지수형 충격력을 받는 시스템의 에너지보존 알고리듬

The Energy Conserving Algorithm of the System Acted by an Exponential Impact Force

윤 성 호†
Yun, Seong Ho

(논문접수일 : 2003년 5월 7일 ; 심사종료일 : 2003년 9월 3일)

요 지

본 연구에서는 지수형 함수로 표현된 비선형 충격력을 받는 시스템의 동적 응답 정밀도를 향상시키고자 선형 충격력의 경우와 비교·검토하였다. Newmark 계열의 중앙법 알고리듬이 사다리꼴법과 같이 충격력이 없는 경우 모멘텀과 에너지 보존을 성립하도록 유도되었다. 중앙법, 사다리꼴법, 시간구간 종점 평가법((n+1)점 방법)을 선형 충격력에 적용하면 적분간격의 크기에 상관없이 보존성질을 만족하나, 비선형 충격력의 경우 모멘텀과 에너지 보존 상수값이 과소 또는 과대평가 되어졌다. 이러한 오차를 제거하고자 시간간격을 늘리면서 평가함수의 개수를 최소로 하는 다단계 방법중의 하나인 Simpson 1/3법을 사용하여 보존 상수값의 정밀도를 향상시켰다. 아울러 유한회전을 포함한 유한운동을 해석할 때에도 제안된 알고리듬이 확장·적용될 가능성을 보여주고 있다.

핵심용어 : 비선형 충격력, 중앙법, 사다리꼴법, 다단계 방법, Simpson 1/3법, 모멘텀/에너지 보존 알고리듬

Abstract

This paper aims at investigating the exact dynamic response of the system undergoing a exponential impact force from the viewpoints of conservations of momentum and energy. The mid point method applied in the Newmark's family algorithm is found to be identical to the case of the application of the trapezoidal method which provides conservations of momentum and energy. For the linear impact force the mid point, the trapezoidal and the (n+1) point method exactly meet the conservation characteristics independent of the size of integration interval. On the other hand, constants for the dynamic motion resulting from the nonlinear impact are underestimated or overestimated by these method mentioned above. To overcome this indispensible error, the Simpson 1/3 method as one of multi step methods whose advantages is to use longer time interval with the same number of evaluation functions is adopted for the exact conservations of momentum and energy. Moreover, the suggested method is expected to expand the similar algorithm for the general dynamic motion including finite rotations.

Keywords : *nonlinear impulse force, mid point method, trapezoidal method, multi step method, Simpson 1/3 method, momentum/energy conserving algorithm*

1. 서 론

시스템에 감쇠 요소가 존재하지 않는 한 전체 에너지는 일정하게 보존되며, 이러한 전제는 선형 또는 비선형 시스템간에 구별없이 항상 유효하다. 따라서 에너지 보존과 이에 상응하는 모멘텀 보존 성질이 갖는 중요성은 운동상수로서 역할을 할 뿐 아니라 적분 알고리듬의 안정성 여부를 판단할 수 있는 지표로서 활용될 수 있다.

선형 또는 비선형 시스템의 운동에서 과도응답 해석을 수행할 때 일반적으로 사다리꼴법(Trapezoidal rule)이

† 책임저자, 정회원·금오공과대학교 기계공학부 조교수
전화: 054-467-4230; Fax: 054-467-4472
E-mail: shyun@knut.kumoh.ac.kr

• 이 논문에 대한 토론을 2003년 12월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2004년 3월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

자주 사용되어 왔다. 선형 시스템에서는 시간간격의 크기와는 상관없이 절대적으로 안정된 알고리듬을 얻을 수 있다. 그러나 비선형 시스템에서도 이러한 알고리듬을 찾으려는 연구의 일환으로서 가속도가 일정한 평균값을 가지는 사다리꼴법에 라그랑지 상수를 병용하여 비구속방정식으로 변경하여 사용하였다.[1] 또한 접촉과 파동이 중요한 문제에서는 명시적인 알고리듬(Explicit algorithm)에 여러 개의 시간구간 점을 이용하는 다단계 방법(Multi-step method)을 적용하였다.[2),3)]

강체에 가해지는 충격력의 경우, 대부분 어느 일정한 시간동안에만 삼각형 함수 형태로 작용하는 것으로 간주하는 경우가 많다.[4)] 그러나 실제의 경우, 최대 충격력으로부터 서서히 감소하는 것이 일반적인 현상이다. 그러므로 충격력이 완전히 제거되어 모멘텀이 보존되는 시간구간에서는 충격력의 형태가 고차함수로 표현된다면 이에 적용되는 적분 알고리듬에 따라서 에너지가 보존되더라도 일정한 오차를 수반하는 것은 피할 수 없는 일이다.[5)~8)] 발생되는 오차를 완전히 제거하기 위해서 시간간격을 무한히 줄이는 방법을 배제한다면 충격력 함수의 차수에 해당하는 다단계 방법을 사용하는 것이 유일한 방법이다.

일단계 방법(Single step method)의 시간구간 $[t_n, t_{n+1}]$에서 시간 변화율로 표현된 모멘텀 방정식을 고려한다. 충격력이 $t_{n+\alpha}$에서($0 \le \alpha \le 1$) 설정된다고 가정하면, 충격력이 작용하지 않을 때 α의 값에 따라서 에너지의 오차량이 결정된다. 즉, $\alpha=1$일 때는 충격력이 f_{n+1}에서 계산되는 $(n+1)$점 방법, $\alpha=0$일 때는 f_n에서 결정되는 n점 방법이 있다. 일반적인 사다리꼴법에서는 $(1-\alpha)f_n+\alpha f_{n+1}$로 계산되고, 중앙법(Mid-point rule)에서는 중간값 $f_{n+1/2}$이 선택된다.

