원형단면의 깊은 비선형 테이퍼 봉과 보의 3차원 진동해석

Three-Dimensional Vibration Analysis of Deep, Nonlinearly Tapered Rods and Beams with Circular Cross-Section

심 현 주* 강 재 훈†
Shim, Hyun Ju Kang, Jae Hoon
(논문접수일 : 2003년 3월 10일 ; 심사종료일 : 2003년 8월 26일)

요 지

원형단면의 깊은 테이퍼 봉과 보의 진동수와 모드형상을 결정하는 3차원 해석방법이 제시되었다. 수학적으로 1차원인 전통적인 봉과 보이론과는 달리, 본 연구에서는 3차원 동탄성방정식을 근간으로 하였다. 반경방향(r), 원주방향(θ), 축방향(z)으로의 변위성분인 u_r, u_θ, u_z를 시간에 대해서는 정현적으로, θ에 대해서는 주기적으로, r과 z 방향으로는 대수다항식의 형태로 표현하였다. 봉과 보의 위치(변형률)에너지와 운동에너지를 정식화하고, 고유치문제를 해결하기 위해 Ritz법을 사용하였으며, 진동수의 최소화과정을 통해 엄밀해의 상위경계치의 진동수를 구하였다. 이때 다항식의 차수를 증가시키면 진동수는 엄밀해에 수렴하게 된다. 봉과 보의 하위 5개의 진동수에 대해서 유효숫자 4자리까지의 수렴성 연구가 이루어졌다. 축방향으로 1차 직선적, 2차 및 3차 곡선적으로 테이퍼된 9가지 형상의 봉과 보의 수치결과를 3차원 이론을 이용하여 최초로 계산하였다. 또한 선형 테이퍼 보의 예를 통해 3차원 Ritz법과 고전적인 1차원 Euler-Bernoulli 보이론과의 비교가 이루어졌다.

핵심용어 : 진동, 3차원 해석, 깊은 봉과 보, 테이퍼 봉과 보, Ritz법

Abstract

A three dimensional (3-D) method of analysis is presented for determining the free vibration frequencies and mode shapes of deep, tapered rods and beams with circular cross section. Unlike conventional rod and beam theories, which are mathematically one-dimensional (1-D), the present method is based upon the 3-D dynamic equations of elasticity. Displacement components u_r, u_θ and u_z, in the radial, circumferential, and axial directions, respectively, are taken to be sinusoidal in time, periodic in , and algebraic polynomials in the r and z directions. Potential (strain) and kinetic energies of the rods and beams are formulated, the Ritz method is used to solve the eigenvalue problem, thus yielding upper bound values of the frequencies by minimizing the frequencies. As the degree of the polynomials is increased, frequencies converge to the exact values. Convergence to four-digit exactitude is demonstrated for the first five frequencies of the rods and beams. Novel numerical results are tabulated for nine different tapered rods and beams with linear, quadratic, and cubic variations of radial thickness in the axial direction using the 3-D theory. Comparisons are also made with results for linearly tapered beams from 1-D classical Euler-Bernoulli beam theory.

Keywords *: vibration, three dimensional analysis, deep rod and beam, tapered rod and beam, ritz method*

1. 서 론

구조요소의 3차원 해석은 구조학도에게는 오랜 목표가 되어왔다. 컴퓨터의 급속한 발전은 3차원 해석을 통해 정적변위, 진동수와 진동모드형상, 좌굴하중과 좌굴모드형상 등을 정확하게 계산할 수 있게 해주었다.

† 책임저자, 정회원 · 중앙대학교(서울캠퍼스) 공과대학 건축학부 조교수
전화: 02-820-5342; Fax: 02-812-4150
E-mail: jhkang@cau.ac.kr
* 중앙대학교(서울캠퍼스) 대학원 건축학과 박사과정생

• 이 논문에 대한 토론을 2003년 12월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2004년 3월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

그 동안 제한적이나마 봉, 보, 원기둥의 3차원 해석이 이루어졌지만,[1)~16)] 단면이 일정하다는 제한조건을 가지고 있으며, 3차원 해석에 의한 테이퍼 봉과 보의 해석은 아직까지 없다.

단면이 일정하지 않은 보는 일정한 보에 비해 강성과 자중의 분배가 보다 이상적으로 이루어져 특별한 건축학적 요구와 기능적 요구를 충족시킬 수 있는 장점으로 인해, 변단면을 가진 보의 진동해석은 건축공학, 토목공학, 기계공학, 항공공학 등에서 수 많은 연구의 대상이 되어왔지만, 이는 모두 수학적으로 1차원인 봉(신축, 비틀림) 이론과 보의 휨 이론을 근간으로 한 것이었다.

변단면을 가진 가는(slender) 테이퍼 보의 동적 휨거동을 지배하는 방정식은 변계수를 가진 4계의 선형 미분방정식이 되어 특별한 경우를 제외하고는 닫힌 형식(closed form)의 해를 구하기는 불가능하다. 그 동안 테이퍼 보의 연구는 대부분 고전전인 Euler-Bernoulli 보 이론이 사용되었다.[17)~45)]

본 연구에서는 원형단면과 임의의 경계조건을 갖는 깊은 테이퍼 봉과 보의 정확한 진동수를 3차원 Ritz법으로 구하는 방법을 소개하였다. 대수다항식의 형태로 표현된 축방향(z)과 반경방향(r)의 변위함수에서 충분히 많은 항을 택하면 엄밀해에 수렴하게 된다. 이러한 방법으로 일정한 단면을 가진 봉과 보 뿐만이 아니라, 1차 직선적, 2차 또는 3차 곡선적으로 테이퍼된 자유경계의 깊은 봉과 보의 정확한 진동수를 구하였다. 이러한 수치결과는 유한요소법과 유한차분법 등과 같은 근사법과 개량된 1차원 보 이론의 정확도를 검증하기 위한 비교의 대상이 될 수 있다. 1차원 보 이론의 타당한 적용범위를 밝히기 위해 고전적인 Euler-Bernoulli 보 이론에 의한 진동수와의 비교가 이루어졌다.

2. 해 석

그림 1은 길이= L, 반경= $R(z)$인 원형단면을 가진, 비선형적으로 테이퍼된 보를 보여주고 있다. 여기서 R_o, R_m, R_L은 각기 $z=0$, $L/2$, L에서의 반경을 의미한다. 본 본 해석에서 사용되는 원주좌표계(r, θ, z)도 보여 주고 있다. 반경좌표(r)는 보의 중심축에서 수직방향으로 축좌표(z)는 보의 왼쪽 단에서 측정되며, θ=원주각. 보의 정의역을 원주좌표계로 표현하면 다음 식과 같다.

