

격자압축법을 이용하여 구성된 격자의 효과적인 격자유연화 방법

홍진태* · 이석렬* · 양동열*

(2003년 5월 15일 접수)

An Effective Mesh Smoothing Technique for the Mesh Constructed by the Mesh Compression Technique

J. T. Hong, S. R. Lee and D. Y. Yang

Abstract

In the rigid-plastic finite element simulation of hot forging processes using hexahedral mesh, remeshing of a flash is important for design and control of the process to obtain desirable defect-free products. The mesh compression method is a remeshing technique which enables the construction of an effective hexahedral mesh in the flash. However, because the mesh is distorted during the compression procedure of the mesh compression method, when it is used in resuming the analysis, it causes discretization error and decreases the convergence rate. Therefore, mesh smoothing is necessary to improve the mesh quality. In this study, several geometric mesh smoothing techniques and optimization techniques are introduced and modified to improve mesh quality. Then, the most adaptive technique is recommended for the mesh compression method.

Key Words : Finite Element Mesh, Remeshing Scheme, Mesh Compression Method, Mesh Optimization, Smoothing

1. 서론

소성가공공정의 하나인 열간단조에서는 의도적으로 플래시를 유발시키도록 설계하여 소재의 흐름을 좋게하고, 압축하중을 줄임으로써 금형마모와 수명을 연장시키는 노력을 한다. 일반적으로, 플래시의 두께가 소재 형상에 비해 매우 얇기 때문에 육면체요소를 이용한 강소성 유한요소해석에서는 플래시의 해석을 위한 격자구성이 매우 까다롭다. 따라서, 국소적으로 격자밀도를 높일

수 있는 방법인 격자압축법⁽¹⁾을 이용하면 플래시 부분에 높은 밀도의 격자가 구성되어, 전체적으로 작은 크기의 요소를 구성하여야 하는 기존의 격자구성 방법보다 매우 효율적인 해석이 가능해진다. 그러나, 격자압축법을 이용한 격자구성 도중, 확장된 형상에서 구성된 격자를 원래의 형상으로 압축하는 과정에서 압축량이 많은 부위의 격자가 심하게 찌그러지기 때문에 해석오차를 줄이기 위하여 격자의 유연화 과정이 필요하다.

기본적으로 알려진 기하학적 격자 유연화 방법

* 한국과학기술원 기계공학과

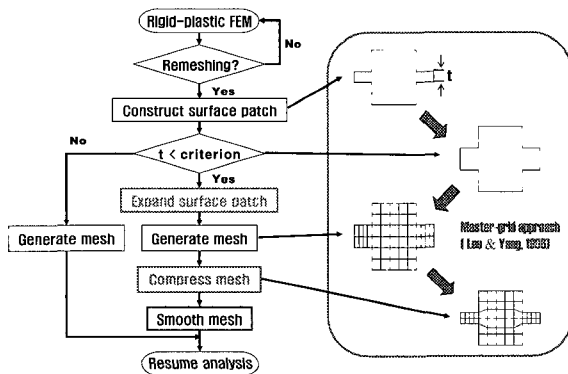
으로는, 등매개(Isoparametric), Laplacian 유연화방법⁽²⁾ 등이 있고, 최근에는 최적화 방법을 이용한 다양한 격자유연화방법들이 제시되고 있으며, 본 연구에서는 요소가 이루는 각을 최적화하는 각도 기준 유연화방법⁽³⁾과, 행렬식을 이용한 최적화 방법중 성능이 좋은 방법으로 알려진 smoothness 유연화 방법⁽⁴⁾을 고려하여 보기로 한다. 위의 유연화 방법들을 이용하여 재배치된 격자를 여러 가지 기준을 이용하여 비교하여 보고, 격자압축법을 이용해 구성된 격자의 특성에 가장 적합한 유연화방법을 알아보기로 한다.

2. 격자유연화 방법

2.1 격자압축법 개요

격자 유연화에 앞서, 격자를 재구성하는 방법인 격자압축법에 대해서 간단히 알아본다. 격자압축법은 플래시가 있는 형상의 격자 재구성 시 Fig. 1 과 같은 과정을 거친다.