앞서 언급한 바와 같이 다단계 방법에 의해 오차를 획기적으로 줄이기 위해 여러 구간의 경계점이 사용되므로 i가 양의 정수일 때, $(n+i)$점 방법에서는 $(i+2)$개의 점이 사용되며, 이는 폐구간 Newton-Cotes방법과 같다.[9)] 특히 최소개수의 점을 이용한 다단계 방법은 $i=1$일 때 Simpson 1/3법과 동일하게 된다.

본 논문에서는 실제 현상과 유사한 지수형 충격력과 단순한 선형 충격력에 대하여 에너지 보존 성질을 검토하고자 한다. 이에 따라서 일단계 방법이 초래하는 에너지 오차에 대하여 분석할 것이고, 시간구간을 일단계 방법보다 늘려 최소개수의 점을 이용한 다단계 방법을 적용하여 에너지 오차에 미치는 영향을 파악할 것이다.

2. 모멘텀과 에너지 보존

2.1 Newmark 계열 알고리듬과 중앙법

일반적인 Newmark 계열의 알고리듬을 시간구간 $[t_n, t_{n+1}]$에 채택할 때, 절대적인 안정조건 중 사다리꼴법인 $\beta=1/4$와 $\gamma=1/2$을 사용하면 다음과 같다.[10)]

$$f_{n+1}=f_n+h\ f_n'+\frac{h^2}{4}(f_n''+f_{n+1}'') \tag{1a}$$

$$f_{n+1}'=f_n'+\frac{h}{2}(f_n''+f_{n+1}'') \tag{1b}$$

여기서 h는 함수 $f(t)$의 시간간격이고, $(\ )'$는 시간 t에 대한 미분이다. 강체운동을 표현하는 변위 $\boldsymbol{d}$, 속도 $\boldsymbol{v}$, 가속도 $\boldsymbol{a}$를 식(1a, b)에 적용하여 달리 표현하면 다음과 같다.

$$\boldsymbol{d}_{n+1}=\boldsymbol{d}_n+h\ \boldsymbol{v}_n+\frac{h^2}{4}(\boldsymbol{a}_n+\boldsymbol{a}_{n+1}) \tag{2a}$$

$$\boldsymbol{v}_{n+1}=\boldsymbol{v}_n+\frac{h}{2}(\boldsymbol{a}_n+\boldsymbol{a}_{n+1}) \tag{2b}$$

또한, 중앙법을 이 알고리듬에 적용하면 다음과 같이 표현된다.[7)]

$$\boldsymbol{d}_{n+1}=\boldsymbol{d}_n+h\ \boldsymbol{v}_{n+1/2} \tag{3a}$$

$$\boldsymbol{v}_{n+1}=\boldsymbol{v}_n+h\ \boldsymbol{a}_{n+1/2} \tag{3b}$$

식(2a)와 식(3a)를, 식(2b)와 식(3b)를 비교하면 중앙점 $t_{n+1/2}$에서의 속도와 가속도는 다음과 같이 유도된다.

$$\boldsymbol{v}_{n+1/2}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{v}_n+\boldsymbol{v}_{n+1}) \tag{4a}$$

$$\boldsymbol{a}_{n+1/2}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}_n+\boldsymbol{a}_{n+1}) \tag{4b}$$

여기서 상기의 식(4a)와 (4b)는 Newmark 계열의 사다리꼴법에서 표현되는 평균속도와 평균가속도임을 알 수 있으며, 끝점 t_n에서의 가속도는 다음과 같다.

$$\boldsymbol{a}_{n+1}=\frac{2}{h}(\boldsymbol{v}_{n+1}-\boldsymbol{v}_n)-\boldsymbol{a}_n \tag{5}$$

2.2 보존법칙

질량이 m인 강체가 외력 f에 의하여 직선운동을 한다고 가정할 때, 모멘텀 p와의 관계식은 다음과 같다.

$$\boldsymbol{p}' = m\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{f} \tag{6}$$

이 때 외력이 작용하지 않으면 모멘텀은 일정한 값으로 보존되며, 외력, 즉 충격력이 작용할 때는 시간구간 $[t_n, t_{n+1}]$의 어느 점에서 가속도 $\boldsymbol{a}$와 외력 f를 평가하느냐에 따라서 모멘텀의 크기가 결정된다. 즉, 식(6)에서 시간적분을 수행할 때 가속도와 외력이 $t_{n+\alpha}$에서 평가되었다고 가정하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\boldsymbol{f}=0;\ \boldsymbol{p}_{n+1} - \boldsymbol{p}_n \approx hm\,\boldsymbol{a}_{n+\alpha}=0 \tag{7a}$$

$$\boldsymbol{f}\neq 0;\ \boldsymbol{p}_{n+1} - \boldsymbol{p}_n \approx hm\,\boldsymbol{a}_{n+\alpha}=h\,\boldsymbol{f}_{n+\alpha} \tag{7b}$$

2.2.1 모멘텀 보존

식(7a)에서 가속도가 끝점 $\alpha=1$과 중앙점 $\alpha=1/2$에서 평가될 때, 각각의 경우 모멘텀의 크기($\|\boldsymbol{p}\| = \|m\boldsymbol{v}\|$)가 일정한지 여부를 다음과 같이 검토한다.