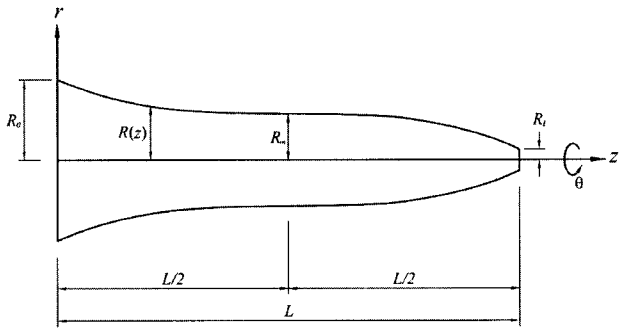


그림 1 A Representative Nonlinearly Tapered Beam Having Circular Cross-Section and the Cylindrical Coordinate System(r, θ, z)

$$0 \le r \le R(z),\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le z \le L \tag{1}$$

원주좌표계(r, θ, z)로 된 3개의 운동방정식은 다음과 같다.[46)]

$$\sigma_{rr,r}+\sigma_{rz,z}+\frac{1}{r}(\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}+\sigma_{r\theta,\theta})=\rho\ddot{u}_r \tag{2a}$$

$$\sigma_{r\theta,r}+\sigma_{\theta z,z}+\frac{1}{r}(2\sigma_{r\theta}+\sigma_{\theta\theta,\theta})=\rho\ddot{u}_\theta \tag{2b}$$

$$\sigma_{rz,r}+\sigma_{zz,z}+\frac{1}{r}(\sigma_{rz}+\sigma_{\theta z,\theta})=\rho\ddot{u}_z \tag{2c}$$

여기서, σ_{ij}=수직($i=j$)과 전단($i\neq j$) 응력성분 u_r, u_θ, u_z = r, θ, z 방향으로의 변위성분, ρ=단위체적당 질량, 컴마(,)=공간도함수, 닷트(.)=시간도함수.

등방성 선형탄성재료에 대한 텐서형 응력(σ_{ij})과 변형률(ε_{ij})과의 관계는 다음 식과 같다.

$$\sigma_{ij}=\lambda\varepsilon\delta_{ij}+2G\varepsilon_{ij} \tag{3}$$

여기서 λ와 G=Lamé의 상수. 등방성 재료에 대한 Lamé의 상수를 영계수(E)와 프와송비(ν)로 표현하면 다음 식과 같다.

$$\lambda=\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)},\quad G=\frac{E}{2(1+\nu)} \tag{4}$$

또한, $\varepsilon(\equiv\varepsilon_{rr}+\varepsilon_{\theta\theta}+\varepsilon_{zz})$=변형률 텐서의 대각합(trace), δ_{ij}=크로넥커의 델타.

텐서형 변형률(ε_{ij})과 세 변위(u_r, u_θ, u_z)와의 관계식은 다음과 같다.[46)]

$$\varepsilon_{rr}=u_{r,r},\ \varepsilon_{\theta\theta}=\frac{u_{\theta,\theta}+u_r}{r},\ \varepsilon_{zz}=u_{z,z} \tag{5a}$$

$$\varepsilon_{r\theta}=\frac{1}{2}\left[u_{\theta,r}+\frac{u_{r,\theta}-u_{\theta}}{r}\right],$$

$$\varepsilon_{rz}=\frac{1}{2}(u_{r,z}+u_{z,r}),\ \varepsilon_{\theta z}=\frac{1}{2}\left[u_{\theta,z}+\frac{u_{z,\theta}}{r}\right] \quad (5b)$$

식(3)과 (5)를 식(2)에 대입하면, 자유진동을 지배하는 일련의 2계 편미분방정식을 얻을 수 있다. 그러나 보의 단면이 변하는 경우에 이 방정식은 많은 변계수를 가지게 되어 엄밀해를 구하기는 불가능하다. 따라서 본 연구에서는 대표적인 에너지법의 일종인 Ritz법으로 이 문제를 접근하였다.

식(5)에 의하면, $1/r$ 항에 기인하여 $r=0$에서 실제로는 존재하지도 않는 변형률의 특이성(singularity)이 발생하게 된다. 이러한 특이성은 보의 체적 내에서의 수치적분을 통하여 피할 수 있으며, 따라서 식(1)에 있는 r의 범위는 $0\le r\le R(z)$에서 $0<r\le R(z)$으로 교체되어야 한다.

변형률(위치) 에너지(V)는 다음 식과 같다.

$$V=\frac{1}{2}\int_{\Omega}(\sigma_{rr}\varepsilon_{rr}+\sigma_{\theta\theta}\varepsilon_{\theta\theta}+\sigma_{zz}\varepsilon_{zz}+2\sigma_{r\theta}\varepsilon_{r\theta}+2\sigma_{rz}\varepsilon_{rz}+2\sigma_{\theta z}\varepsilon_{\theta z})r\,dr\,d\theta\,dz \quad (6)$$

여기서, Ω=정의구역.

식(3)과 (5)를 식(6)에 대입하면, 변형률에너지(V)가 다음 식과 같이 세 변위성분으로 표현된다.

$$V=\frac{1}{2}\int_{\Omega}[\lambda(\varepsilon_{rr}+\varepsilon_{\theta\theta}+\varepsilon_{zz})^2+2G\{\varepsilon_{rr}{}^2+\varepsilon_{\theta\theta}{}^2+\varepsilon_{zz}{}^2+2(\varepsilon_{r\theta}{}^2+\varepsilon_{rz}{}^2+\varepsilon_{\theta z}{}^2)\}]r\,dr\,d\theta\,dz \quad (7)$$

이 식에서 텐서형 변형률(ε_{ij})은 이미 식(5)에서 세 변위성분으로 표현되었다.

운동에너지(T)는

$$T=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\rho(\dot{u}_r{}^2+\dot{u}_{\theta}{}^2+\dot{u}_z{}^2)r\,dr\,d\theta\,dz \quad (8)$$

이다.

계산의 편이성을 위해 반경좌표(r)과 축좌표(z)를 각각 $\Psi\equiv r/(R_O+R_L)$과 $\zeta\equiv z/L$으로 무차원화 시켰다. 따라서 무차원화된 원주좌표(Ψ,θ,ζ)의 범위는 다음 식과 같다.

$$0<\Psi\le\delta(\zeta),\ 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le\zeta\le 1 \quad (9)$$

여기서, $\delta(\zeta)$는 무차원 반경 ($\equiv R(z)/(R_0+R_L)$)으로 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$\delta_1(\zeta)=\frac{1}{1+R^*}[(1-R^*)\zeta^p+R^*]\ (p\ge 0) \quad (10a)$$

또는,

$$\delta_2(\zeta)=\frac{1}{1+R^*}[(R^*-R^{**})(1-2\zeta)^q+R^{**}]\ (q\ge 0) \quad (10b)$$

여기서, R^*과 R^{**}는 반경비로 각기 R_0/R_L과 R_m/R_L이다. 그림 2는 선형 테이퍼 보($p=1$)를 그림 3은 2차(p 또는 $q=2$)와 3차($q=3$) 곡선 테이퍼 보를 보여주고 있다.