Fig. 1 The algorithm for mesh compression



즉, 격자압축법은 격자재구성시 경계면의 기하형상(boundary geometry)을 확장해서 표현한 후에 마스터그리드방법(Master Grid Approach)⁽⁵⁻⁷⁾으로 격자를 구성하고 본래의 형상으로 압축한 후, 격자를 재조정하는 격자재구성 방법이다. 이는, 작고 세밀한 부분의 기술을 위해 전체적인 격자의 크기를 작게 구성하고 해석할 때 발생하는 문제점인 정밀한 해석이 필요 없는 부위까지도 많은 수의 요소를 이용하여 계산하는 기존의 육면체요소 격자재구성 방법의 단점을 해결할 수 있다.

2.2 격자유연화 방법

격자압축법을 거친 격자는 플래시가 나오기 시작하는 부분, rib-web 형상의 곡률이 심한 부분 등에서 요소가 심하게 퇴화되어 있으므로 반드시 격자유연화 과정을 거쳐야 해석에 이용이 가능하다. 특히, 격자압축과정에서 형상 곡률이 심한 부분의 일부 절점들이 형상 표면을 벗어나 요소가 뒤집히거나 엉키는데, 이러한 경우, 유연화방법만으로는 좋은 질을 갖는 요소로 변환시키기가 어렵다. 따라서, 격자유연화 이전에 형상을 벗어난 절점들을 모두 형상 안으로 넣어주면서 요소의 엉킴을 풀어주는 작업(untangling)이 선행되어야 한다. 이 작업 후에 격자유연화 방법을 적용하면 보다 좋은 질의 요소를 구성할 수 있으며 그 내용은 다음과 같다.

Group 1. 요소 엉킴 최소화 (untangling)

격자가 처음부터 뒤집혀 있어 행렬값(jacobian matrix)이 음의 값을 갖고 있으면, 위의 최적화 방법으로는 격자의 유연화가 불가능하다. 따라서, 행렬값이 음인 요소의 절점을 이동시켜 양의 값으로 만들어주기 위해서 다음과 같은 과정을 수행하였다.

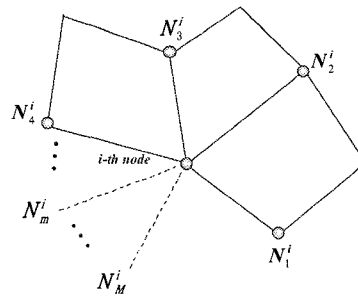


Fig. 2 boundary node set of i-th internal node

Fig. 2 는 내부의 한 절점과 이웃하고 있는 절점간의 관계를 보여준다. 절점번호가 i 인 절점의 위치는 (x^i, y^i) 이다. 이 절점과 이웃하고 있는 절점들을 반시계방향으로 순열시킨다.

$$S^i = \{N_1^i, N_2^i, \dots, N_m^i, \dots, N_M^i\} \quad (1)$$

$$N_{M+1}^i = N_1^i$$

절점 N_m^i 와 N_{m+1}^i 의 위치를 각각 (x_m^i, y_m^i) , (x_{m+1}^i, y_{m+1}^i) 이라 하면, f_m^i 는 식(2)와 같이 정의된다.

$$f_m^i = J_m^i = \begin{bmatrix} e_m^i & e_{m+1}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_m^i - x^i & x_{m+1}^i - x^i \\ y_m^i - y^i & y_{m+1}^i - y^i \end{bmatrix} \quad (2)$$

모든 내부 절점들에 대해 f_m^i 값을 계산하였을 때, 모두 양의 값을 가지면 영킨 격자가 모두 제거되었다는 것을 의미하므로 다음과 같은 최적화 과정을 통해 untangling 을 하였다.⁽⁸⁾

$$\max \left\{ \min \left\{ f_1^i, f_2^i, \dots, f_m^i, \dots, f_M^i \right\} \right\}_{i=1, N} \quad (3)$$

여기서, N 은 절점의 총 개수이다. 최적화는 linear programming 방법으로 수행하였다.

Group 2. 격자유연화 (smoothing)

Scheme 1 : 등매개 (Isoparametric) smoothing

가장 오래되고, 간단한 기하학적 유연화 방법으로, 한 절점의 새로운 위치를 주변 절점들의 평균 위치로 이동하는 방법이다.

$$P_N = \frac{\sum_{i=1}^{N_F} P_i}{N_F} \quad (4)$$

P_N 은 절점의 새로운 좌표, N_F 는 이웃하는 절점의 개수이다.