(i) $\alpha=1$일 때

식(5)를 식(7a)에 대입한 후, 양변에 $(\boldsymbol{p}_{n+1}+\boldsymbol{p}_n)$의 내적을 취하여 정리하면 다음과 같이 모멘텀 보존이 성립하지 않는다.

$$\|\boldsymbol{p}_{n+1}\|^2 - \|\boldsymbol{p}_n\|^2 = hm^2\,\boldsymbol{a}_n{}^T(\boldsymbol{v}_{n+1}+\boldsymbol{v}_n) \tag{8}$$

(ii) $\alpha=1/2$일 때

식(4b)와 (5)를 식(7a)에 대입한 후, 양변에$(\boldsymbol{p}_{n+1}-\boldsymbol{p}_n)$의 내적을 취하여 정리하면 다음과 같이 모멘텀 보존이 성립한다.

$$\|\boldsymbol{p}_{n+1}\|^2 - \|\boldsymbol{p}_n\|^2 = 0 \tag{9}$$

2.2.2 에너지 보존

모멘텀 보존의 경우와 마찬가지로 끝점 $\alpha=1$과 중앙점 $\alpha=1/2$에서 에너지($2T=m\|\boldsymbol{v}\|^2$)가 보존하는지의 여부를 다음과 같이 검토한다.

(i) $\alpha=1$일 때

식(5)를 식(7a)에 대입한 후, 양변에 $(\boldsymbol{v}_{n+1}+\boldsymbol{v}_n)/2$의 내적을 취하여 정리하면 다음과 같이 에너지 보존이 성립하지 않는다.

$$\frac{1}{2}m(\|\boldsymbol{v}_{n+1}\|^2 - \|\boldsymbol{v}_n\|^2) = \frac{mh}{2}\,\boldsymbol{a}_n{}^T(\boldsymbol{v}_{n+1}+\boldsymbol{v}_n) \tag{10}$$

(ii) $\alpha=1/2$일 때

식(4b)와 (5)를 식(7a)에 대입한 후, 양변에 $(\boldsymbol{v}_{n+1}-\boldsymbol{v}_n)/2$의 내적을 취하여 정리하면 다음과 같이 에너지 보존이 성립한다.

$$\frac{1}{2}m(\|\boldsymbol{v}_{n+1}\|^2 - \|\boldsymbol{v}_n\|^2)=0 \tag{11}$$

2.2.3 충격력 적분

식(7b)에서 충격력이 끝점 $\alpha=1$과 중앙점 $\alpha=1/2$에서 평가될 때, 수치적분 알고리듬의 근사화를 다음과 같이 검토한다.

(i) $\alpha=1$일 때

$$\boldsymbol{p}_{n+1} - \boldsymbol{p}_n \approx h\,\boldsymbol{f}_{n+1} \tag{12}$$

근사화로 인한 구간 $[t_n,\ t_{n+1}]$의 오차는 $O(h^3)$이고 전체구간의 오차는 $O(h^2)$이므로 오차가 없이 근사화 되려면 충격력의 차수는 최대 1차인 선형이어야 한다.[9]

(ii) $\alpha=1/2$일 때

$$\boldsymbol{p}_{n+1} - \boldsymbol{p}_n \approx h\,\boldsymbol{f}_{n+1/2} = h\frac{1}{2}(\boldsymbol{f}_n + \boldsymbol{f}_{n+1}) \tag{13}$$

이것은 사다리꼴법 또는 중앙법에 의한 적분 알고리듬에 해당한다. $\alpha=1$일 경우와 마찬가지로 전체오차는 $O(h^2)$이므로 충격력의 차수가 최대 1차인 선형이어야 근사화 오차를 완전히 제거할 수 있다.[9]

3. 해석 알고리듬

3.1 알고리듬의 기하학적 해석

시간구간 $[t_n,\ t_{n+1}]$에서 운동을 해석하는데 있어 식(2a)

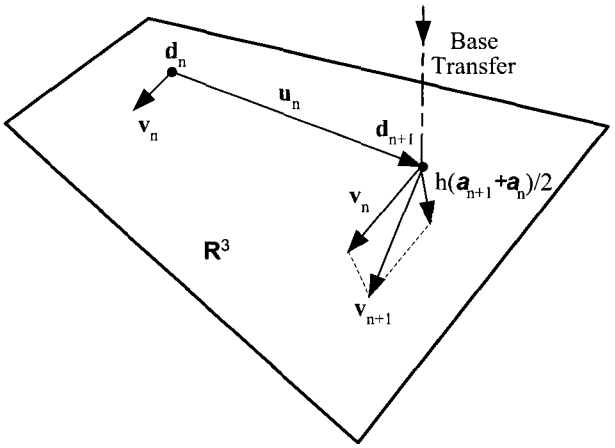

그림 1 알고리듬의 기하학적 해석

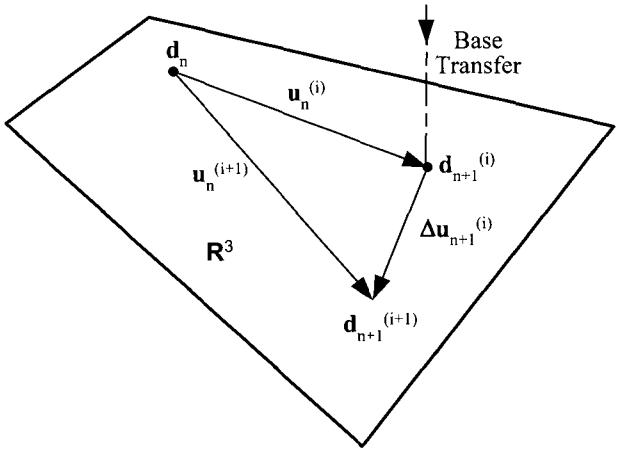

그림 2 반복 계산시 증분량의 기하학적 해석

와 (2b)를 기하학적으로 실수 R^3인 접평면상에서 표현하고자 한다. 기저점(Base point) n에서 d_n과 v_n이 u_n만큼 이동하여 새로운 기저점 $(n+1)$에서 d_{n+1}과 v_{n+1}로 표현되는 과정을 그림 1에서 설명해 주고 있다. 이 때 식(2a)로부터 u_n은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$d_{n+1} = d_n + u_n \tag{14}$$

$$u_n = h\, v_n + \frac{h^2}{4}(a_n + a_{n+1}) \tag{15}$$

한편, 식(7)로 표현되는 모멘텀 보존식에서 잔여량(Residual) I를 다음과 같이 표현된다고 가정한다.

