

불규칙 가진을 받는 포화 진동계의 응답제어에 관한 확률밀도 추정

Approximate Probability Density for the Controlled Responses of Randomly Excited Saturated Oscillator

박 지 훈*

Park, Ji Hun

민 경 원†

Min, Kyung-Won

김 흥 진**

Kim, Hongjin

(논문접수일 : 2003년 4월 30일 ; 심사종료일 : 2003년 9월 5일)

요 지

제어기 포화를 고려한 비선형 제어 알고리즘은 폭넓게 연구되었으나 비선형성과 확률밀도함수(PDF)의 해석해가 존재하지 않기 때문에 알고리즘의 확률적 연구가 미진하여 왔다. 본 연구에서는, 제어기포화를 고려한 비선형 제어 알고리즘의 확률적 해석 방법이 등가 비선형 시스템 방법에 기초하여 제안되었다. 가우시안 백색잡음과 Kanai-Tagimi 필터통과 백색잡음에 의한 구조물 응답에 대하여 제안된 PDF 근사식을 이용하여 얻어진 결과를 통계적으로 얻어진 구조물 응답 PDF와 비교하여 정확성을 검증하였다.

핵심용어 : 확률밀도함수, 비선형제어알고리즘, 제어기포화, 뱅뱅제어

Abstract

The non linear control algorithm with actuator saturation for a randomly excited oscillator has been widely explored and has shown promising results, but the probabilistic analysis of the algorithm has been rarely made due to its non-linear nature and the fact that the analytical solution of probability density function (PDF) for controlled responses does not exist. In this paper, a method for the probabilistic analysis on the non linear control algorithm with actuator saturation is proposed based on the equivalent non linear system method. Numerical examples are given to verify the approximation solution of PDF comparing to a statistically obtained PDF using a Gaussian white noise and a Kanai-Tagimi filtered Gaussian white noise.

Keywords : probability density function, non-linear control algorithm, actuator saturation, bang bang control

1. 서 론

Wu와 Soong¹⁾의 연구 및 Cai 등²⁾의 연구에서 제안된 수정된 뱅뱅형(bang-bang type)제어 알고리즘의 특징은 기본적으로 설정된 상한치에 해당되는 제어력을 지속적으로 사용하되 제어력의 방향이 바뀌는 전이구간에서는 급격한 제어력 변화를 완화하기 위해 제어력의 방향을 결정하는 피드백 변수에 비례적인 제어력을 사용하도록 하고 있

다. 따라서 제어력 계산에 있어서 제어력의 방향이 바뀌는 '전이구간'과 응답이 커서 제어력의 상한치를 지속적으로 사용하는 '최대제어력 사용구간'을 설정할 수 있다.

본 연구에서는 전이구간에서는 속도피드백 선형제어를 수행하고 최대제어력 사용구간에서는 일정한 크기의 제어력을 사용하는 '포화제어' 알고리즘에 대한 확률적 해석을 시도한다. '포화제어'는 각각 양 및 음의 부호를 가지는 두 개의 최대제어력 사용구간을 연결하는 가장 간단한 형식으

† 책임저자, 정희원 · 단국대학교 건축공학과 부교수

전화: 02-709-2731 ; Fax: 02-799-1154

E-mail: kwmin@dankook.ac.kr

* 연구원, ㈜마이다스아이티, 공학박사

** 단국대학교 내진/리모델링 연구센터, 연구교수, 공학박사

• 이 논문에 대한 토론을 2003년 12월 31일까지 본 학회에 보내주 시면 2004년 3월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

로서 이미 잘 알려져 있는 알고리즘이다. 그러나 그 비선형성으로 인해 확률적 접근이 간과되어온 측면이 있다. 특히 확률밀도함수의 해석적 정해의 가득성(可得性) 조건을 만족시키지 못하므로 확률밀도함수의 근사해를 구할 수 있게 된다. 따라서 먼저 확률밀도함수의 근사해법 가운데 하나인 등가 비선형 시스템 이론을 요약하고 이를 포화제어에 적용하여 확률밀도 함수의 근사해를 유도한 뒤 수치해석 결과의 통계와 비교 검증한다.

2. 속도 피드백 포화제어 알고리즘

본 절에서는 포화제어 알고리즘의 수학적 표현에 대해서 간단히 정리한다. 먼저 제어대상이 되는 단자유도 진동계의 운동방정식은 다음과 같다.

$$\ddot{x} + 2\xi_0\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = \mathbf{b}_1\mathbf{w}(t) + b_2u \quad (1)$$

$$E[\mathbf{w}(t)\mathbf{w}(t+\tau)] = 2\pi\mathbf{S}_w\delta(\tau) \quad (2)$$

여기서 ξ_0 , ω_0 는 구조물의 감쇠비 및 고유진동수이며 x , \mathbf{w} , u , \mathbf{b}_1 , b_2 는 각각 구조물 변위, 가진입력 벡터, 제어력, 가진입력 영향행렬, 제어력 영향계수이다. 제어력 u 의 산정방식은 일반적인 고층건물의 고유진동수에 대해서는 속도피드백에 의한 구조물 감쇠의 증가가 응답특성의 개선에 효과적이므로 문제의 단순화를 위해 속도 피드백 제어로 한정한다. 이 때 제어력은 다음과 같이 정식화 할 수 있다.

$$u = -u_{max} \text{sat}\left(\frac{G}{u_{max}}\dot{x}\right) \quad (3)$$

여기서 $\text{sat}(\cdot)$ 는 다음과 같이 정의되는 함수이다.

$$\text{sat}(a) = \begin{cases} 1 & (a > 1) \\ a & (|a| < 1) \\ -1 & (a < -1) \end{cases} \quad (4)$$

식(3)에서 u_{max} 는 제어력의 상한치이며 G 는 포화현상 발생 이전의 선형제어 구간 제어이득이다. 포화제어에 의한 제어력 산정을 도시하면 그림 1(a)와 같다. 여기서 제어력을 비선형 제어이득을 가지는 속도피드백 형태로 다시 쓰면 다음과 같으나 에너지의 함수가 아니므로 확률밀도함수의 해석적 정해를 구하기 힘들다.³⁾

$$u = -f(\dot{x})\dot{x} \quad (5)$$

$$f(\dot{x}) = u_{max} \text{sat}\left(\frac{G}{u_{max}}\dot{x}\right)\frac{1}{\dot{x}} \quad (6)$$

속도 \dot{x} 에 대한 비선형 제어이득 $f(\dot{x})$ 의 변화양상은 그림 1(b)와 같으며 응답이 작은 구간, 다시 말해서 선형제어 구간에서는 제어이득이 일정하고 u_{max} 와는 독립적으로 G 에 의해서만 간단히 제한될 수 있다. 또한 선형제어 구간은 G 가 결정된 경우 u_{max} 에 의해서 조정이 가능하다.