Scheme 2 : Laplacian smoothing

한 절점의 주변 요소들의 부피에 가중치를 가하여 요소들의 부피가 비슷해지도록, 절점을 이동하는 방법이다.

$$P_N = \frac{\sum_{i=1}^{N_F} V_i^F C_i^F}{\sum_{i=1}^{N_F} V_i^F} \quad (5)$$

P_N 은 절점의 새로운 좌표, V_i^F 는 주변 요소의 부피, C_i^F 는 주변 요소의 중심 좌표이다.

Scheme 3 : Angle-based smoothing

각 절점들이 회전스프링(torsional spring)으로 연결되어있다는 개념으로 한 절점에 연결된 주변 요소들의 스프링 위치에너지가 최소가 되도록 절점들을 이동해 나가는 방법이다.

$$\min E = \min \sum_{i=1}^{2k} \frac{1}{2} K \theta_i^2 \quad (6)$$

θ_i 는 주변 절점들이 이루는 각이며, k 는 주변 절점의 개수이다.

Scheme 4 : Smoothness smoothing

smoothness 범함수는 Brackbill 에 의해 2 차원 격자유연화에 제안되었으며, Jacobian 행렬의 condition number 의 합을 최소화 시킴으로써 유연화 하는 방법이다. Singular Jacobian 행렬을 최대한 억제시킨다는 의미에서, Oddy's metric 과 매우 유사하다.

$$\min f = \min \sum_{m=1}^M \left\{ \frac{1}{2} \|J_m^{-1}\| \|J_m\| \right\} \quad (7)$$

J_m 은 식(2)와 같으며, 최적화 방법은 Hessian 행렬을 구하는 Newton 방법을 사용하였다.⁽⁹⁾

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x_n \\ \Delta y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - H \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f}{\partial y_n} \end{pmatrix} \quad (8)$$

수렴조건은 다음과 같다.

$$\delta_n < 1.0^{-6}, \delta_n = \sqrt{(\Delta x_n)^2 + (\Delta y_n)^2} \quad (9)$$

이를 응용하여 3 차원 격자유연화에도 확장하여 프로그래밍 하였다.

2.3 격자의 질(measure of a mesh quality)

위에서 제시된 방법으로 유연화를 마친 격자의

질은 다음의 두 가지 방법으로 검사하였다.

Measure 1. 이면각 (Dihedral)

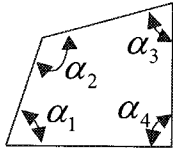


Fig. 3 Definition of a dihedral quality

$$dih = \min\{\sin\alpha_1, \sin\alpha_2, \sin\alpha_3, \sin\alpha_4\} \quad (10)$$

한 요소의 각 절점에서 계산된 이면각 중 가장 작은 각을 그 요소의 이면각으로 결정한다.

Measure 2. 형상 기준 (Shape quality)

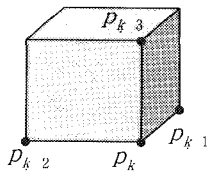


Fig. 4 Definition of a shape quality

$$A_k = \begin{pmatrix} x_{k+1} - x_k & x_{k+2} - x_k & x_{k+3} - x_k \\ y_{k+1} - y_k & y_{k+2} - y_k & y_{k+3} - y_k \\ z_{k+1} - z_k & z_{k+2} - x_k & z_{k+3} - x_k \end{pmatrix}$$

$$\alpha_k = \det(A_k), A_k^T A_k = [\lambda_{ij}^k] \quad (11)$$

$$Q = \frac{24}{\sum((\lambda_{11}^k + \lambda_{22}^k + \lambda_{33}^k)/(\alpha_k^{2/3}))}$$

한 요소가 갖는 단위 부피당 표면적의 비율을 shape quality 로 결정하며, 요소가 정육면체에 가까울수록 최소 표면적이 되므로 Q 가 1에 가까워지고, 퇴화정도가 심할수록 Q 는 0에 가까워진다.

3. 격자유연화 결과

전절에서 제시한 격자유연화 방법들을 이용하여 2 차원 예제와 3 차원 예제에 대하여 테스트

해보았다.

3.1 2 차원 격자유연화

3.1.1 리브웹브 형상

축대칭 단조형상 중 격자압축법의 효과를 잘 파악할 수 있는 리브웹브형상에서 격자압축법을 통해 구성된 격자에 대해 Group2 의 요소영킴최소화를 실행한 후(Fig. 5), Group1 의 방법들을 이용하여 격자유연화한 결과는 Fig.6 과 같다.