$$I_{n+1}(u_n^{(i)}) = p_{n+1}^{(i)} - p_n - h\, f_{n+\alpha} \tag{16}$$

여기서 $(\cdot)^{(i)}$은 상기의 식이 모멘텀 보존 여부를 판정하는 매우 작은 값 ε을 만족하지 않을 때, 새로운 기저점에서 (i)번째의 증분량 $\Delta u_{n+1}^{(i)}$에 의하여 새롭게 평가된 값이며, 이를 그림 2에 기하학적으로 도시하였다.

$$\Delta u_{n+1}^{(i)} = u_n^{(i+1)} - u_n^{(i)} \tag{17}$$

식(14)를 이용하여 시간 t_{n+1}에서 $(i+1)$번째의 반복계산에 사용되는 변위에 대한 식은 다음과 같다.

$$d_{n+1}^{(i+1)} = d_{n+1}^{(i)} + \Delta u_{n+1}^{(i)} \tag{18}$$

여기서 초기점의 변위는 다음과 같다.

$$d_{n+1}^{(0)} = d_n \tag{19}$$

3.2 모멘텀 보존식의 선형화

식(15)를 식(2b)에 대입하여 정리하면 i번째에서 식(20)이 유도되고, 이 때 $i=i+1$로 하여 두 식의 차이를 구하면 반복계산에 사용되는 식(21)이 유도된다.

$$v_{n+1}^{(i)} = \frac{2}{h} u_n^{(i)} - v_n \tag{20}$$

$$v_{n+1}^{(i+1)} = v_{n+1}^{(i)} + \frac{2}{h}\Delta u_{n+1}^{(i)} \tag{21}$$

같은 방법으로 식(15)를 i번째에서 가속도에 대하여 다시 정리하면 식(22a)가 되고, 이 때 $i=i+1$로 하여 두 식의 차이를 구하면 반복계산에 사용되는 식(22.b)가 유도된다.

$$a_{n+1}^{(i+1)} = \frac{4}{h^2} u_n^{(i)} - \frac{4}{h} v_n - a_n \tag{22a}$$

$$a_{n+1}^{(i+1)} = a_{n+1}^{(i)} + \frac{4}{h^2}\Delta u_{n+1}^{(i)} \tag{22b}$$

식(20)을 모멘텀 보존식(16)의 첫 째항 $p_{n+1}^{(i)} = m\, v_{n+1}^{(i)}$대입하면 식(23)이 얻어진다.

$$I_{n+1}(u_n^{(i)}) = m\left(\frac{2}{h} u_n^{(i)} - 2\, v_n\right) - h\, f_{n+\alpha} \tag{23}$$

Newton-Raphson의 반복 계산법의 i번째에서 식(23)

표 1 에너지 보존 알고리듬의 흐름

	단계	계 산 내 용	관련식
초기화 작업	*I-1*	$\{d_n, v_n, a_n, p_n\}$를 확보한다.	
	I-2	$\{u_n^{(i)}, d_{n+1}^{(i)}\}=\{0, d_n\}$으로 초기화한다.	(15)
	I-3	$\{u_n^{(i)}, v_{n+1}^{(i)}, a_{n+1}^{(i)}, p_{n+1}^{(i)}\}$를 계산한다.	(14), (15)
$(i+1)$번째 계산	*C-1*	$\{u_n^{(i)}, d_{n+1}^{(i)}, v_{n+1}^{(i)}, a_{n+1}^{(i)}, p_{n+1}^{(i)}\}$를 준비한다.	
반복계산	*C-2*	$I_{n+1}^{(i)} < \varepsilon$ 여부를 판정한다. 참이면 모멘텀과 에너지를 계산한다. n=(n+1)로 하여 (*I-1*)에서 시작한다. 거짓이면 (*C-3*)으로 진행한다.	(16) (8)~(11)
	C-3	$\Delta u_n^{(i)}$를 계산한다.	(24)
	C-4	$\{d_{n+1}^{(i+1)}, v_{n+1}^{(i+1)}, a_{n+1}^{(i+1)}, p_{n+1}^{(i+1)}\}$를 계산한다.	(18), (21), (22b)
	C-5	i=(i+1)로 하여 (C-2) 단계로 간다.	

을 선형화함으로써 변위의 증분을 진행시켜 나가면 잔여량 $I_{n+1}^{(i)}$는 다음과 같다.[11),12)]

$$I_{n+1}^{(i)} = I_{n+1}(u_n^{(i+1)}) - I_{n+1}(u_n^{(i)})$$
$$= D I \cdot \Delta u_n^{(i)} = \frac{2m}{h} \Delta u_n^{(i)} \qquad (24)$$

여기서 $D(\ ) \cdot \beta$는 β방향으로의 방향미분을 나타낸다. 따라서 $u_n^{(i)}$의 변화율은 다음과 같다.

$$D u_n^{(i)} \cdot \Delta u_n^{(i)}$$
$$= [\frac{d}{d\varepsilon}]_{\varepsilon=0} (u_n^{(i)} + \varepsilon \Delta u_n^{(i)}) = \Delta u_n^{(i)} \qquad (25)$$

3.3 알고리듬의 흐름

제안하고자 하는 알고리듬의 시간구간 $[t_n, t_{n+1}]$에서 해석해야 될 문제는 "시간에서 t_n운동의 기하학적인 물리량인 $\{d_n, v_n, a_n, p_n\}$이 주어져 있을 때, 식(16)의 모멘텀 보존식을 만족하면서 시간 t_{n+1}에서 물리량 $\{d_{n+1}, v_{n+1}, a_{n+1}, p_{n+1}\}$을 구한다"라고 정의될 수 있다. 이 때, 반복계산 과정 중에서 모멘텀과 에너지가 보존하는지의 여부를 검토하여야 하며, 이에 대한 알고리듬을 표 1에 정리하였다.

