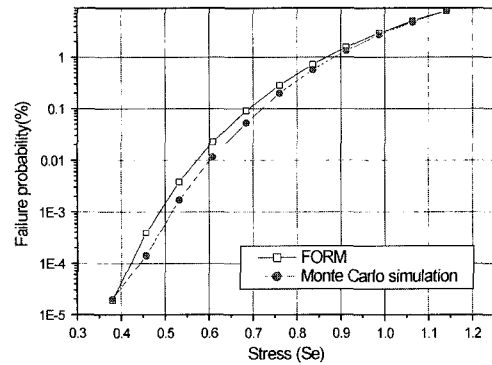
\* Coefficient of variation = standard deviation / mean

### 3.2 등가응력을 사용한 FORM

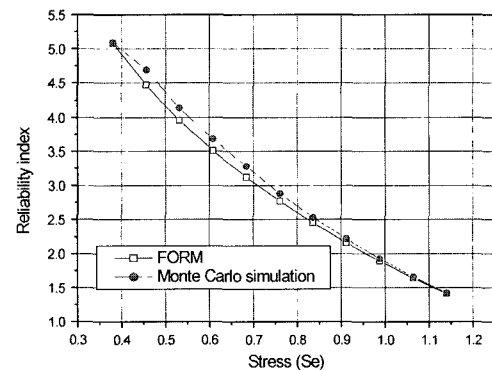
FORM에서는 앞에서 설명한 바와 같이 테일러 급수의 일차항만을 사용하여 식 (5), (6), (7)로부터 파손확률을 구할 수 있다.

이들 값을 사용하여 신뢰성지수  $\beta$ 와 파손확률을 구하면 그림 4와 같다. 등가응력  $S_e=0.38$ 일 때 신뢰성 지수  $\beta=5.08$ 이고 파손확률은  $1.87E-05\%$ 이다.

한편 몬테카를로 시뮬레이션법에 의한 파손확률은 FORM에 의한 값보다 약간 작은 값을, 신뢰도 지수는 약간 큰 값을 예측하고 있으나 전체적으로는 거의 일치함을 알 수 있다.



(a) Relation between failure probability and equivalent stress obtained by the FORM and Monte Carlo simulation



(b) Relation between reliability index and equivalent stress obtained by the FORM and Monte Carlo simulation

Fig. 4 Failure probability and reliability index

## 4. 결론

본 연구에서는 등가응력과 Weibull 분포를 이용하여 한계상태방정식을 구성하고 FORM과 Monte

Carlo 시뮬레이션을 적용하여 표준전동차 대차 구조물의 피로수명을 평가하였다. FORM는 Monte Carlo 시뮬레이션보다 약간 큰 파손확률을 예측한다. 대차 구조물에 대한 피로수명 평가 결과 3백만 km (12만 km/년 × 25년) 주행에 대해 파손확률은  $1.9 \times 10^{-5}$  % 정도로 판정되었다.

수명평가에 관계하는 4가지 확률변수 중에  $\sigma_{eq}$ ,  $\Delta$ , A는 대수 정규 (Log-normal) 분포로, ks는 정규 분포로 가정하였다. 수명평가의 신뢰성을 향상시키기 위해서는 이들 변수의 확률분포에 대한 연구가 필요하다고 판단된다.

## 후 기

본 연구는 과학기술부의 국가지정연구실사업 (NRL)의 일환으로 수행되었습니다. 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

## References

- 1) J. C. Shin "Fatigue Reliability Analysis for Steel Railway Bridges," Kores Science and Engineering Foundation [881-1301-002-2], 1990.
- 2) S. H. Kim, S. W. Lee, S. H. Mha, H. J. Kim, "Remaining Fatigue Life Evaluation of Steel Railroad Bridge," Korea Society of Steel Construction, Vol.11, No.4, pp.329-338, 1999.
- 3) J. Y. Song, C. H. Shin, "A Fatigue Strength Analysis Method for Marine Structures," Computational Structural Engineering Institute, Vol.10, No.3, pp.7-14, 1997.
- 4) S. L. Kwak, J. S. Lee, Y. J. Kim, Y. W. Park, "Probabilistic Integrity Assessment of CANDU Pressure Tube for the Consideration of Flaw Generation Time," Proceedings of the KSME 2001 Fall Annual Meeting A, pp.155-160, 2001.
- 5) D. Gray Harlow, Robert P. Wei, "Probability Approach for Prediction of Corrosion and Corrosion Fatigue Life," AIAA Journal Vol.32, No.10, pp.2073-2079, 1994.
- 6) I. A. Assakkaf, B. M. Ayyub, "Reliability based Design for Fatigue of Marine Structures," Third International Workshop on Very Large Floating Structures, University of Hawaii, Honolulu, September 22-24, 1999.