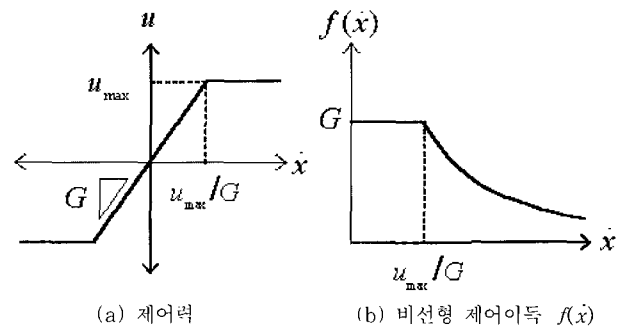


그림1 포화제어의 개념도

3. 등가 비선형 시스템 이론

위와 같은 제어 알고리즘은 비선형 제어 알고리즘이면서 속도피드백 제어이득이 에너지의 함수가 아닌 구조물 속도만의 함수이므로 페루프 시스템이 일반화 정상상태 포텐셜 군(class of generalized stationary potential)의 범주를 벗어난다. 따라서 그 응답의 확률밀도함수의 해석적 정해가 아직까지 존재하지 않는다. 축소 Fokker-Planck 방정식의 해석해가 존재하지 않는 경우에 확률밀도함수를 근사적으로 구하는 방법으로서 Gaussian closure, non-Gaussian closure, stochastic averaging, 등가비선형 시스템 방법 등의 다양한 방법이 연구되어 왔다.³⁾ Gaussian closure 기법은 응답의 비선형성이 강한 경우에 결과가 부정확하고 non-Gaussian closure 기법은 고차의 연립방정식을 풀어야 하는 단점이 있다. Stochastic averaging 방법은 비선형성과 가진입력의 크기가 작은 경우에 적용되는 기법이며 복잡한 과정을 거치는 반면에 등가비선형 시스템 방법은 비선형성과 가진입력의 크기에 제한이 없고 보다 간편한 방법으로 확률밀도함수의 근사식을 구할 수 있다는 장점이 있다. 따라서 본 연구에서는 Cai와 Lin⁴⁾이 제안한 등가비선형 시스템 방법을 이용하여 유사 뱁뱁제어의 확률밀도 함수 근사해를 구하여 정확성을 검증하기로 한다.

먼저 식(1)와 유사한 다음 단자유도 비선형 진동계를 대상으로 한다.

$$\ddot{x} + h_0(x, \dot{x}) = \mathbf{b}_1 \mathbf{w}(t) \quad (7)$$

여기서, x 는 구조물의 변위, $h_0(x, \dot{x})$ 는 구조물의 선형 또는 비선형의 감쇠력 및 복원력을 포함하는 일반항이다. 위의 단자유도 비선형 진동계는 일반화 정상상태 포텐셜 군에 속하지 않으며, 따라서 축소 Fokker-Planck 방정식의 해가 존재하지 않는 것으로 가정한다.⁵⁾ 또한 $h_0(x, \dot{x})$ 는 다음과 같이 에너지 소산 항 $h_0(x, \dot{x})$ 와 에너지 보존 항 $u(x)$ 로 분리할 수 있으며 에너지 보존항은 선형 스프링의 형태를 가진다고 가정하고 질량이 1로 정규화 되어 있으므로 스프링 상수는 고유진동수 ω_0 의 제곱 형태로 주어진다고 가정한다.

$$h_0(x, \dot{x}) = d(x, \dot{x}) + u_s(x) \quad (8)$$

$$u_s(x) = \omega_0^2 x \quad (9)$$

다음으로 위의 단자유도 비선형 진동계를 대체할 등가 비선형 진동계를 다음과 같이 정의한다.

$$\ddot{x} + h(x, \dot{x}) = \mathbf{b}_1 \mathbf{w}(t) \quad (10)$$

여기서 $h(x, \dot{x})$ 는 등가 비선형 시스템의 선형 또는 비선형의 감쇠력 및 복원력을 포함하는 일반항으로서 다음과 같은 조건을 통해 일반화 정상상태 포텐셜 군에 속하는 것으로 가정한다.

$$h(x, \dot{x}) = [\mathbf{p} \mathbf{b}_1 \mathbf{S}_w \mathbf{b}_1^T \phi'(H)] \dot{x} + u_s(x) \quad (11)$$

여기서 u_s 는 복원력 함수이며 H 는 등가 비선형진동계의 에너지로서 다음과 같고 $\phi'(H)$ 는 임의의 에너지의 함수이다.

$$H = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \int u_s(x) dx \quad (12)$$

이 때 확률분포식은 다음과 같음을 보일 수 있으며 C 는 정규화 계수이다.⁴⁾

$$P(x, \dot{x}) = C e^{-\phi(H)} \quad (13)$$

등가 비선형 진동계는 식(11)의 $\phi'(H)$ 에 의해서 결정되며 다음과 같이 정의 되는 원래 비선형 진동계와 등가 비선형 진동계의 오차 ε 를 최소화 할 수 있는 $\phi'(H)$ 를 구하는 것이 목표가 된다.

$$\begin{aligned} \varepsilon &= h_0(x, \dot{x}) - h(x, \dot{x}) \\ &= d(x, \dot{x}) - [\mathbf{p} \mathbf{b}_1 \mathbf{S}_w \mathbf{b}_1^T \phi'(H)] \dot{x} \end{aligned} \quad (14)$$

위와 같이 정의된 오차를 최소화 하는 기준으로 다음 식을 사용하며 이는 오차함수가 에너지 소산력의 차이이므로 두 개의 진동계의 평균 소산에너지가 같다고 가정하는 의미를 지닌다.

$$E[\dot{x}\varepsilon] = 0 \quad (15)$$

확률밀도함수를 사용하여 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(x, \dot{x}) \dot{x} [d(x, \dot{x}) - \{\mathbf{p} \mathbf{b}_1 \mathbf{S}_w \mathbf{b}_1^T \phi'(H)\} \dot{x}] dx d\dot{x} = 0 \quad (16)$$