4. 에너지 보존 정밀도 향상

4.1 충격력의 근사화

충격력이 작용하지 않을 때, 모멘텀의 크기와 에너지가 일정하게 보존하는 경우는 식(9)와 (11)에서와 같이 중앙법의 $\alpha=1/2$일 때이다. 그러나 충격력이 작용할 때, 모멘텀과 에너지가 일정하게 보존하지 않는다 할지라도 충격력의 형태나 적분 방법에 따라서 충격력의 크기가 다르게 평가되어 그 해석의 정밀도에 영향을 미치게 한다. 따라서 $\alpha=1/2$일 때, 알고리듬의 중요부분인 모멘텀 보존 판별식(16)이 정확히 제로가 되기 위해서는 충격력이 선형 함수로 표현되어야만 한다.

그렇지만 충격력이 비선형 함수, 즉 최소한 2차 함수로 표현되었다고 가정하면 선형 함수의 경우 구간오차 $O(h^3)$보다 더욱 높은 차수를 가진 적분방법을 요구하게 된다. 사다리꼴법에서 적분구간 $h \in [t_n, t_{n+1}]$에서 초기점과 끝점에서 2개의 함수값이 필요하게 된다. 한편, 중앙법에서는 동일구간에서 중앙점에서 1개의 함수값이 필요하다.

비선형 함수의 적분 정밀도를 향상시키기 위하여 이미 적분이 수행된 t_{n-1}을 포함하여 적분구간을 2배로 확장한 $2h \in [t_{n-1}, t_{n+1}]$에서 새로운 함수값 2개를 필요로 하는 다단계법(Multi-step method)인 Simpson 1/3법을 채택하여 사다리꼴법과 중앙법을 비교할 것이다. 기존 방법보다 적분구간은 더욱 넓고 동일한 개수의 함수값을 필요로 하는 Simpson 1/3법의 구간오차는 $O(h^5)$이다.[9)] 이에 해당하는 표시로서 $\alpha = +1$로 하면 이는 $(n+1)$점 방법이라고 표시될 수 있으며, 충격력의 적분 근사식은 다음과 같다.

$$p_{n+1} - p_n \approx 2h f_{n+1} \qquad (26)$$

4.2 선형 및 비선형 외력

충격력을 근사화 하는데 있어 보존 성질을 파악하기 위하여 선형과 비선형의 외력을 식(27)과 (28)같이 선택하였고 이를 그림 3에 나타냈다.

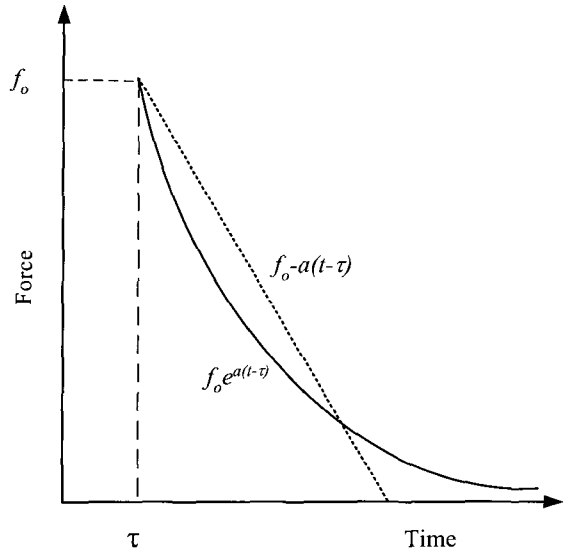

그림 3 선형 및 비선형 충격력

$$f=0\ (t<\tau,\ t>\tau+\frac{f_o}{a});\ f_o-a(t-\tau)\ (\tau\le t\le\tau+\frac{f_o}{a}) \tag{27}$$

$$f=0\ (t<\tau);\ f_o\, e^{-a(t-\tau)}\ (t>\tau) \tag{28}$$

여기서 해석 알고리듬들의 차이를 분석하기 위하여 비선형 외력을 식(28)과 같이 지수형으로 표현하였는데, 이는 실제 충격력이 시간이 지남에 따라 서서히 감소하는 현상을 반영한 것이다. 반면에 식(27)은 일정시간이 지난 후에 충격력이 제로로 되는 것을 나타낸 것이다.

4.3 수치해석

수치해석의 예를 위하여 정지하고 있는 $m=10$ kg의 강체에 $f_o=98.1$ N을 가했고, $a=10$, $\tau=0$ 초로 선정하였다. 또한, 시간구간 $h=0.10$ 초, 0.05 초, 0.01 초에 대하여 알고리듬을 비교하였다.

그림 4와 5는 선형 외력에 대한 변위와 속도를 나타냈다. ($n+1$)점 방법을 제외한 중앙법과 사다리꼴법은 시간간격과는 상관없이 정밀해와 일치함을 알 수 있다. 그러나 ($n+1$)점 방법은 시간간격이 작아져야 정밀해와의 차이가 감소함을 알 수 있다. 이에 상응하는 모멘텀과 에너지를 그림 6과 7에 각각 나타냈다.

정밀해와 비교하여 오차가 없이 일정하게 보존되는 것은 변위와 속도처럼 ($n+1$)점 방법을 제외한 중앙법과 사다리꼴법이다. ($n+1$)점 방법에서 시간간격에 따라 오차가 발생하는 경향도 변위와 속도의 거동과 동일함을 알 수 있다. 그림 8은 $h=0.05$ 초일 때 가속도를 나타낸다. 이 때 중앙법과 사다리꼴법에서는 일정한 진폭을 유지하면서 규칙적으로 진동하고 있다. 이는 식(4b)에서 보는 바와 같이 시간구간의 시작점과 끝점에서의 가속도를 평균한 것과 같으므로 정밀해와 정확히 일치함을 알 수 있다.