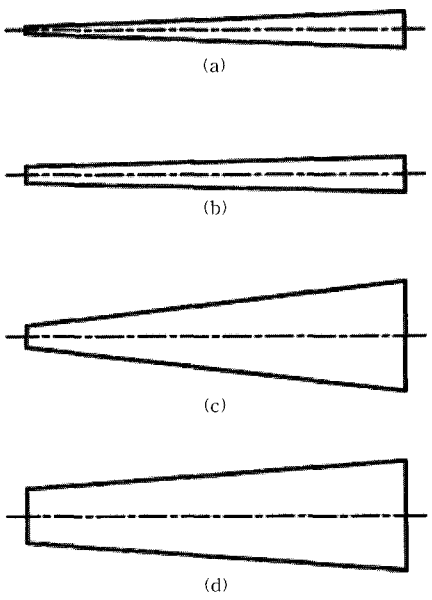
비감쇠 자유진동에서 세 변위의 시간(t)반응은 정현적이며, 특히 원형단면을 가진 보는 축방향에 대한 원형 대칭성으로 인해 변위를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$u_r(\Psi,\theta,\zeta,t)=U_r(\Psi,\zeta)\cos n\theta\sin(\omega t+\alpha) \quad (11a)$$

$$u_{\theta}(\Psi,\theta,\zeta,t)=U_{\theta}(\Psi,\zeta)\sin n\theta\sin(\omega t+\alpha) \quad (11b)$$

$$u_z(\Psi,\theta,\zeta,t)=U_z(\Psi,\zeta)\cos n\theta\sin(\omega t+\alpha) \quad (11c)$$

여기서, U_r, U_{θ}, U_z = Ψ과 ζ의 함수인 변위함수, ω=고유진동수, α=초기조건으로 결정되는 임의의 위상각. 원



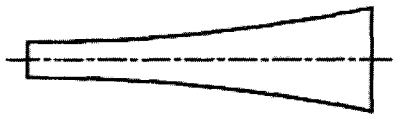
$[R_L/L, R_O/R_L]=[0.05, 0.2]$

$[R_L/L, R_O/R_L]=[0.05, 0.5]$

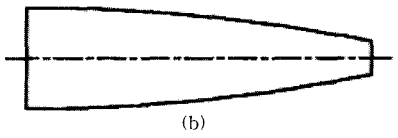
$[R_L/L, R_O/R_L]=[0.15, 0.2]$

$[R_L/L, R_O/R_L]=[0.15, 0.5]$

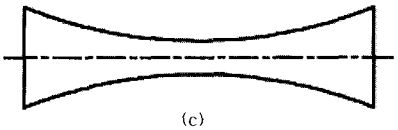
그림 2 Linearly($p=1$) Tapered Beams Having Circular Cross-Section with δ_1 in(10a)



(a) $\left[p,\ \frac{R_L}{L},\ \frac{R_O}{R_L}\right]=[2,\ 0.15,\ 1/3]$

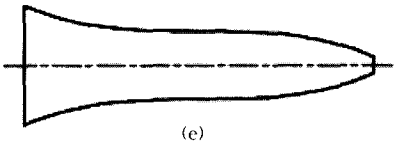


(b) $\left[p,\ \frac{R_L}{L},\ \frac{R_O}{R_L}\right]=[2,\ 0.05,\ 3]$



(c) $\left[q,\ \frac{R_L}{L},\ \frac{R_O}{R_L},\ \frac{R_m}{R_L}\right]=[2,\ 0.15,\ 1/3]$

(d) $\left[q,\ \frac{R_L}{L},\ \frac{R_O}{R_L},\ \frac{R_m}{R_L}\right]=[2,\ 0.05,\ 1,\ 3]$



(e) $\left[q,\ \frac{R_L}{L},\ \frac{R_O}{R_L},\ \frac{R_m}{R_L}\right]=[3,\ 0.025,\ 7,\ 4]$

그림 3 Nonlinearly Tapered Beams Having Circular Cross-Section with δ_1 in (10a) for (a) and (b), and δ_2 in (10b) for (c), (d), and (e)

주방향(θ)으로의 주기성을 확보하기 위해 원주파동수(n)는 정수로 택한다 ($n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ \infty$). 식(11)은 비틀림 모드를 제외한 모든 자유진동 모드를 설명하고 있다. 이 비틀림 모드는 식(11)에서 $\cos n\theta$과 $\sin n\theta$을 서로 교체하여 얻을 수 있다. $n>0$일 때, 이 교체된 식은 모드형상의 대칭축이 회전될 뿐 식(11)과 같은 해를 주지만, $n=0$ 일 때 이 교체된 식은 $u_r=u_z=0$, $u_\theta=U_\theta^*(r,z)\sin(\omega t+\alpha)$이 되어 비틀림 모드를 준다. 변위성분은 원주좌표 θ와는 원주파동수(n)와는 분리(uncoupled)가 되며, r과 z와는 상관(coupled)된다.

Ritz법은 한 주기의 진동에서 발생하는 최대 변형률에너지($V_{\max}$)와 최대 운동에너지($T_{\max}$) 범함수를 사용한다. 이 범함수는 식(11)을 식(7)과 (8)에 대입한 후, $\sin^2(\omega t+\alpha)$과 $\cos^2(\omega t+\alpha)$을 1로 취해서 구할 수 있는데, 무차원 좌표 Ψ와 ζ을 이용하여 표현하면 다음 식과 같다.

$$V_{\max}=\frac{LG}{2}\int_0^1\int_0^{\delta(\zeta)}\left[\left\{\frac{\lambda}{G}(k_1+k_2+k_3)^2+2(k_1^2+k_2^2+k_3^2)+k_4^2\right\}\Gamma_1+(k_5^2+k_6^2)\Gamma_2\right]\Psi d\Psi d\zeta \tag{12}$$

$$T_{\max}=\frac{\rho L(R_O+R_L)^2\omega^2}{2}\int_0^1\int_0^{\delta(\zeta)}\left[(U_r^2+U_z^2)\Gamma_1+U_\theta^2\Gamma_2\right]\Psi d\Psi d\zeta \tag{13}$$

여기서,

$$k_1\equiv\frac{U_r+nU_\theta}{\Psi},\quad k_2\equiv\frac{R_O+R_L}{L}U_{z,\zeta},\quad k_3\equiv U_{r,\Psi} \tag{14a}$$

$$k_4\equiv\frac{R_O+R_L}{L}U_{r,\zeta}+U_{z,\Psi},\quad k_5\equiv\frac{U_\theta+nU_r}{\Psi}-U_{\theta,\Psi}$$

$$k_6\equiv\frac{nU_z}{\Psi}-\frac{R_O+R_L}{L}U_{\theta,\zeta} \tag{14b}$$

Γ_1과 Γ_2는 다음 식과 같이 정의된 상수이다.