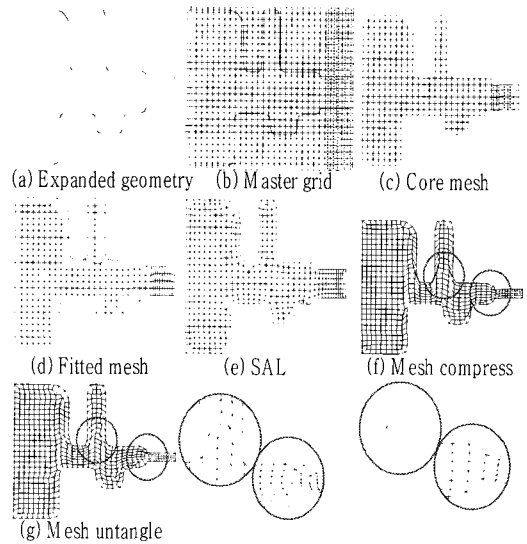


Fig. 5 Mesh constructed by the mesh compression method (rib-web)

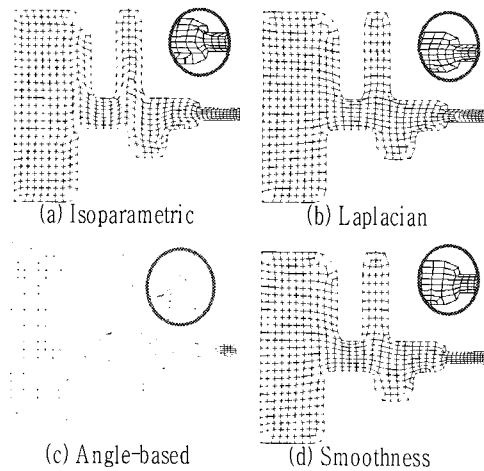


Fig. 6 Comparison of mesh smoothing (rib-web)

예제의 특성상 곡률 변화가 심한 부분이 많아서 대부분의 방법이 좋은 결과를 얻지 못했으며, 각 방법을 통해 구해진 격자의 질은 Table 1, Table 2 에서 비교하였다. Org 는 유연화 이전의 격자의 질의 분포, Iso 는 등매개 유연화 후, Lap 는 Laplacian 유연화 후, Ang 는 각도기준 유연화 후, Smo 는 Smoothness 유연화 후의 격자의 질의 분포를 의미하며, 짙은 색의 셀은 유연화 과정 전후, 가장 퇴화가 심한 요소가 위치한 격자질의 범위를 의미한다. 본 예제에서는 최적화유연화 방법인 smoothness 유연화만 좋은 요소들을 구하는데 성공하였다.

Table 1 Distribution of dihedrals (rib-web)

Dih	Org	Iso	Lap	Ang	Smo
Dih<0.0	0	3	2	6	0
Dih<0.1	4	1	2	1	0
Dih<0.2	3	3	0	2	0
Dih<0.3	1	1	0	4	0
Dih<0.4	7	7	7	3	4
Dih<0.5	12	12	3	7	1
Dih<0.6	16	16	8	12	5
Dih<0.7	23	23	12	22	9
Dih<0.8	45	45	26	44	17
Dih<0.9	48	48	28	59	41
Dih<1.0	339	339	410	338	421

Table 2 Distribution of shape quality (rib-web)

Shape Q	Org	Iso	Lap	Ang	Smo
Q < 0.1	1	0	0	0	0
Q < 0.2	1	0	1	1	0
Q < 0.3	0	0	0	0	0
Q < 0.4	4	0	0	0	0
Q < 0.5	1	1	3	3	0
Q < 0.6	4	4	2	2	0
Q < 0.7	6	6	12	12	3
Q < 0.8	22	20	31	31	13
Q < 0.9	52	38	72	72	32
Q < 1.0	407	429	377	377	450

3.1.2 소켓 형상

축대칭 소켓형상 중, 계단형의 플래시를 갖는

형상을 설계하여 격자유연화 방법을 적용한 결과는 Fig. 7 과 같다. 본 예제에서는 등매개 유연화와 smoothness 유연화방법이 해석에 적용 가능한 격자를 구할 수 있었으며, 격자의 질은 Table 3, Table 4 에서 비교하였다.

이상의 결과에서, Laplacian 방법은 알려진 대로 곡률이 심한 형상의 격자유연화에 적합하지 않음을 확인하였다.