여기서 다음과 같은 가정을 사용하여 적분 변수를 치환하며 확률밀도함수 $P(x, \dot{x})$ 가 에너지 H 의 함수라고 가정하여 $P(H)$ 로 표기한다면 식(16)은 다음과 같이 쓸 수 있다.⁴⁾

$$x = \frac{\sqrt{2H}}{\omega} \cos \theta, \quad \dot{x} = \sqrt{2H} \sin \theta \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} P(H) \sqrt{2H} \int_0^{2\pi} [\sin \theta [d(H, \theta) \\ - \{\mathbf{p} \mathbf{b}_1 \mathbf{S}_w \mathbf{b}_1^T \phi'(H)\} \sqrt{2H} \sin \theta] \frac{(-1)}{\omega} d\theta dH = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

위 식에서 구조물의 응답을 조화함수 형태로 가정하고 있음을 알 수 있으며 단자유도 진동계의 감쇠비가 아주 크지 않다면 백색잡음에 대한 응답은 현대역확률과정으로서 조화함수에 가깝기 때문에 합리적인 가정이라 할 수 있다. 위 식에서 확률밀도 함수는 미지의 함수이므로 H 에 관한 적분이 불가능하므로 원래의 조건식보다 좀더 강한 조건식을 사용하여 θ 에 관한 적분을 0으로 놓으면 다음과 같으며 이로부터 $\phi'(H)$ 를 구할 수 있다.

$$\int_0^{2\pi} \sin \theta [d(H, \theta) - \{\mathbf{p} \mathbf{b}_1 \mathbf{S}_w \mathbf{b}_1^T \phi'(H)\} \sqrt{2H} \sin \theta] \frac{(-1)}{\omega} d\theta = 0 \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \phi'(H) &= \frac{\int_0^{2\pi} d(H, \theta) \sin \theta d\theta}{\pi \mathbf{b}_1 \mathbf{S}_w \mathbf{b}_1^T \sqrt{2H} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta} \\ &= \frac{\int_0^{2\pi} d(H, \theta) \sin \theta d\theta}{\pi^2 \mathbf{b}_1 \mathbf{S}_w \mathbf{b}_1^T \sqrt{2H}} \end{aligned} \quad (20)$$

마지막으로 구해진 $\phi'(H)$ 를 적분해서 식(13)에 대입한 뒤 이 식에서의 정규화 상수 C 를 계산하면 확률밀도함수를 얻는다.

4. 포화제어 페루프 시스템의 등가 비선형 시스템

본 절에서는 앞에서 설명한 등가 비선형 시스템 기법을 사용하여 포화제어를 수행하는 단자유도 진동계의 페루프 시스템 확률밀도함수를 구한다. 식(3)으로부터 유사 뱁뱁 제어의 페루프 시스템은 다음과 같다.

$$\ddot{x} + 2\xi_0 \omega_0 \dot{x} + b_2 u_{\max} \text{sat}\left(\frac{G}{u_{\max}} \dot{x}\right) + \omega_0^2 x = \mathbf{b}_1 \mathbf{w}(t) \quad (21)$$

여기서 에너지 소산에 관한 항 $d(x, \dot{x})$ 는 다음과 같다.

$$d(x, \dot{x}) = 2\xi_0 \omega_0 \dot{x} + b_2 u_{\max} \text{sat}\left(\frac{G}{u_{\max}} \dot{x}\right) \quad (22)$$

식(17)를 이용해서 변수를 변환하면 에너지 소산항 $d(x, \dot{x})$ 는 H 및 θ 의 함수로서 다음과 같이 바꿔 쓸 수 있다.

$$d(x, \dot{x}) = 2\xi_0 \omega_0 \dot{x} + b_2 u_{\max} \text{sat}\left(\frac{G}{u_{\max}} \dot{x}\right) \quad (23)$$

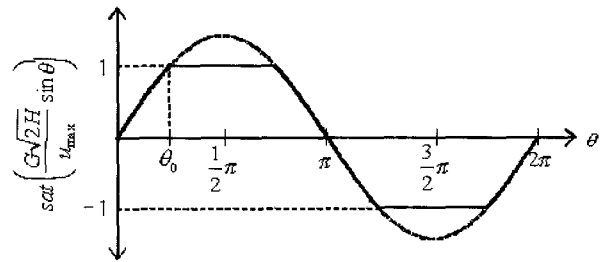
$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} d(H, \theta) \sin \theta d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\xi_0 \omega_0 \sqrt{2H} \sin^2 \theta + b_2 u_{\max} \text{sat}\left(\frac{G\sqrt{2H}}{u_{\max}} \sin \theta\right) \sin \theta \right] d\theta \quad (24) \\ &= 2\pi \xi_0 \omega_0 \sqrt{2H} + 4b_2 u_{\max} \int_0^{\pi/2} \text{sat}\left(\frac{G\sqrt{2H}}{u_{\max}} \sin \theta\right) \sin \theta d\theta \end{aligned}$$

위 식(24)의 마지막 적분항은 다음과 같이 계산할 수 있다.

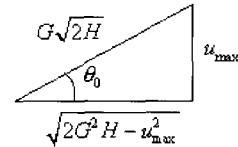
$$\begin{aligned} &\int_0^{\pi/2} \text{sat}\left(\frac{G\sqrt{2H}}{u_{\max}} \sin \theta\right) \sin \theta d\theta \\ &= \int_0^{\theta_0} \frac{G\sqrt{2H}}{u_{\max}} \sin^2 \theta d\theta + \int_{\theta_0}^{\pi/2} \sin \theta d\theta \quad (25) \\ &= \frac{G\sqrt{2H}}{2u_{\max}} [\theta_0 - \sin \theta_0 \cos \theta_0] + \cos \theta_0 \end{aligned}$$

위 식에서 필요한 θ_0 는 그림 2(a)에서 포화현상이 발생하는 지점을 의미하므로 θ_0 및 $\sin \theta_0$, $\cos \theta_0$ 는 그림 2(b)로부터 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \theta_0 &= \sin^{-1}\left(\frac{u_{\max}}{G\sqrt{2H}}\right) \\ \sin \theta_0 &= \frac{u_{\max}}{G\sqrt{2H}} \\ \cos \theta_0 &= \frac{\sqrt{2G^2H - u_{\max}^2}}{G\sqrt{2H}} \end{aligned} \quad (26)$$