$$\Gamma_1\equiv\int_0^{2\pi}\cos^2 n\theta=\begin{cases}2\pi & \text{if } n=0\\ \pi & \text{if } n\geq 1\end{cases} \tag{15a}$$

$$\Gamma_2\equiv\int_0^{2\pi}\sin^2 n\theta=\begin{cases}0\pi & \text{if } n=0\\ \pi & \text{if } n\geq 1\end{cases} \tag{15b}$$

식(12)의 무차원 상수 λ/G를 식(4)를 이용하여 ν로 표현하면 다음 식과 같다.

$$\frac{\lambda}{G}=\frac{2\nu}{1-2\nu} \tag{16}$$

식(11)의 변위함수 U_r, U_θ, U_z를 대수다항식으로 표현하면 다음과 같다.

$$U_r(\Psi,\zeta)=\eta_r(\Psi,\zeta)\sum_{i=0}^{I}\sum_{j=0}^{J}A_{ij}\Psi^i\zeta^j \tag{17a}$$

$$U_\theta(\Psi,\zeta)=\eta_\theta(\Psi,\zeta)\sum_{k=0}^{K}\sum_{l=0}^{L}B_{kl}\Psi^k\zeta^l \tag{17b}$$

$$U_z(\Psi,\zeta)=\eta_z(\Psi,\zeta)\sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N}C_{mn}\Psi^m\zeta^n \tag{17c}$$

여기서, $i,\ j,\ k,\ l,\ m,\ n$=정수, $I,\ J,\ K,\ L,\ M,\ N$=다항식에서 취한 최고차수, $A_{ij},\ B_{kl},\ C_{mn}$=임의의 미정계수, η=기하학적 경계조건에 따라 결정되는 함수. η의 예를 들면 다음과 같다.

1. 자유경계 : $\eta_r=\eta_\theta=\eta_z=1$

2. 왼쪽($z=0$) 고정, 나머지 경계는 자유 :
   $\eta_r=\eta_\theta=\eta_z=\zeta^2$
3. 오른쪽($z=L$) 고정, 나머지 경계는 자유 :
   $\eta_r=\eta_\theta=\eta_z=(\zeta-1)^2$
4. 양쪽 모두 고정 : $\eta_r=\eta_\theta=\eta_z=\zeta^2(\zeta-1)^2$

함수 η는 변위와 회전각과 관련된 기하학적 경계조건만을 고려한다. 이 함수는 식(17)과 함께 수학적으로 완비되어(mathematically complete) $I, J, \ldots, N$가 증가함에 따라 정확도가 증가하게 되어 그 어떤 3차원 운동도 표현할 수 있게 된다.[47] 결국 충분한 수의 항을 취하면, 모든 내부의 운동학적 구속은 사라지게 되고 식(17)은 엄밀해에 수렴하게 된다.

고유치문제의 정식화는 임의의 계수 A_{ij}, B_{kl}, C_{mn}에 대한 진동수의 최소화를 통해 다음 식과 같이 이루어진다.[48]

$$\frac{\partial}{\partial A_{ij}}(V_{\max}-T_{\max})=0,$$
$$(i=0,1,2,\ldots,I;\ j=0,1,2,\ldots,J) \tag{18a}$$

$$\frac{\partial}{\partial B_{kl}}(V_{\max}-T_{\max})=0,$$
$$(k=0,1,2,\ldots,K;\ l=0,1,2,\ldots,L) \tag{18b}$$

$$\frac{\partial}{\partial C_{mn}}(V_{\max}-T_{\max})=0,$$
$$(m=0,1,2,\ldots,M;\ n=0,1,2,\ldots,N) \tag{18c}$$

식(18)은 A_{ij}, B_{kl}, C_{mn}을 미지수로 하는 $(I+1)(J+1)+(K+1)(L+1)+(M+1)(N+1)$개의 선형, 동차, 대수방정식이다. 비자명해(nontrivial solution)를 구하기 위해 계수행렬의 행렬식을 영으로 취하면, 고유치(진동수)를 구할 수 있다. 이 진동수는 엄밀해의 상위경계치이다. 각 진동수에 대응하는 모드형상 (고유함수)은 각각의 ω를 대수방정식에 다시 대입하여 계수비를 계산하여 구할 수 있다.

3. 수렴성 연구

본 해석법의 정확성을 입증하고, 식(17)의 멱급수에서 필요한 항수를 결정하기 위해 수렴성 연구가 필요하다. 수렴성 연구는 식(17)의 수학적으로 완비된 다항식이 사용될 때, Ritz법으로 구한 진동수는 엄밀해의 상위경계치를 준다는 사실에 바탕을 두고 있다.

표 1 Convergence of Frequencies in $\omega L\sqrt{\rho/G}$ of a Completely Free, Quadratically ($p=2$) Tapered Beam Having Circular Cross-Section with δ_1 in (10a), $R_O/R_L=1/3$, and $R_L/L=0.15$ for the Five Lowest Torsional Modes ($n=0$) for $\nu=0.3$

TR	*TZ*	*DET*	1	2	3	4	5
2	2	4	5.498	157.1	275.4	-	-
2	4	8	3.834	7.327	16.79	144.1	183.2
2	6	12	3.670	6.543	10.50	17.78	33.25
2	8	16	3.669	6.523	9.635	12.88	18.34
2	10	20	3.669	6.520	9.578	12.69	16.19
2	11	22	3.669	6.520	9.577	12.68	15.82
2	12	24	3.669	6.529	9.577	12.68	15.82
3	2	6	5.408	34.92	58.52	302.5	455.4
3	4	12	3.812	7.272	15.87	39.60	47.56
3	6	18	3.659	6.515	10.35	17.22	29.07
3	8	24	3.659	6.495	9.587	12.82	17.86
3	10	30	**3.658**	6.493	9.538	12.63	16.04
3	11	33	3.658	6.493	9.538	12.63	15.75
3	12	36	3.658	6.493	9.537	12.63	15.75
4	2	8	5.315	30.02	52.00	72.24	87.35
4	4	16	3.804	7.268	15.08	35.67	41.57
4	6	24	3.659	6.512	10.26	17.10	27.04
4	8	32	3.658	6.494	9.581	12.81	17.60
4	10	40	3.658	**6.492**	**9.536**	12.63	16.01
4	11	44	3.658	6.492	9.536	12.63	15.75
4	12	48	3.658	6.492	9.536	**12.62**	**15.74**

표 1은 자유경계의 원형단면을 가지고, 식(10a)에서 $p=2$일 때 2차 곡선적으로 테이퍼된 보의 수렴성 연구를 보여주고 있다. 이 보는 $R^*(\equiv R_O/R_L)=1/3$이고 $R_L/L=0.15$이며, 그림 3의 첫번째 보에 해당한다. 이 표는 $\nu=0.3$일 때 비틀림 모드($n=0$)의 하위 5개의 무차원 진동수 $\omega L\sqrt{\rho/G}$를 보여주고 있다.