또, 요소의 절점들이 이루는 각도만을 최적화 변수로 고려하는 angle-based 유연화방법은 요소들의 밀도차가 크고, 형상의 곡률변화가 심한 격자의 유연화에는 강건한 결과를 내지 못함을 알 수 있다. 또, 요소의 절점들이 이루는 각도 및 절점들 간의 길이를 모두 고려하는 smoothness 유연화방법이 적절한 결과를 얻을 수 있음을 알 수 있다.

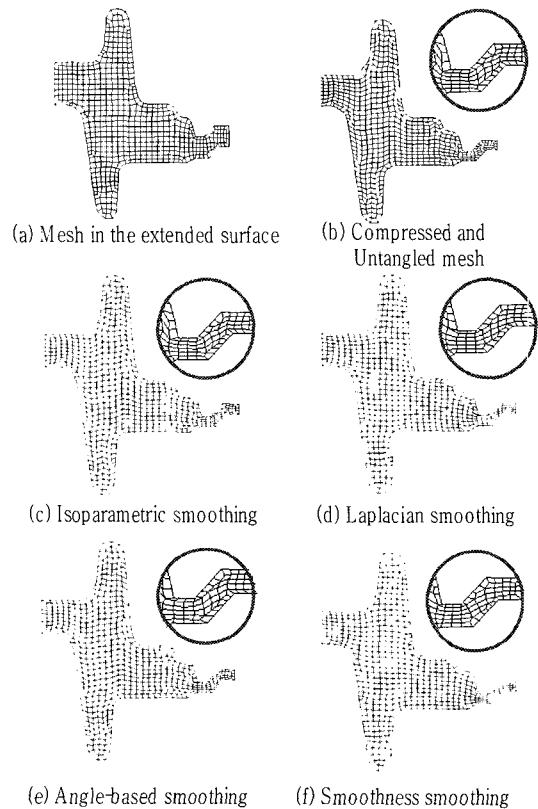


Fig. 7 Comparison of smoothing of mesh constructe-d by the mesh compression method (socket)

Table 3 Distribution of dihedrals (socket)

Dih	Org	Iso	Lap	Ang	Sm o
Dih<0.0	0	0	2	1	0
Dih<0.1	0	0	1	0	0
Dih<0.2	0	0	1	2	0
Dih<0.3	3	3	0	0	0
Dih<0.4	4	4	0	4	1
Dih<0.5	14	14	1	23	0
Dih<0.6	19	19	10	27	8
Dih<0.7	25	25	19	31	7
Dih<0.8	43	43	30	63	21
Dih<0.9	87	87	32	116	43
Dih<1.0	359	359	458	287	474

Table 4 Distribution of shape quality (socket)

Shape Q	Org	Iso	Lap	Ang	Smo
Q < 0.1	1	0	0	0	0
Q < 0.2	1	0	0	0	0
Q < 0.3	0	2	0	0	0
Q < 0.4	2	1	3	3	1
Q < 0.5	3	4	8	8	0
Q < 0.6	5	4	16	16	0
Q < 0.7	27	22	40	40	27
Q < 0.8	58	49	63	63	28
Q < 0.9	150	131	204	204	162
Q < 1.0	307	341	220	220	336

3.2 3 차원 격자유연화

3.2.1 십자축(cross-shaft) 형상

십자축의 열간단조공정 해석⁽¹⁰⁾도중 플래시가 발생했을 때, 격자압축법을 이용하여 구성된 격자 (Fig. 8)에 등매개, Laplacian, Smoothness 유연화를 적용하여 비교하여 보았다. 격자의 질은 Table 5, Table 6 에서 비교하였다.

아래 예제는 플래시가 소재 사이에 끼어있는 특징을 갖는 3 차원 형상이며, 모든 유연화 결과에서 모든 이면각이 양으로 나와 행렬값이 양이 되므로 해석을 진행할 수 있는 요소를 만들어 내기는 했으나, 해석오차 유발 가능성을 고려할 때,

최소 이면각이 가장 큰 smoothness 유연화가 가장 좋은 성능을 나타냄을 알 수 있다.