(a) 응답의 조화함수 가정에 의한 제어력 포화 양상



(b) θ_0 의 도해

그림 2 제어력 포화 양상

따라서 식(24)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} d(H, \theta) \sin \theta d\theta \\ &= 2\pi \xi_0 \omega_0 \sqrt{2H} \\ &\quad + 4b_2 u_{\max} \left[\frac{G\sqrt{2H}}{2u_{\max}} \sin^{-1}\left(\frac{u_{\max}}{G\sqrt{2H}}\right) + \frac{\sqrt{2G^2H - u_{\max}^2}}{2G\sqrt{2H}} \right] \end{aligned} \quad (27)$$

따라서 식(20)의 $\phi'(H)$ 는 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\phi'(H) = \frac{1}{\pi^2 \mathbf{b}_1 \mathbf{S}_w \mathbf{b}_1^T} [2\pi \xi_0 \omega_0 + b_2 G \psi_0'(\gamma)] \quad (28)$$

여기서

$$\psi_0'(\gamma) = 2 \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right) + 2 \frac{\sqrt{\gamma-1}}{\gamma} \quad (29)$$

$$\gamma = \rho H ; \quad \rho = \frac{2G^2}{u_{\max}^2} \quad (30)$$

여기서 변수 γ 의 의미는 앞서 가정한 바와 같이 응답이 조화함수일 때 요구되는 선형 제어력이 u_{max} 보다 큰 경우에도 포화현상 없이 있는 그대로 계산되는 제어력의 피크 값과 u_{max} 의 비율의 제곱이라고 할 수 있다. 그런데 식(29)가 실수함수가 되려면 이 식에 포함된 근호 안이 양수가 되어야 하고 이를 위해서는 γ 가 1보다 큰 값을 가져야 함을 알 수 있다. 이와 같은 조건이 어떤 의미를 갖는지 알아보기 위하여 먼저 γ 가 1보다 작은 값을 갖는 것이 어떤 의미를 가지는지 알아보도록 한다. 먼저 γ 는 무차원 변수로서 1보다 작다 함은 다음과 같이 바꿔 쓸 수 있다.

$$1 > \sqrt{\gamma} = \frac{G\sqrt{2H}}{u_{max}} \Leftrightarrow G\sqrt{2H} < u_{max} \quad (31)$$

앞서 가정한 식(17)으로부터 포화제어의 제어력은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$u = -u_{max} \text{sat}\left(\frac{G}{u_{max}} \dot{x}\right) = -u_{max} \text{sat}\left(\frac{G}{u_{max}} \sqrt{2H} \sin \theta\right) \quad (32)$$

여기에서 식(31)을 고려하면 다음과 같이 단순화 된다.

$$u = -G\dot{x} \quad (33)$$

따라서 γ 가 1보다 작은 값을 가지면 제어력 포화현상이 일어나지 않음을 알 수 있다. 따라서 γ 가 1보다 작은 값을 가지는 구간에서는 $\phi'(H)$ 가 선형제어와 동일한 함수라고 할 수 있다. 이는 $\psi'_0(\gamma)$ 의 극한값으로부터도 확인된다.

$$\lim_{\gamma \rightarrow 1} \psi'_0(\gamma) = \lim_{\gamma \rightarrow 1} \left[2 \sin^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \right) + 2 \frac{\sqrt{\gamma-1}}{\gamma} \right] = \pi \quad (34)$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow 1} \phi'(H) = \frac{[2\xi_0\omega_0 + b_2G]}{\pi \mathbf{b}_1 \mathbf{S}_w \mathbf{b}_1^T} \quad (35)$$

따라서 $\phi'(H)$ 는 γ 의 구간에 따라서 다음과 같이 정의할 수 있으며 이를 구간별로 적분하여 (13)으로부터 확률밀도 함수를 얻게 된다.

$$\phi'(H) = \begin{cases} \frac{[2\xi_0\omega_0 + b_2G]}{\pi \mathbf{b}_1 \mathbf{S}_w \mathbf{b}_1^T} & (\gamma < 1) \\ \frac{1}{\pi^2 \mathbf{b}_1 \mathbf{S}_w \mathbf{b}_1^T} [2\pi\xi_0\omega_0 + b_2G\psi'_0(\gamma)] & (\gamma \geq 1) \end{cases} \quad (36)$$

여기서 $\psi'_0(\gamma)$ 및 γ 는 식(29)와 (30)의 정의에 따른다.

5. 확률밀도함수의 근사식

확률밀도함수를 얻기 위해 식(36)을 부정적분할 때 $\gamma \geq 1$ 인 범위에 대해서는 $\psi'_0(\gamma)$ 의 부정적분의 해석해를 구하기 어려우므로 $1 \leq \gamma \leq \gamma_{max}$ 의 범위에서 선형 회귀분석을 통해 $\psi'_0(\gamma)$ 를 다음과 같이 적분가능한 함수로 근사화 한다.

$$\psi'(\gamma) = a_0 + a_1\gamma^{-1/2} + a_2\gamma^{-1} + a_3\gamma^{-3/2} \quad (37)$$

위의 근사식을 이용해서 $\phi'(H)$ 을 H 에 대해 적분하면 다음과 같다.

$$\phi(H) = \frac{1}{\pi \mathbf{b}_1 \mathbf{S}_w \mathbf{b}_1^T} \left[\frac{2\xi_0\omega_0 H + \frac{b_2G}{\pi} \times \left\{ a_0 H + 2a_1 \sqrt{\frac{H}{\rho}} + a_2 \frac{\ln(\rho H)}{\rho} - 2a_3 \sqrt{\frac{H}{\rho^3}} \right\}} \right] \quad (38)$$

회귀분석에 필요한 구속조건은 $\phi'(H)$ 가 제어력 포화가 일어나는 $r \leq 1$ 인 지점을 중심으로 두가지 표현식을 가지게 되므로 이 점에서의 연속성에 관한 두개의 구속조건이 된다.