수렴성 연구를 보다 단순화하기 위해 r(또는 Ψ)과 z(또는 ζ)방향으로 같은 수의 항을 가진 다항식이 이용 되었다(즉, $I=K=M$, $J=L=N$). 물론, 어떤 보의 경우에는 항수를 다르게 취했을 때 수치계산의 최적화를 이룰 수도 있다.

TR과 ***TZ***는 r(또는 Ψ)과 z(또는 ζ)방향으로의 다항식 항의 총수를 의미하며, 진동수 행렬식의 차수 ***DET***와 ***TR***, ***TZ***와의 관계식은 다음과 같다.

$$\boldsymbol{DET}=\begin{cases}\boldsymbol{TR}\times\boldsymbol{TZ} & \text{for torsional modes } (n=0)\\ 2\times\boldsymbol{TR}\times\boldsymbol{TZ} & \text{for axisymmetric modes } (n=0)\\ 3\times\boldsymbol{TR}\times\boldsymbol{TZ} & \text{for torsional modes } (n\geq 1)\end{cases} \tag{19}$$

표 1은 식(17)의 ***TZ***($=J+1, L+1, N+1$)와 ***TR***($=I+1, K+1, M+1$)이 증가할수록, 5개의 진동수 모두 단

조수렴함을 보여주고 있다. 예를 들면, 첫번째 무차원 비틀림 진동수 $\omega L\sqrt{\rho/G}$는 (TR, TZ))=(3, 10)을 사용하여 DET=30이 되었을 때 유효숫자 4자리까지 수렴된 진동수(3.658)를 얻었다. 또한 이러한 정확도를 얻기 위해서는 최소한 반경방향으로 3항 (TR=3), 축방향으로 10항 (TZ=10)이 필요하였다. 표 1에서 밑줄이 그어진 굵은 글씨의 숫자는 가장 적은 행렬식의 차수를 가지고 얻을 수 있는 가장 정확한 진동수(최소상계치, least upper bound)를 의미한다.

표 2는 1개의 원주파동수(n=1)를 갖는 휨모드의 수렴성 연구를 보여 주고 있다. 유효숫자 4자리까지 정확한 기본진동수(1.175)를 얻기 위해 최소한 (TR, TZ)=(3,10)과 DET =90이 요구되었다.

축대칭(extensional 또는 longitudinal) 모드 (n=0)에 대한 수렴성 연구결과는 본문에 포함되지는 않았지만 이와 유사한 경향을 보였으며, 유효숫자 4자리까지 수렴된 최하위 진동수를 구하기 위해서는 (TR, TZ)=(3,10)와 DET =60이 요구되었다.

표 1과 2는 더 정확한 상위 진동수를 얻기 위해서는 더 많은 항수가 필요하다는 것을 보여 준다.

표 2 Convergence of Frequencies in $\omega L\sqrt{\rho/G}$ of a Completely Free, Quadratically (p=2) Tapered Beam Having Circular Cross-Section with δ_1 in (10a), R_0/R_L=1/3, and R_L/L=0.15 for the Five Lowest Bending Modes for n=1 for ν=0.3

TR	TZ	DET	1	2	3	4	5
2	2	12	16.20	22.25	31.41	41.42	56.37
2	4	24	1.354	5.563	18.67	21.54	27.01
2	6	36	1.222	3.539	7.959	13.78	21.30
2	8	48	1.213	3.246	5.974	9.835	16.25
2	10	60	1.213	3.222	5.818	8.865	12.37
2	11	66	1.213	3.222	5.811	8.710	11.97
2	12	72	1.213	3.222	5.809	8.696	11.72
3	2	18	15.25	21.33	30.21	36.22	40.81
3	4	36	1.303	5.231	17.21	20.72	25.07
3	6	54	1.183	3.423	7.537	13.03	20.13
3	8	72	1.176	3.142	5.753	9.498	15.44
3	10	90	1.175	3.121	5.632	8.582	11.87
3	11	99	1.175	3.120	5.625	8.429	11.60
3	12	108	1.175	3.120	5.623	8.416	11.34
4	2	24	15.12	20.43	29.48	35.73	36.88
4	4	48	1.299	5.136	17.07	20.32	24.57
4	6	72	1.182	3.414	7.487	12.93	19.96
4	8	96	1.176	3.140	5.740	9.464	15.34
4	10	120	1.175	3.119	5.628	8.566	11.82
4	11	132	1.175	3.119	5.621	8.420	11.57
4	12	144	1.175	3.119	5.620	8.408	11.32

4. 수치결과 및 토론

표 3은 식(10a)에서 p=1인 선형적으로 테이퍼된 원형단면을 가진 자유경계의 4개 보의 무차원 진동수 ($\omega L\sqrt{\rho/G}$)를 보여주고 있다. 프와송비(ν)는 0.3으로 택하였으며, 이 보의 형상은 그림 2에 그려져 있다. 이 4개의 보 중에서 2개는 가는 보(R_L/L=0.05)이고, 나머지 2개는 깊은 보 (R_L/L=0.15)이며, 서로 다른 두 종류의 테이퍼 비 (R^* $\equiv R_0/R_L$=0.2 와 0.5)가 사용되었다. 5개의 원주파동수 ($n=0^T, 0^A$, 1, 2, 3)와 각 n에 대해서 하위 5개의 모드 (s=1, 2, 3, 4, 5)에 해당하는 25개의 진동수가 각 보에 대해서 계산되었다. 상첨자 T와 A는 비틀림 모드와 축대칭 모드를 의미한다. 괄호 안의 숫자는 각 보의 하위 5개의 진동수의 순서를 의미한다. 강체모드의 영의 진동수는 이 표에서 생략되었다.