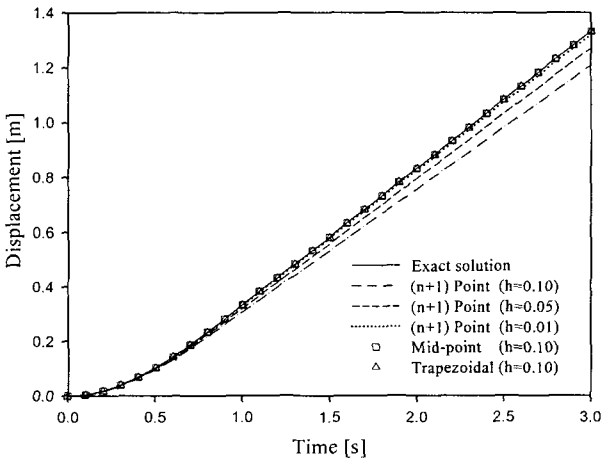

그림 4 선형 충격력 작용시 변위

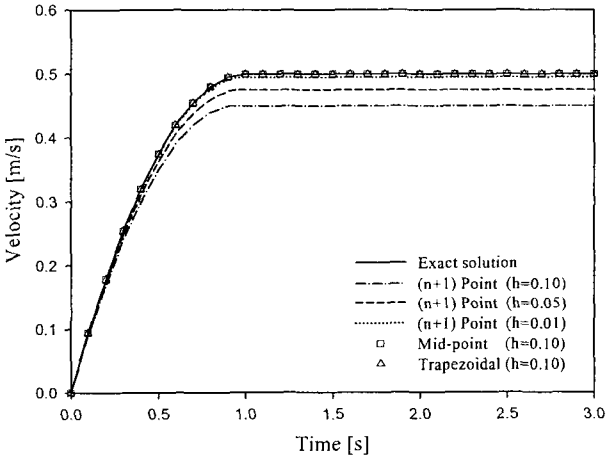

그림 5 선형 충격력 작용시 속도

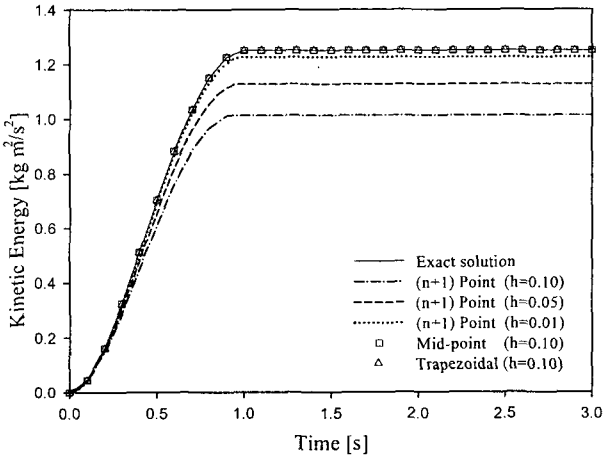

그림 6 선형 충격력 작용시 운동 에너지

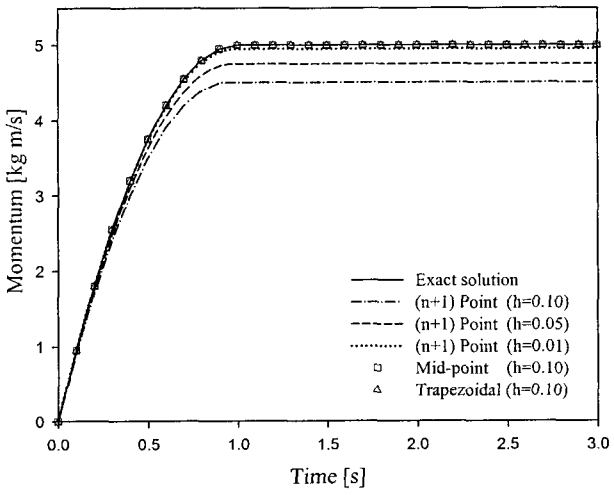

그림 7 선형 충격력 작용시 모멘텀 크기

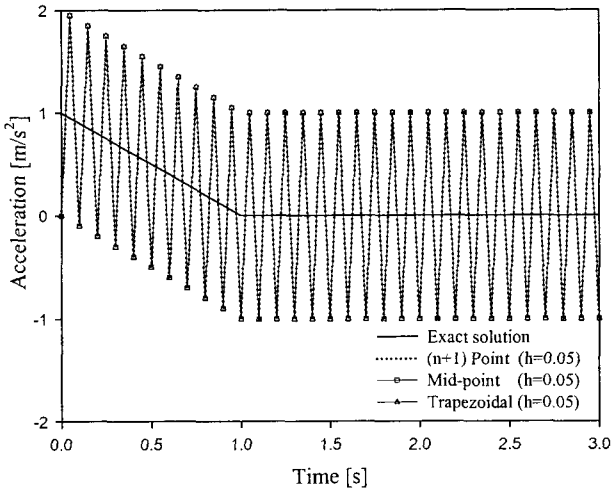

그림 8 선형 충격력 작용시 가속도

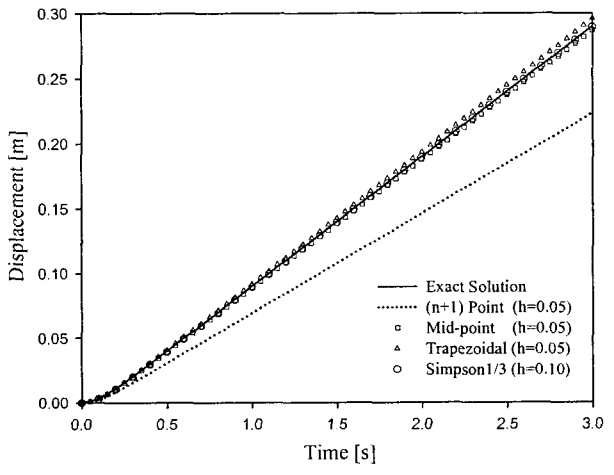

그림 9 지수형 충격력 작용시 변위