먼저 $\psi'_0(\gamma)$ 는 γ 가 1인 점을 기준으로 선형제어와 포화제어의 식으로 나뉘어 지며 이 점에서 연속성을 가져야 하므로 근사식 $\psi'(\gamma)$ 에 대해서도 동일한 연속성이 요구된다. 따라서 식(34)로부터 회귀분석에 필요한 다음 구속조건식을 얻을 수 있다.

$$\lim_{\gamma \rightarrow 1} \psi'(\gamma) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = \pi \quad (39)$$

다음으로는 $\phi'(H)$ 와 관계된 구속조건을 유도한다. 포화현상이 일어나지 않는 응답 수준에 대해서는 선형제어시와 동일한 $\phi(H)$ 를 가져야 한다. 선형제어시의 함수를 $\phi_{linear}(H)$ 라고 하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\phi_{linear}(H) = \frac{(2\xi_0\omega_0 + b_2G)H}{\pi \mathbf{b}_1 \mathbf{S}_w \mathbf{b}_1^T} \quad (40)$$

포화제어시의 $\phi(H)$ 에서 응답수준이 제어력 포화가 일어나지 않는 수준이라고 함은 γ 가 1보다 작거나 같음을 의미 하며 따라서 γ 가 1인 부분에서의 이 함수가 선형제어시의 $\phi_{linear}(H)$ 와 연속성을 가지기 위해서는 다음과 같은 구속조건식이 필요하게 된다.

$$\lim_{\gamma \rightarrow 1} \phi(H) = \lim_{\gamma \rightarrow 1} \phi_{linear}(H) \quad (41)$$

식(30)로부터 γ 에 관한 위의 극한은 다음과 같이 H 에 관한 극한으로 대체할 수 있으며 이로부터 구속조건식이 도출된다.

$$\lim_{H \rightarrow \rho} \phi(H) = \lim_{H \rightarrow \rho} \phi_{linear}(H) \Leftrightarrow \left[\frac{2\xi_0\omega_0}{\rho} + \frac{b_2G(a_0 + 2a_1 - 2a_3)}{\pi\rho} \right] = \left[\frac{2\xi_0\omega_0 + b_2G}{\rho} \right] \quad (42)$$

$$\Leftrightarrow a_0 + 2a_1 - 2a_3 = \pi$$

구속조건식(39)과 (42)는 다음과 같이 고쳐 쓸 수 있다.

$$a_0 = \pi - a_1 - a_2 - a_3 \quad (43)$$

$$a_1 = a_2 + 3a_3 \quad (44)$$

위의 두개의 구속조건식을 이용하면 식(37)는 다음과 같이 변형될 수 있다.

$$\begin{aligned} \psi'(\gamma) &= \pi + a_1(\gamma^{-1/2} - 1) + a_2(\gamma^{-1} - 1) + a_3(\gamma^{-3/2} - 1) \\ &= \pi + a_2(\gamma^{-1/2} + \gamma^{-1} - 2) + a_3(3\gamma^{-1/2} + \gamma^{-3/2} - 4) \end{aligned} \quad (45)$$

회귀분석을 하기 위해 분석 범위 안의 γ 값에 대해 구성되는 식(45)를 모아서 다음과 같이 행렬식으로 표현한다.

$$\begin{aligned} \mathbf{Xa} &= \mathbf{Y} \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \gamma_1^{-1/2} + \gamma_1^{-1} - 2 & 3\gamma_1^{-1/2} + \gamma_1^{-3/2} - 4 \\ \gamma_2^{-1/2} + \gamma_2^{-1} - 2 & 3\gamma_2^{-1/2} + \gamma_2^{-3/2} - 4 \\ \vdots & \vdots \\ \gamma_n^{-1/2} + \gamma_n^{-1} - 2 & 3\gamma_n^{-1/2} + \gamma_n^{-3/2} - 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \psi'(\gamma_1) - \pi \\ \psi'(\gamma_2) - \pi \\ \vdots \\ \psi'(\gamma_n) - \pi \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (46)$$

최소제곱추정(least square estimation)에 의해 다음과 같이 파라미터 a_2, a_3 을 구할 수 있으며 나머지 파라미터 a_0, a_1 은 구속조건식(43)과 (44)로부터 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \mathbf{a} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y} \quad (47)$$

여기서 문제가 되는 것은 회귀분석을 수행하는 범위 γ_{max} 이다 γ_{max} 를 너무 크게 잡으면 γ 가 1에 가까운 값을 가지는 부분이 부정확해지기 때문이다. γ_{max} 의 값은 다음

과 같은 기준을 통해 선정할 수 있다. 먼저 동일한 제어이득으로 포화현상이 일어나지 않는 완전한 선형제어를 수행한다면 가정 (17)에 의해서 이 때의 최대제어력 $u_{max, linear}$ 는 다음과 같다.

$$u_{max, linear} = G\dot{x}_{max} = G\sqrt{2H} \quad (48)$$

이로부터 γ 의 제곱근은 동일한 제어이득으로 선형제어를 수행할 때의 최대제어력과 포화제어에 의한 최대제어력의 비를 의미한다고 할 수 있다.

$$\sqrt{\gamma} = \frac{G\sqrt{2H}}{u_{max}} = \frac{u_{max, linear}}{u_{max}} \quad (49)$$

따라서 제어이득 G 의 크기가 커질수록 회귀분석의 범위는 커져야 하며 적절한 γ_{max} 는 포화제어에 의해 감소된 속도응답의 최대치를 예측하고 이 최대 속도응답에 제어이득 G 를 곱해서 선형 최대 제어력을 예측하여 포화제어시의 최대 제어력과 비교함으로써 얻어질 수 있다. 표 1은 γ_{max} 의 값에 따른 회귀분석 결과를 정리한 것이다. 여기서 식(46)에 사용된 데이터의 갯수 n 은 10으로 하였다. 표에서 볼 수 있듯이 γ_{max} 의 값에 따라 파라미터의 값이 크게 변화함을 알 수 있으며 따라서 적절한 γ_{max} 의 선정이 중요함을 알 수 있다.

표 1 포화제어 시스템에서 $\phi'(H)$ 의 근사식 회귀분석 결과

a_i	γ_{max}			
	2	4	16	100
a_0	2.7668	3.0945	-1.2106	-0.17202
a_1	-6.7552	-9.2756	13.103	6.2566
a_2	14.073	18.622	-19.678	-7.5427
a_3	-6.9426	-9.2991	10.927	4.5998