표 4의 (a)와 (b)는 식(10a)의 $\delta_1(\zeta)$에서 p=2일 때 2차 곡선적으로; (c)와 (d)는 식(10b)의 $\delta_2(\zeta)$에서 q=2일 때 2차 곡선적으로, (e)는 q=3일 때 3차 곡선적으로

표 3 Frequencies in $\omega L\sqrt{\rho/G}$ of Completely Free, Linearly (p=1) Tapered Beam Having Circular Cross-Section with δ_1 in (10a) for ν=0.3

n	s	$\left[\frac{R_L}{L}, \frac{R_0}{R_L}\right]$			
		[0.05, 0.2]	[0.05, 0.5]	[0.15, 0.2]	[0.15, 0.5]
0^T	1	4.637(5)	3.555(4)	4.618(3)	3.549(2)
	2	7.444	6.512	7.413	6.501(5)
	3	10.32	9.579	10.27	9.563
	4	13.27	12.68	13.22	12.66
	5	16.29	15.80	16.22	15.78
0^A	1	6.039	5.295(5)	5.991(4)	5.269(4)
	2	10.79	10.24	10.63	10.10
	3	15.65	15.23	15.20	14.73
	4	20.55	20.21	19.33	18.80
	5	25.47	25.15	19.94	19.82
1	1	0.5964(1)	0.6783(1)	1.662(1)	1.839(1)
	2	1.430(2)	1.782(2)	3.694(2)	4.283(3)
	3	2.619(3)	3.348(3)	6.201(5)	7.154
	4	4.130(4)	5.298	8.958	10.12
	5	5.982	7.565	11.78	12.95
2	1	42.85	42.82	14.22	14.26
	2	49.43	48.53	17.70	17.05
	3	54.00	51.42	21.27	19.38
	4	59.62	54.41	23.37	20.94
	5	63.67	58.14	25.71	22.65
3	1	65.26	65.56	21.46	21.60
	2	75.56	74.54	26.57	25.82
	3	81.13	78.23	30.56	28.46
	4	86.05	81.84	32.54	30.19
	5	92.64	86.24	34.92	31.99

표 4 Frequencies in $\omega L\sqrt{\rho/G}$ of Completely Free, Nonlinearly Tapered Beams Having Circular Cross -Section with δ_1 in (10a) for (a) and (b), and δ_2 in (10b) for (c), (d), and (e) for $\nu=0.3$

n	s	$\left[p, \frac{R_L}{L}, \frac{R_0}{R_L}\right]$		$\left[q, \frac{R_L}{L}, \frac{R_0}{R_L}, \frac{R_m}{R_L}\right]$		
		(a) [2, 0.15, 1/3]	(b) [2, 0.05, 3]	(c) [2, 0.15, 1, 1/3]	(d) [2, 0.05, 1, 3]	(e) [3, 0.025, 7, 4]
0^T	1	**3.658(3)**	**4.260(2)**	**0.9052(2)**	**5.354(2)**	**3.194(2)**
	2	6.492	**7.192(5)**	7.259	**8.445(5)**	7.256
	3	9.536	10.12	9.965	11.34	10.53
	4	12.62	13.11	12.95	14.21	13.67
	5	15.74	16.13	16.02	17.08	16.76
0^A	1	**5.143(4)**	**5.852(4)**	**2.904(4)**	**6.799(4)**	**5.211(4)**
	2	10.02	10.49	10.12	11.29	10.72
	3	14.84	14.90	14.64	15.43	15.30
	4	19.18	18.67	18.48	18.97	17.01
	5	20.03	19.67	19.51	21.78	19.72
1	1	**1.157(1)**	**2.238(1)**	**0.6092(1)**	**3.154(1)**	**1.790(1)**
	2	**3.119(2)**	**4.725(3)**	**2.173(3)**	**5.814(3)**	**4.213(3)**
	3	**5.620(5)**	7.557	**4.913(5)**	8.656	**6.983(5)**
	4	8.408	10.46	7.981	11.61	9.857
	5	11.32	13.07	11.25	13.93	12.68
2	1	14.14	14.20	13.72	16.03	11.95
	2	18.51	16.12	13.72	17.01	17.14
	3	23.35	17.85	20.02	18.91	22.31
	4	25.62	19.51	20.02	20.53	23.30
	5	28.21	21.46	28.33.	22.28	23.91
3	1	21.20	21.68	20.29	24.53	17.53
	2	27.53	24.63	20.30	25.59	25.21
	3	33.10	26.27	29.34	27.48	32.07
	4	34.87	27.91	29.35	28.90	33.01
	5	38.03	29.90	38.69	30.11	35.25

테이퍼된 원형단면을 가진 자유경계의 깊은 보에 대한 무차원 진동수 $\omega L\sqrt{\rho/G}$를 보여주고 있다. 프와송 비(ν)는 역시 0.3을 택하였다. 이 보의 형상은 그림 3에 그려져 있다.

깊은 보일수록 전단 유연도 효과가 중요하지만, 그림 2와 3에 있는 보의 기본진동수는 모두 $n=1$일 때의 휨모드에서 발생한다. 선형적으로 테이퍼된 가장 가는 보의 하위 4개의 진동수가 $n=1$일 때 발생한다. 그림 2와 3에 있는 보의 비틀림 모드 ($n=0^T$)는 하위 5개의 진동수 가운데 1개 또는 2개를 가질 만큼 중요한 모드이다. 또한 표 3과 4는 축대칭 모드 ($n=0^A$)가 하위 5개의 진동수 가운데 1개 이하로 존재함을 보여주고 있다. 이러한 축대칭 모드는 프와송 효과에 기인한 반경방향 (r 또는 Ψ)으로의 변위가 존재한다.

표 3과 4의 모든 진동수는 (TR, TZ)=(4, 12)를 사용하여 계산하였다.

5. 고전적인 1차원 보이론과의 비교

표 5에서 자유경계의 원형단면을 가진, 선형적으로 테이퍼($R_O/R_L=1/3$)된 보의 무차원 진동수 $\omega L\sqrt{\rho/G}$를 3차원 Ritz법(3DR)과 고전적인 1차원 Euler-Bernoulli 보 이론(1DB)으로 계산하여 서로 비교하였다. 이 보의 평균직경($D_{avg}=R_O+R_L$)에 대한 보 길이의 비(L/D_{avg})로는 5, 10, 20, 40이 사용되었다. $n=1$일 때 하위 5개의 진동수를 서로 비교하였으며, 이 때 $\nu=0.3$을 사용하였다. 두 이론에 의한 진동수 간 퍼센트 차이는 다음 식과 같다.

$$\text{Difference } \% = \frac{1\text{DB}-3\text{DR}}{3\text{DR}} \times 100 \tag{20}$$

Rosa와 Auciello[41] 는 고전적인 1차원 보이론으로 자유경계의 선형적으로 테이퍼된 보의 진동수 방정식을 다음과 같이 제공하였다.

$$\begin{vmatrix} J_4(q) & Y_4(q) \\ 8J_4(q)-qJ_5(q) & 8Y_4(q)-qY_5(q) \\ J_4(q\sqrt{\alpha}) & Y_4(q\sqrt{\alpha}) \\ 8J_4(q\sqrt{\alpha})-q\sqrt{\alpha}J_5(q\sqrt{\alpha}) & 8Y_4(q\sqrt{\alpha})-q\sqrt{\alpha}Y_5(q\sqrt{\alpha}) \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} I_4(q) & K_4(q) \\ 8I_4(q)+qI_5(q) & 8K_4(q)-qK_5(q) \\ I_4(q\sqrt{\alpha}) & K_4(q\sqrt{\alpha}) \\ 8I_4(q\sqrt{\alpha})-q\sqrt{\alpha}I_5(q\sqrt{\alpha}) & 8J_4(q\sqrt{\alpha})-q\sqrt{\alpha}K_5(q\sqrt{\alpha}) \end{vmatrix} = 0 \tag{21}$$