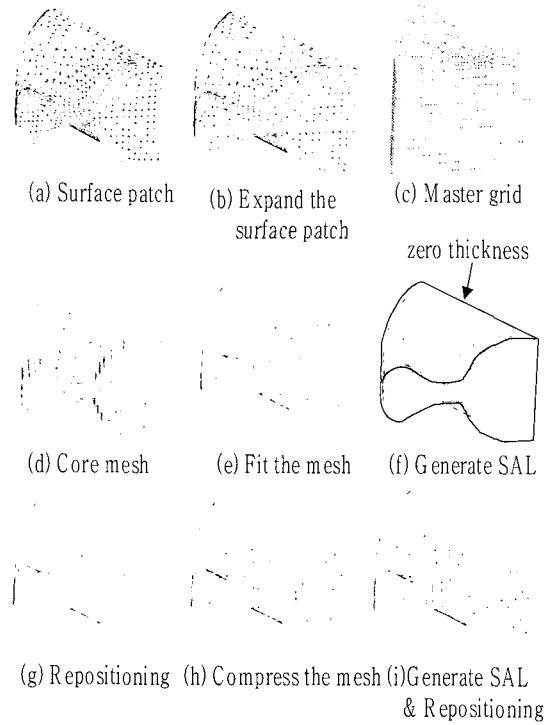


Fig. 8 Remeshing with mesh compression method (cross-shaft : 1/8 due to symmetry)

Table 5 Distribution of dihedrals (cross-shaft)

Dihedrals	Org	Iso	Lap	Smo
Dih < 0.0	0	0	0	0
Dih < 0.1	2	1	2	0
Dih < 0.2	1	1	0	0
Dih < 0.3	7	2	3	1
Dih < 0.4	16	20	24	4
Dih < 0.5	38	41	20	22
Dih < 0.6	64	93	97	67
Dih < 0.7	160	189	190	169
Dih < 0.8	263	301	279	285
Dih < 0.9	536	542	553	533
Dih < 1.0	1773	1670	1692	1779

Table 6 Distribution of shape quality (cross-shaft)

Shape Q	Org	Iso	Lap	Smo
Q < 0.1	1	0	1	0
Q < 0.2	0	1	1	0
Q < 0.3	6	4	3	0
Q < 0.4	11	6	6	10
Q < 0.5	14	38	17	14
Q < 0.6	86	91	76	37
Q < 0.7	263	269	284	198
Q < 0.8	657	710	676	774
Q < 0.9	987	900	953	1021
Q < 1.0	835	841	843	806

3.2.2 피스톤(piston) 형상

자동차용 에어킨 컴프레서에 쓰이는 피스톤의 열간단조공정 해석도중 플래시가 발생했을 때, 격자압축법을 이용하여 구성된 격자(Fig. 9)에 각각의 유연화 방법을 적용하여 보았다. 격자의 질은 Table 7, Table 8 에서 비교하였다.

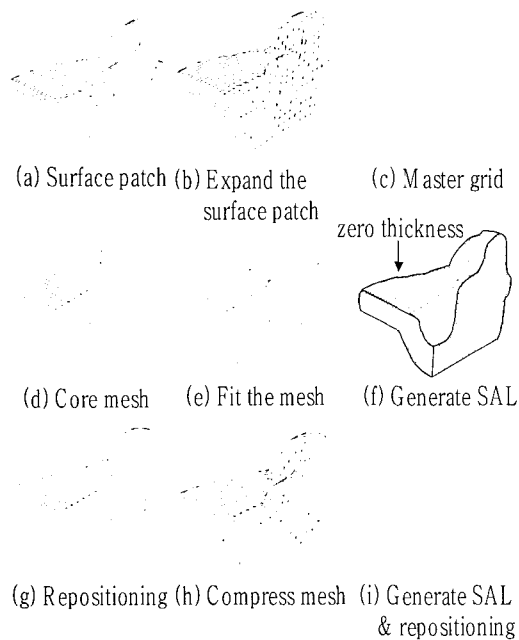


Fig. 9 Remeshing with mesh compression method (piston : 1/4 due to symmetry)

Table 7 Distribution of dihedrals (piston)

Dihedrals	Org	Iso	Lap	Smo
Dih < 0.0	0	1	0	0
Dih < 0.1	0	2	1	0
Dih < 0.2	2	2	3	1
Dih < 0.3	4	4	5	0
Dih < 0.4	5	10	9	6
Dih < 0.5	15	20	14	9
Dih < 0.6	25	48	39	24
Dih < 0.7	75	107	92	94
Dih < 0.8	147	231	225	165
Dih < 0.9	344	372	381	391
Dih < 1.0	2018	1838	1866	1945

본 예제는 플래시가 계단형으로 나오는 3 차원 형상이며, 플래시와 제품사이의 격자의 밀도차가 크므로 전체적으로 유연화 방법들이 좋은 결과를 내지는 못했지만, Laplacian 과 smoothness 유연화 방법이 해석 가능한 격자를 구했으며, 본 예제에서도 smoothness 유연화가 가장 좋은 성능을 나타내었다.