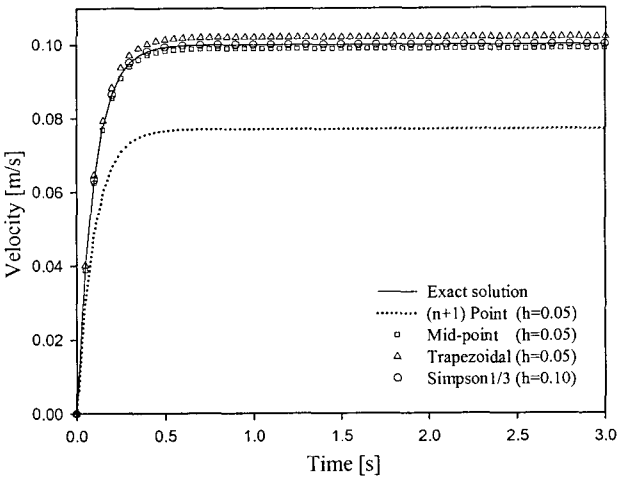

그림 10 지수형 충격력 작용시 속도

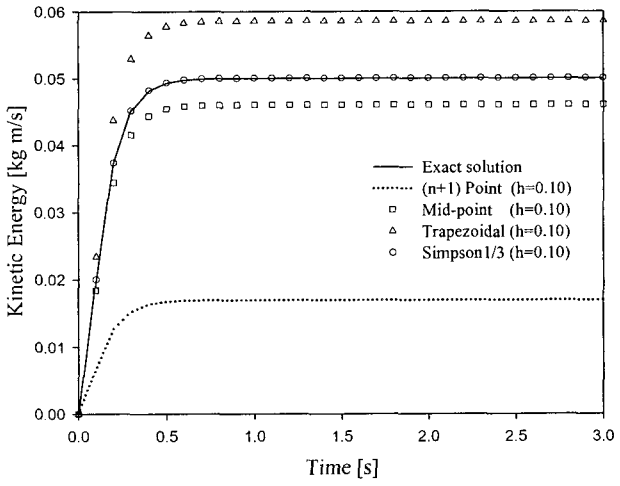

그림 11 지수형 충격력 작용시 운동 에너지(h=0.10)

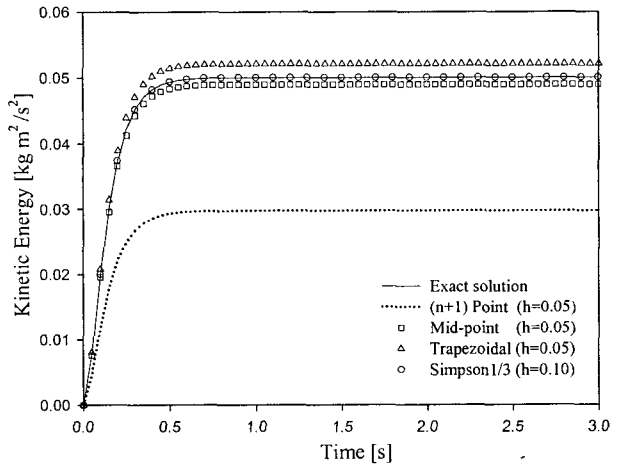

그림 12 지수형 충격력 작용시 운동 에너지(h=0.05)

그림 9는 지수형 외력에 대한 변위를 보여주는데 수치해의 정밀도를 높이고자 Simpson 1/3법에서 $h=0.10$ 초로 설정하고, 나머지 방법들은 시간간격을 반으로 줄여 $h=0.05$ 초로 알고리듬을 수행시켰을 때 정밀해와의 차이가 존재함을 확인할 수 있다. 사다리꼴법과 중앙법은 각각 다소 과대 또는 과소평가 되어있지만, $(n+1)$점 방법이 가장 큰 오차