표 5 Comparison of Nondimensional Frequencies in $\omega L\sqrt{\rho/G}$ from the 3-D and the 1-D Theories of Completely Free, Linearly Tapered Beams with Circular Cross-Section of $R_O/R_L=1/3$ for the Five Lowest Bending Modes for $n=1$ with $\nu=0.3$

L/D_{avg}	Method	1	2	3	4	5
5	1DB	1.892	4.907	9.388	15.34	22.78
	3DR	1.716	3.966	6.680	9.575	12.44
	(Difference %)	(10.3%)	(23.7%)	(40.5%)	(60.2%)	(83.1%)
10	1DB	0.9458	2.454	4.694	7.671	11.39
	3DR	0.9208	2.300	4.187	6.459	9.034
	(Difference %)	(2.72%)	(6.70%)	(12.1%)	(18.8%)	(26.1%)
20	1DB	0.4729	1.227	2.347	3.836	5.694
	3DR	0.4697	1.206	2.273	3.646	5.340
	(Difference %)	(0.68%)	(1.74%)	(3.26%)	(5.21%)	(6.63%)
40	1DB	0.2365	0.6134	1.174	1.918	2.847
	3DR	0.2361	0.6107	1.164	1.893	2.831
	(Difference %)	(0.17%)	(0.44%)	(0.86%)	(1.32%)	(0.57%)

여기서 $J_n(x)$와 $Y_n(x)$는 n차의 제1종 및 제2종의 Bessel의 함수이고, $I_n(x)$과 $K_n(x)$는 n차의 개량된 제1종 및 제2종의 Bessel의 함수이다. A_0과 I_0는 $z=0$에서 단면적과 단면 2차 모멘트, α=테이퍼 비(R_L/R_O), $q\equiv 2Lk/(\alpha-1)$, $k^4\equiv\rho A_0\omega^2/EI_0$.

보의 세장비(L/D_{avg})와 관계없이 3차원 Ritz법은 1차원 보이론보다 작은 진동수를 주었다. 1차원 보이론과는 달리 3차원 해석에서는 전단변형과 회전관성효과가 고려되기 때문에 정확한 3차원 해석은 1차원 보이론 보다 작은 진동수를 주어야만 한다. 보가 깊어 질수록, % 차이는 더 커지는 것을 알 수 있으며, 변위의 파동 길이가 짧은 상위 진동수에서 이러한 효과들은 더욱 더 극명하게 나타난다.

6. 결 론

3차원인 Ritz해석으로 선형적으로 또는 비선형적로 테이퍼된 원형단면의 깊은 봉과 보의 진동수를 구하는 과정을 최초로 제시하였다.

본 해석에서는 등방성 재료에 대한 3차원적인 동탄성 방정식을 사용하였으며, '변형률이 작다' 라는 가정 이외에 그 어떤 변위에 관한 다른 구속을 두지 않았다. 바로 이 점이 변위의 변분에 관한 매우 제한적 가정을 하는 기존의 전통적인 1차원 봉과 보이론과 가장 큰 차이를 이룬다.

본 해석법은 간단하지만, 변위함수로 사용된 대수다항식의 항수를 증가시키면 엄밀해에 상위경계치로 수렴하는 정확한 진동수와 모드형상을 결정할 수 있다.

McGee와 Leissa[49]의 연구에 의하면, 3차원 유한요소법으로도 3차원 리츠법으로 구한 진동수의 정확도에 상응하는 결과치를 구할 수는 있지만, 일반적으로 훨씬 더 많은 자유도가 요구되어(즉, 고유치 행렬식의 차수가 훨씬 크다), 리츠법은 수치계산의 효율성을 지닌다. 또한 리츠법에서는 수학적으로 완비된 변위함수를 사용할 때 엄밀한 진동수의 상위 경계 수렴치가 보장되는 특징을 가진다.

본 연구에서 정식화된 장방정식(field equations) (2), (3), (5)와 에너지 범함수는 유한요소법, 유한차분법, Galerkin법, 에너지법 등을 이용하여 자유진동뿐만이 아니라 강제진동, 파동의 전달, 정적·동적 변위와 응력을 계산하는 데 사용될 수 있다.

본 연구에서 정식화된 에너지 범함수는 균질한 재료로 된 쉘 뿐만이 아니라 이질재료로 된 쉘에서도 적용이 가능하다. 이 때 λ, G, E, ρ는 상수가 아닌 함수로 표현된다.

감사의 글

심사자의 유익한 비평에 감사 드립니다.

본 논문은 2003학년도 중앙대학교 학술연구비 지원에 의한 것임을 밝힙니다.

참 고 문 헌

1. Pochhammer, L., "Über die Fortpflanzungsgeschwingdigkeiten kleiner Schwingungen in einem unbegrenzten isotropen Kreiszylinder", *J. Reine Angew. Math.*, Vol.81, 1876, pp.324~326
2. Chree, C., "Longitudinal waves of a solid bar", *Quart. J. Math.*, Vol.21, 1886, p.287
3. Chree, C., "The equations of an isotropic elastic