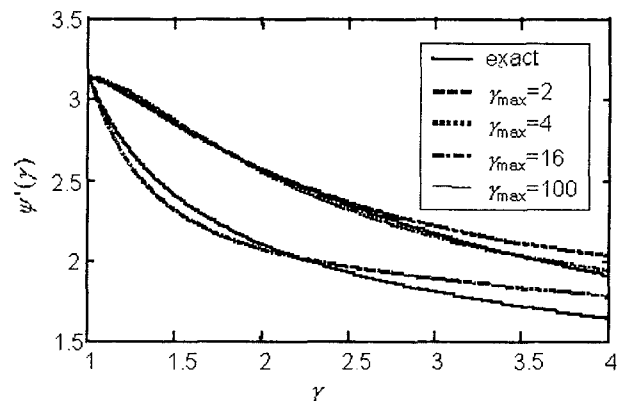


그림 3 $\psi'(\gamma)$ 와 근사식 $\psi(\gamma)$ 의 비교

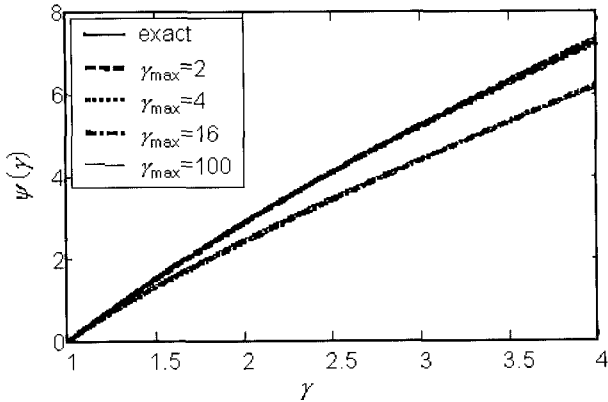


그림 4 수치적분에 의한 $\psi_0(\gamma)$ 와 근사식의 $\psi(\gamma)$ 의 비교

근사식의 정확도를 알아보기 위해서 그려본 $\psi'_0(\gamma)$ 와 근사식 $\psi'(\gamma)$ 의 형상은 그림 3과 같다. γ_{max} 가 4인 경우에 근사식이 원래 식과 가장 잘 일치함을 알 수 있다. γ_{max} 가 2인 경우에도 γ 가 2.5보다 작은 구간에서는 상당히 잘 일치함을 볼 수 있으며 16과 100인 경우에는 전혀 틀림을 볼 수 있다. 그러나 가장 잘 맞는 γ_{max} 가 4인 경우에도 증가함에 따라 점차 오차가 커짐을 볼 수 있다.

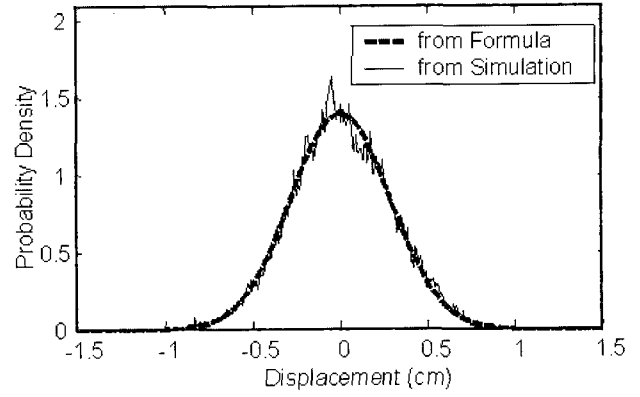
그러나 $\psi'_0(\gamma)$ 는 적분을 통해 $\phi(H)$ 을 구하는데 사용되므로 실질적으로 중요한 것은 $\psi_0(\gamma)$ 라고 할 수 있다. 따라서 $\psi'_0(\gamma)$ 의 수치적분 결과로 얻어진 $\psi_0(\gamma)$ 와 $\psi(\gamma)$ 도 비교해 볼 필요가 있으며 이는 그림 4와 같다. 이 그림에서는 γ_{max} 가 2인 경우에 γ 가 2.5보다 큰 구간에서도 원래 식과 잘 일치함을 볼 수 있으며, 4인 경우에는 거의 일치함을 볼 수 있다.

지나치게 큰 제어이득을 사용하게 되면 동력기가 제어력 신호를 제대로 구현하지 못할 수 있으며 또한 구조물의 가속도응답에 좋지 않은 영향을 미칠 수 있으므로 적절한 제어이득을 선택할 필요가 있게 되며 따라서 선형제어력과 포화제어력 사이의 비율 γ 는 4를 넘는 경우가 많지 않을 것으로 판단된다. 따라서 본 연구에서는 γ_{max} 가 4인 경우의 파라미터를 사용하는 것으로 한다. 또한 구해진 확률밀도함수가 근사식이므로 뒤에 해석예제에서 이 근사식에 대한 통계적 검증을 실시하도록 한다.

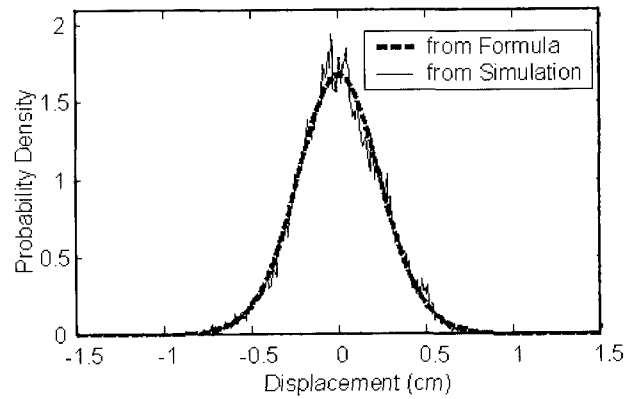
6. 해석예제

6.1 확률밀도함수 근사식의 통계적 검증

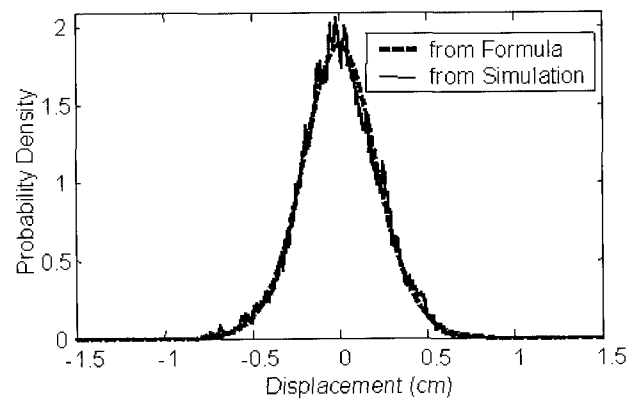
본 절에서는 앞서 유도한 포화제어 페루프 시스템 확률밀도함수 근사식의 정확성을 검증하기 위해서 이에 대한 통계적 검증을 실시한다. 먼저 대상 구조물의 파라미터는



(a) $\xi_{sl}=0.10$



(b) $\xi_{sl}=0.15$



(c) $\xi_{sl}=0.20$

그림 5 포화제어시스템 변위확률밀도함수의 통계적 검증(백색잡음 가진입력)

$\xi_0=0.02$, $\omega_0 = \pi(\text{rad/sec})$, $b_1=1$, $b_2=1$, $u_{max}=1(\text{N})$ 으로 선정하였다.