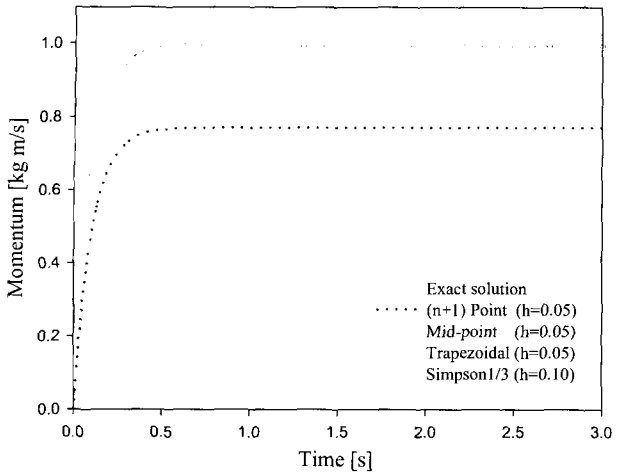

그림 13 지수형 충격력 작용시 모멘텀 크기

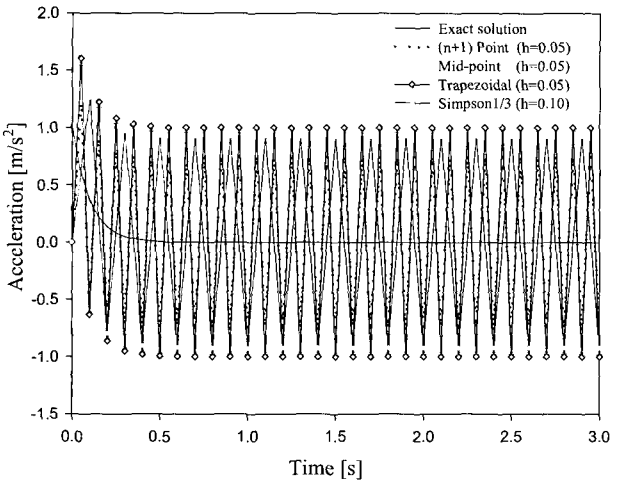

그림 14 지수형 충격력 작용시 가속도

를 발생시키고 있다. 그림 10은 그림 9에서 설정한 시간간격의 조건을 동일하게 유지하여 속도에 대한 거동을 보여주고 있으며, 발생오차의 경향은 그림 9와 동일함을 관찰할 수 있다.

그림 11과 12는 시간간격을 달리했을 때 운동에너지 보존을 나타내고 있으며, 시간간격이 작아질수록 오차가 감소함을 알 수 있다. 더욱이 그림 12와 13에서 Simpson 1/3법의 시간간격을 다른 방법들과는 달리 2배로 설정했음에도 불구하고 에너지와 모멘텀은 정밀해에 거의 접근함을 관찰할 수 있다. 그림 14는 가속도를 나타내는데 그림 8과 같이 시간구간에서 평균가속도가 정밀해와 동일함을 알 수 있다.

5. 결 론

본 연구에서는 지수형 함수로 표현된 비선형 충격력을 받는 시스템의 동적 응답 정밀도를 향상시키고자 선형 충격력의 경우와 비교·검토함으로써 다음과 같은 결과를 얻었다.

(1) Newmark 계열 알고리듬의 중앙법은 일정한 평균 가속도를 나타내는 사다리꼴법과 동일하게 도출되었으며, 충격력이 작용하지 않는 경우 모멘텀과 에너지 보존 상수값이 존재함을 알 수 있었다.

(2) 선형 충격력인 경우, 시간에 대한 적분간격에 상관없이 중앙법, 사다리꼴법, ($n+1$)점 방법을 적용했을 때 모멘텀과 에너지 보존 성질이 정확히 만족함을 알 수 있었다.

(3) 지수형 함수의 비선형 충격력인 경우, 중앙법, 사다리꼴법, ($n+1$)점 방법을 적용했을 때 모멘텀과 에너지 보존 상수값이 과대 또는 과소평가 됨을 알 수 있었다. 비록 적분시 시간간격을 감소시켜 오차를 줄일 수 있지만, 알고리듬 측면에서 평가함수의 수가 증가하는 불리한 점을 내포하고 있음을 알 수 있었다.

(4) 지수형 함수의 비선형 충격력인 경우, 중앙법, 사다리꼴법, ($n+1$)점 방법에 사용한 시간구간 보다 2배 크게 하여 다단계 방법을 적용하였다. 이 방법 중에서 평가함수의 수를 최소화한 Simpson 1/3 (($n+1$)점) 방법은 정밀도를 향상시켜 모멘텀과 에너지 보존 성질을 만족시킴을 알 수 있었다. 또한 유한회전이 포함되었을 때 유한운동의 모멘텀과 에너지 보존 알고리듬의 확장 가능성을 예측할 수 있었다.

후 기

본 연구는 2002년도 금오공과대학교 학술연구비 지원(2002-104-010)에 의하여 연구된 논문임.

참 고 문 헌

1. Hughes, T. J. R., "Finite-Element Methods for Nonlinear Elastodynamics Which Conserve Energy", *Journal of Applied Mechanics, ASME*, Vol.45, 1978, pp.366~369
2. Smolinski, P., "Stability Analysis of Multi-time Step Explicit Integration Method", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.95, 1992, pp.291~300
3. Smolinski, P. Sleith S. and Belytschko, T, "Stability Analysis of Multi-time Step Explicit Integration Algorithm for Linear Structural Dy-

namics Equations", *Computer Mechanics*, Vol. 18, 1996, pp.236~234
4. Simo, J. C. and Vu-Quoc, L., "On the Dynamics in Space of Rods Undergoing Large Motions -A Geometrically Exact Approach", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.66, 1988, pp.125~161
5. Greenspan, D., "Conservative Numerical Methods for $\ddot{x}=f(x)$", *Journal of Computational Physics*, Vol.56, 1984, pp.28~41
6. Neal, M. and Belytschko, T, "Explicit-implicit Subcycling with Non-integer Time Step Ratios for Structural Dynamics Systems", *Computer & Structure*, Vol.31, No.6, pp.871~880
7. Bauchau, O. A. and Theron N. J., "Energy Decaying Scheme for Non-linear beam models", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.134, 1996, pp.37~56
8. Simo, J. C. and Tarnow N. A., "A New Energy and Momentum Conserving Algorithm for the Nonlinear Dynamics of Shells", *International Journal for Numerical Methods In Engineering*, Vol.37, 1994, pp.2527~2549
9. Chapra, S. C. and Canale, R. P., Numerical Methods for Engineers, *McGraw Hill*, New York, 2001, pp.584~607
10. Hughes, T. J. R., The Finite Element Method, *Prentice-Hall. New Jersey*, 2000, pp.409~513
11. Cardona, A. and Geradin M., "A Beam Finite Element Non-linear Theory with Finite Rotations", *International Journal for Numerical Methods In Engineering*, Vol.26, 1988, pp.2403~2438
12. Nikravesh, P. E., Computer-aided Analysis of Mechanical Systems, Prentice-Hall, New Jersey, 1988, pp.66~72