solid in polar and cylindrical coordinates, their solutions and application", *Trans. Cambridge Philos. Soc. Math. Phys. Sci.*, Vol.14, 1889, pp. 250~269
4. Pickett, G., "Flexural vibration of unrestrained cylinders and disks", *J. Appl. Phys.*, Vol.16, 1935, pp.820~831
5. McNiven, H.D., and Perry, D.C., "Axially symmetric waves in finite, elastic rods", *J. Acoust. Soc. Amer.*, Vol.34, 1962, pp.433~437
6. McMahon, G. W., "Experimental study of the vibrations of solid, isotropic, elastic cylinders", *J. Acoust. Soc. Amer.*, Vol.36, 1964, pp.85~92
7. McMahon, G. W., "Finite difference analysis of the vibrations of solid cylinders", *J. Acoust. Soc. Amer.*, Vol.48, 1970, pp.307~312
8. Tefft, W. E., "Numerical solution of the frequency equations for the flexural vibrations of cylindrical rods", *J. Res.*, (NBS) 64B, 1969, pp. 237~242
9. Rumerman, M., and Raynor, S., "Natural frequencies of finite circular cylinders in axially symmetric longitudinal vibration", *J. Sound Vib.*, Vol.15, 1971, pp.529~543
10. Gladwell, G. M. L., and Tahbildar, U. C., "Finite element analysis of the axisymmetric vibrations of cylinders", *J. Sound Vib.*, Vol.22, 1972, pp.143~157
11. Hutchinson, J. R., "Axisymmetric vibrations of a free finite length rod", *J. Acoust. Soc. Amer.*, Vol.51, 1972, pp.233~240
12. Hutchinson, J. R., "Vibrations of solid cylinders", *ASME J. Appl. Mech.*, Vol.47, 1980, pp. 901~907
13. Hutchinson, J. R, "Transverse vibrations of beams, exact versus approximate solutions", *ASME J. Appl. Mech.*, Vol.48, 1981, pp.923~928
14. Gladwell, G. M. L., and Vijay, D. K., "Natural frequencies of free finite length circular cylinders", *J. Sound Vib.* Vol.42, 1975, pp.387~397
15. Leissa, A. W., and So, J., "Comparisons of vibration frequencies for rods and beams from one-dimensional and three-dimensional analyses", *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol.98, No.4, 1995, pp.2122~2135
16. Leissa, A. W., and So, J., "Accurate vibration frequencies of circular cylinders from three-dimensional analysis", *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol.98, No.4, 1995, pp.2136~2141
17. Mabie, H. H., and Rogers, C. B., "Transverse vibrations of tapered cantilever beams with end loads", *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol.36, 1964, pp.463~469
18. Mabie, H. H., and Rogers, C. B., "Transverse vibrations of tapered cantilever beams with end support", *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol.44, 1968, pp.1739~1741
19. Mabie, H. H., and Rogers, C. B., "Transverse vibrations of double-tapered cantilever beams", *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol.51, 1972, pp.1771~1774
20. Mabie, H. H., and Rogers, C. B., "Transverse vibrations of double-tapered cantilever beams with end support and with end mass", *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol.55, 1974, pp.986~991
21. Conway, H. D., and Dubil, J. F., "Vibration frequencies of truncated cone and wedge beams", *ASME J. Appl. Mech.*, Vol.32, 1965, pp.923~935
22. Heidebrecht, A. C., "Vibration of non-uniform simply-supported beams", *ASCE J. Engng. Mech.*, Vol.93, 1967, pp.1~15
23. Wang, H.-C., "Generalized gypergeometric function solutions on the transverse vibration of a class of non-uniform beams", *ASME J. Appl. Mech.*, Vol.34, 1967, pp.702~708
24. Sanger, D. J., "Transverse vibration of a class of non-uniform beams", *Int. J. Mech. Engrg. Sci.*, Vol.16, 1968, pp.111~120
25. Klein, L., "Transverse vibrations of non-uniform beam", *J. Sound Vibr.*, Vol.37, 1974, pp. 491~505
26. Goel, R. P., "Transverse vibrations of tapered beams", *J. Sound Vibr.*, Vol.47, 1976, pp.1~7
27. Downs, B., "Reference frequencies for the validation of numerical solutions of transverse

vibration of non-uniform beams", *J. Sound Vibr.*, Vol.61, 1978, pp.71~78
28. To, C. W. S, "Higher order tapered beam finite elements for vibration analysis", *J. Sound Vibr.*, Vol.63, 1979, pp.33~50
29. Sato, K., "Transverse vibrations of linearly tapered beams with ends restrained elastically against rotation subjected to axial force", *Int. J. Mech. Sci.*, Vol.22, 1980, pp.109~115
30. Lau, J. H., "Vibration frequencies of tapered bars with end mass", *ASME J. Appl. Mech.*, Vol.51, 1984, pp.179~181
31. Banerjee, J. R., and Williams, F. W., "Exact Bernoulli-Euler dynamic stiffness matrix for a range of tapered beams", *Int. J. Num. Methods Engrg.*, Vol.21, 1985, pp.2289~2302
32. Banerjee, J. R., and Williams, F. W., "Further flexural vibration curves for axially loaded beams with linear or parabolic taper", *J. Sound Vibr.*, Vol.102, 1985, pp.315~327
33. Williams, F. W., and Banerjee, J. R., "Flexural vibration of axially loaded beams with linear or parabolic taper", *J. Sound Vibr.*, Vol. 99, 1985, pp.121~138
34. Kim, C. S., and Dickinson, S. M., "On the analysis of laterally vibrating slender beams subject to various complicating effects", *J. Sound Vibr.*, Vol.122, 1988, pp.441~455
35. Laura, P. A. A., Valerga de Greco, B., "Utjes, J. C., and Carnicer, R., Numerical experiments on free and forced vibrations of beams of non-uniform cross-section", *J. Sound Vibr.*, Vol.120, 1988, pp.587~596
36. Lee, S. Y., Ke, H. Y., and Kuo, Y. H., "Analysis of non-uniform beam vibration", *J. Sound Vibr.*, Vol.142, 1990, pp.15~29
37. Yang, K. Y., "The natural frequencies of a non-uniform beam with a tip mass and with translational and rotational springs", *J. Sound Vibr.*, Vol.137, 1990, pp.339~341
38. Alvares, S. I., Ficcadenti de Iglesias, G. M., and Laura, P. A. A., "Vibrations of an elastically restrained, non-uniform beam with translational and rotational springs, and with a tip mass", *J. Sound Vibr.*, Vol.120, 1991, pp. 465~471
39. Grossi, R. O., and Bhat, R. B., "A note on vibrating tapered beams", *J. Sound Vibr.*, Vol. 147, 1991, pp.174~178
40. Lee, S. Y., and Kuo, Y. H., "Exact solution for the analysis of general elastically restrained non-uniform beams", *ASME J. Appl. Mech.*, Vol.59, 1992, S205~S212
41. Craver Jr., W. L., and Jampala, P., "Transverse vibrations of a linearly tapered cantilever beam with constraining springs", *J. Sound Vibr.*, Vol.166, 1993, pp.521~529
42. Naguleswaran, S., "A direct solution of Euler-Bernoulli wedge and cone beams", *J. Sound Vibr.*, Vol.172, 1994, pp.289~304
43. Naguleswaran, S., "Vibration in the two principal planes of a non-uniform beam of rectangular cross-section, one side of which varies as the square root of the axial co-ordinate", *J. Sound Vibr.*, Vol.172, 1994, pp.305~319
44. Rosa, M. A., and Auciello, N. M., "Free vibrations of tapered beams with flexible ends", *Computers & Structures*, Vol.60, No.2, 1996, pp.197~202
45. Zhou, D., and Cheung, Y. K., "The free vibration of a type of tapered beams", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, Vol.188, 2000, pp.203~216
46. Sokolnikoff, I. S., *Mathematical theory of elasticity*, Second Edition, McGraw-Hill Book Co., New York, 1956.
47. Kantorovich, L. V., and Krylov, V. I., *Approximate methods in higher analysis*. Noordhoff, Gronigen, The Netherlands, 1958, pp.266~268
48. Ritz, W., "Über eine neue Methode zur Lsung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik", *Journal fr die Reine und Angewandte Mathematik*, Vol.135, 1909, pp.1~61
49. McGee, O. G. and Leissa, A. W., "Three-dimensional free vibrations of thick skewed cantilever plates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol.144, 1991, pp.305~322; Errata Vol.149, 1991, pp.539~542