가진 시간은 700초이며 구조물의 응답이 충분히 정상상태에 도달한 상태인 100초에서 700초 사이의 총 10분간에 해당하는 데이터로부터 통계적으로 확률밀도함수를 구하였다. 가진입력이 백색잡음인 경우에 대한 통계적 검증결과는 그림 5 및 6과 같으며 여기서 사용된 백색잡음의

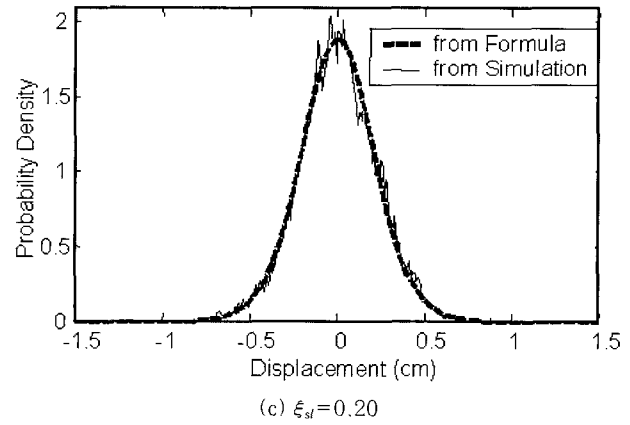
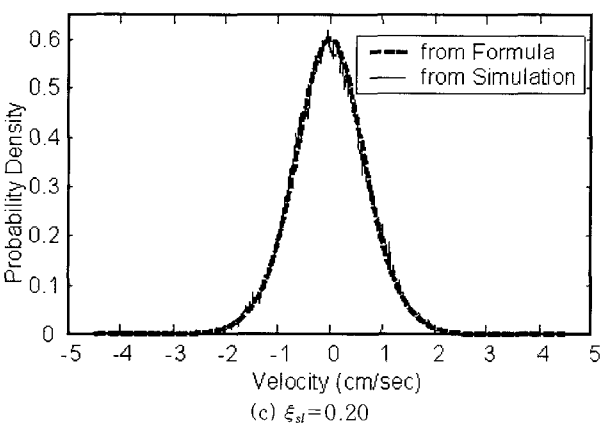
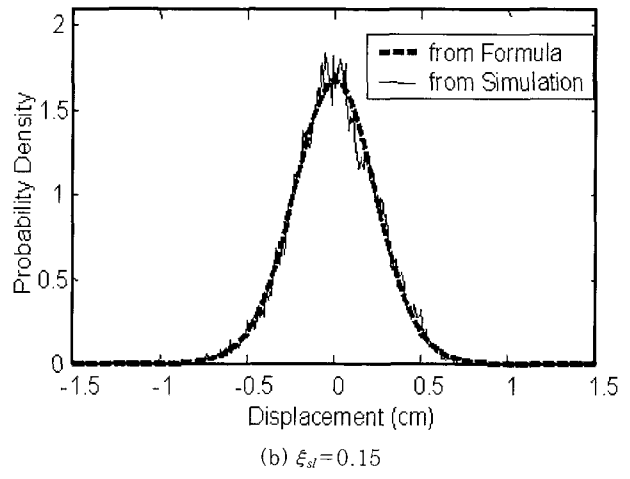
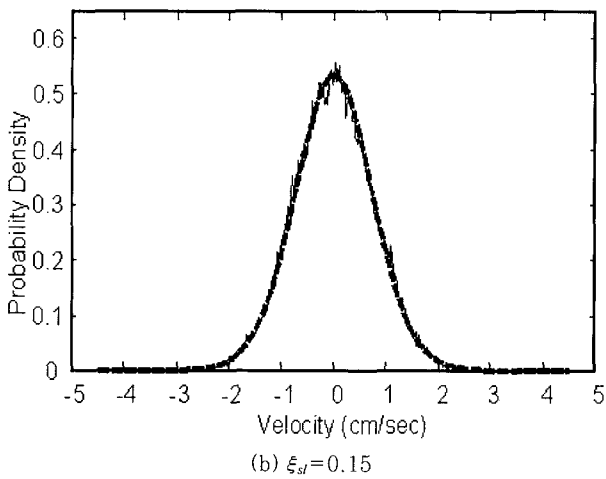
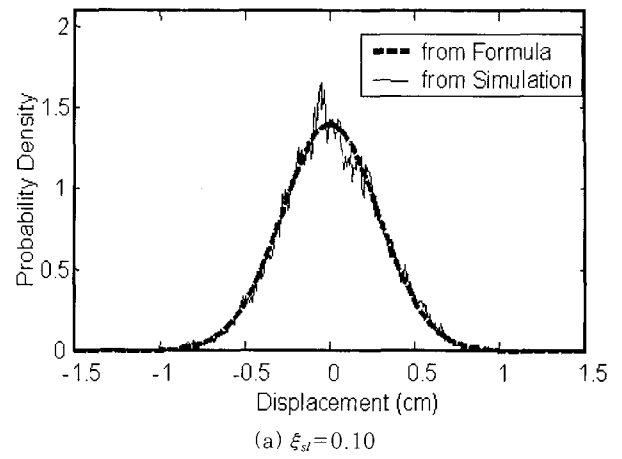
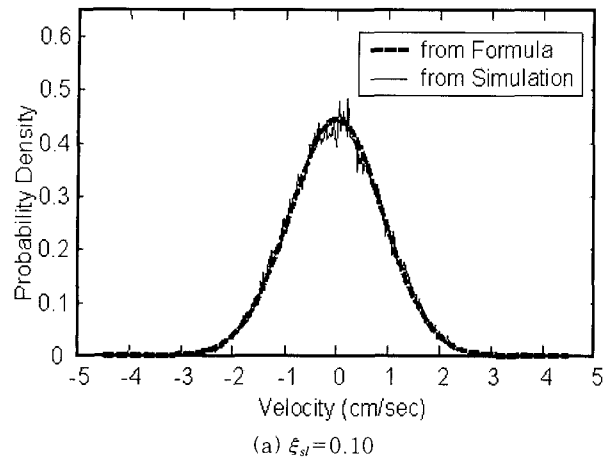


그림 6 포화제어 시스템 속도확률밀도함수의 통계적 검증(백색잡음 가진입력)

그림 7 포화제어 시스템 변위 확률밀도함수의 통계적 검증(필터 통과 백색잡음 가진입력)

파워 스펙트럼 밀도(PSD)는 $S_w = 0.5\pi$ 를 사용하였다. 그림에서 ξ_{st} 은 식(3)에서 제어력 포화가 발생하지 않을 때의 선형제어 이득 G 에 의해 얻어지는 페루프 시스템 목표감쇠비이다.