Table 8 Distribution of shape quality (piston)

Shape Q	Org	Iso	Lap	Smo
Q < 0.1	0	3	1	0
Q < 0.2	0	1	0	0
Q < 0.3	0	1	1	0
Q < 0.4	1	2	2	0
Q < 0.5	9	12	13	2
Q < 0.6	27	40	25	21
Q < 0.7	155	197	155	132
Q < 0.8	435	500	495	477
Q < 0.9	787	667	712	803
Q < 1.0	1221	1212	1231	1200

4. 결 론

본 연구에서는 격자압축법을 이용한 격자재구성 시, 해석의 정확도를 높이기 위하여 격자의 질을 향상시킬 수 있는 여러 가지 격자유연화 방법들을 테스트하고, 이면각과 형상을 고려한 격자의 질 판단 기준을 도입하여 격자의 질을 검토해 보

왔다.

2 차원 및 3 차원 예제의 테스트 결과를 통해, 형상의 곡률변화가 심하고 국부적으로 밀도차가 심한 격자의 유연화에는 기하적인 유연화 방법 및 요소의 각도를 최적화하는 방법으로는 강건한 결과를 내기가 어렵고, 요소의 각도 및 요소내 절점들 간의 거리까지 고려하는 행렬식(jacobian determinant)을 이용한 최적화 방법이 가장 강건한 결과를 낼 수 있음을 확인하였다.

격자 압축 및 절점의 재배치 과정에서 격자가 더집힌 경우, 격자의 행렬식이 음수가 되어 최적화를 적용할 수 없으므로, 격자 엉킴 최소화(mesh untangling)가 반드시 선행되어야 한다.

참 고 문 헌

- (1) 홍진태, 양동열, 이석렬, 2002, " 격자압축법을 이용한 3 차원 열간단조공정해석 ", 한국소성가공학회지, Vol. 11, No.2, pp. 179~186.
- (2) Field D. A., 1988, "Laplacian Smoothing and Delaunay Triangulation", Commun. Appl. Numer. Meth, Vol. 4, pp. 709~712.
- (3) Zhou T. and Shimada K., 2000, "An angle-based approach to two-dimensional mesh smoothing", Proceedings of 9th International meshing roundtable.
- (4) Brackbill j. and Saltzman J., 1982, "Adaptive zoning for singular problems in two dimensions", J. Comput. Phys., Vol. 46, pp. 342~368.
- (5) Lee Y. K. and Yang D. Y., 1996, "A new automatic

mesh generation technique and its application to the finite element analysis of practical forging process", Proceedings of 5th ICTP, pp. 409~413.

- (6) Lee Y. K. and Yang D. Y., 1998, "Development of a grid-based mesh generation technique and its application to remeshing during the finite element simulation of metal forming process", Eng. Comp., Vol. 16, pp. 316~336.
- (7) Lee Y. K. , Yang D. Y., 2000, "A Grid-based approach to non-regular mesh generation for automatic remeshing with metal forming analysis" Commun. Numer. Meth. En., Vol.16 pp. 625~635.
- (8) Freitag L. and Knupp P., 1999, "Tetrahedral Element Shape Optimization via the Jacobian Determinant and Condition Number", Proceedings of 8th International Meshing Roundtable.
- (9) Knupp M., 2000, "Achieving finite element mesh quality via optimization of the Jacobian matrix norm and associated quantities Part I-a framework for surface mesh optimization", Int. J. Numer. Meth. Engng., Vol. 48, pp. 401~420.
- (10) Zuo X, Wei Y, Chen J, Zeng L, Ruan X., 1999, "3D FEM simulation of multi-stage forging process using solid modeling of forging tools", J. Mater. Process. Tech., Vol. 91, pp. 191~195.
- (11) Yoon J.H., Yang D.Y., 1988, "Rigid-plastic finite element analysis of three-dimensional forging by considering friction on continuous curved dies with initial guess generation", Int. J. Mech. Sci., Vol. 30, pp. 887~898.