또한 Kanai-Tagimi 필터통과 백색잡음에 대해서도 동일한 시간동안 통계적 검증을 실시하였으며 그림 7, 8과 같다. 여기서 필터 고유진동수는 15.6(rad/sec), 감쇠비

는 0.6을 사용하였고 백색잡음의 PSD는 동일하게 0.5π 로 선정하였다.⁶⁾ 이때 구조물 고유진동수 0에서 필터의 크기가 1이 아니므로 이에 맞춰 스케일링을 해준 가진입력을 사용하였다. 가진입력이 백색잡음인 경우와 필터통과 백색잡음인 경우 모두 근사식에 의한 확률밀도함수가 통계적으로 구해진 확률밀도와 잘 일치함을 볼 수 있다.

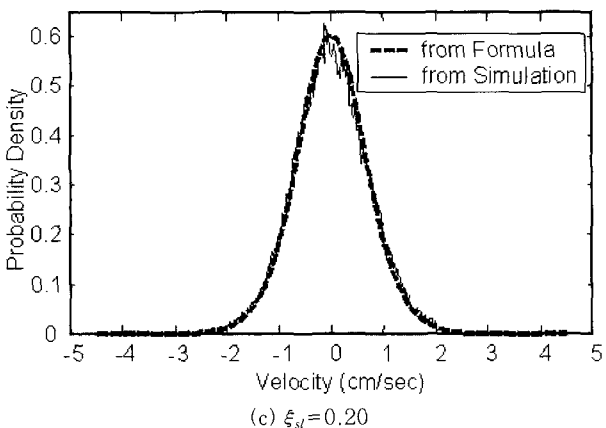
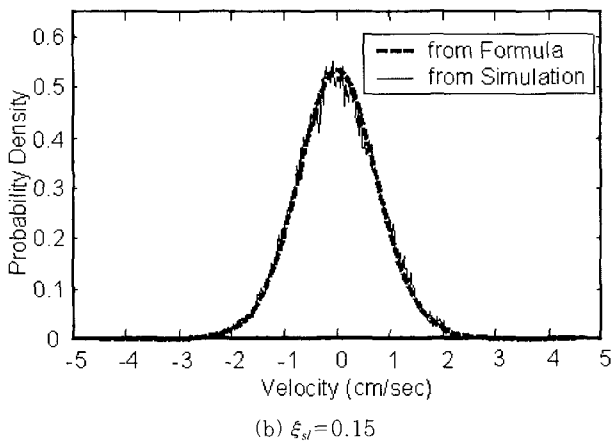
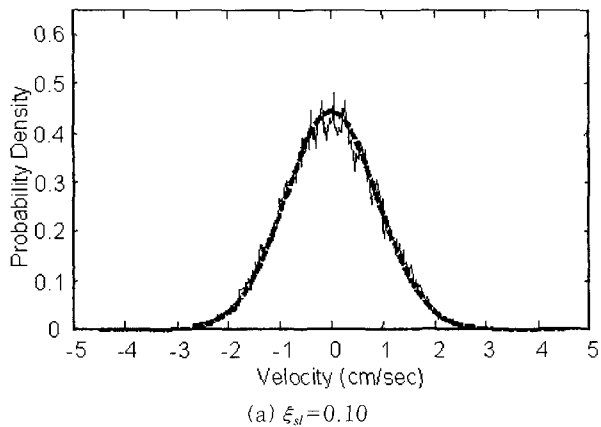


그림 8 포화제어 시스템 속도 확률밀도함수의 통계적 검증(필터 통과 백색잡음 가진입력)

7. 결 론

능동제어를 이용한 구조물의 제어는 가진기 능력의 제한 때문에 제어기 포화현상을 고려하여야 한다. 따라서 제어기의 능력을 최대한 이용하는 뱅뱅제어 알고리즘과 떨림현상(chattering)방지를 고려한 수정뱅뱅제어 알고리즘이 이용되어 왔다. 이러한 알고리즘은 외력에 비례하여 제

어력을 산정하지 않기 때문에 비선형 제어알고리즘이며 확률밀도함수를 이용한 확률적 해석이 이루어지지 않고 있었다. 확률적 해석은 불규칙하중에 관하여 구조물의 선형모델이 존재할 경우 용이하게 응답의 평균 및 최대값을 예측할 수 있는 장점이 있다. 본 연구에서는 제어기포화를 고려한 비선형 제어알고리즘의 확률적 해석방법을 유도하기 위하여 등가의 선형알고리즘을 이용하였다. 유도된 방법의 정확성은 가우시안 백색잡음과 Kanai-Tagimi 필터를 사용한 가우시안 백색잡음을 사용하여 얻어진 구조물 응답의 PDF와 비교하여 검증하였다.

감사의 글

본 연구는 스마트 사회기반 시설연구센터(SISTeC)의 “지원과제명-건축구조물의 스마트 진동제어기술 개발”의 연구비 지원으로 수행 되었으며 이에 깊은 감사를 드립니다.

참 고 문 헌

1. Wu, Z. and Soong, T. T., “Modified Bang-Bang Control Law for Structural Control Implementation”, *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, Vol.122, No.8, 1996, pp.771~777
2. Cai, G. Q., Huang, J., Sun, F., and Wang, C., “Modified Sliding-Mode Bang-Bang Control for Seismically Excited Linear Structures”, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.29, No.11, 2000, pp.1647~1657
3. Soong, T. T. and Grigoriu, M., *Random Vibration of Mechanical and Structural Systems*, Prentice-Hall Inc., NJ, 1993
4. Cai, G. Q. and Lin, Y. K. “A New Approximate Solution Technique for Randomly Excited Non-Linear Oscillators”, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol.23, No.5-6, 1988, pp.409~420
5. 마호성, “Fokker-Planck 방정식의 Path-Integral Solution을 이용한 구분적 선형시스템의 비선형 동적거동 분석”, 한국전산구조공학회 논문집, 제12권 제2호, 1999, pp.251~264
6. Clough, R. W. and Penzien, J., *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill, NY, 1993