Commun. Korean Math. Soc. **18** (2003), No. 4, pp. 587–602

초청논문

벡터 볼록 최적화 문제를 위한 벡터 변분부등식

이규명

요 약. 본 논문에서는 벡터값을 가지는 함수로 이루어진 벡터 변분부등식들의 해집합사이의 관계, 미분 불가능한 볼록함수로 이루어진 벡터 볼록 최적화 문제의 해집합들과 볼록함수의 아래미분으로 표현된 벡터 변분부등식의 해집합들과의 관계, 제약집합이 볼록 함수로 구체적으로 주어질 때의 벡터 변분부등식의 해가 될 필요 충분조건, 섭동된 강 단조 벡터 변분부등식의 안정성 결과와 섭동된 벡터 강 볼록 최적화문제에의 적용에 대한 최근 연구 결과를 정리한다.

제 1 절 시작하는 말

상충관계에 있는 여러 개의 함수들을 동시에 최적화하는 벡터 최적화 문제의 중요성은 널리 알려져 있다 ([18, 40, 42]). 벡터 변분부등식은 Giannessi ([12])에 의해 1980년에 제시되었는데 그 형태는 보통 (스칼라)의 변분부등식의 확장이면서 동시에 벡터 최적화 문제의 해와 밀접한 관계가 있도록 만들어 졌다. 따라서 벡터 변분 부등식은 벡터 최적화 문제를 다루는데 있어서 중요한 역할을 할 수 있고, 상충관계에 있는 여러 요인을 지니고 있는 균형점 문제에 대한 수리적 모델을 제시할 수 있으므로 활발하게 연구되어져 왔다.

벡터 변분부등식과 여러가지 형태의 일반화된 벡터 변분부등식의 해의 존재정리에 대해 활발한 연구가 진행되어 왔으며 ([3, 4, 7, 9, 10, 16, 21-29, 31, 33, 43, 47, 48, 53]), 벡터 변분부등식들의 해집합들 사이의 관계가 연구되어 졌고 ([31, 32, 34, 37, 52]), 그리고 벡터 변분부등식의 벡터 균형점 문제들에 대한 응용 ([6, 8, 50, 51])과 섭동된 벡터 변분부등식의 안정성 ([20, 31, 39])이 연구되어 왔다.

벡터 변분부등식의 해와 벡터 최적화 문제의 해와의 관계에 대한 연구결과들이 많은 학자들 ([1, 2, 5, 13, 30-32, 36, 37, 45-47, 49])에 의

Received September 22, 2003.
2000 Mathematics Subject Classification: 90C29, 65K10, 90C25.
Key words and phrases: 벡터 변분부등식, 볼록 함수, 벡터 볼록 최적화 문제, 해집합, 섭동된 벡터 강 볼록 최적화 문제, 섭동된 강 단조 벡터 변분부등식, 안정성.
본 연구는 2001년도 부경대학교 기성회 학술연구비의 지원에 의하여 수행되었음.

해 얻어졌다. 이러한 관계에 대한 연구는 벡터 변분부등식을 벡터 최적화 문제에 적용하기 위한 것이다. 최근에 섭동된 (perturbed) 강 단조 (strongly monotone) 벡터 변분 부등식의 해집합의 안정성 결과로 부터 섭동된 강 볼록 (strongly convex) 벡터 최적화 문제의 해집합의 안정성 결과를 얻을 수 있다는 것이 밝혀졌다 ([31]). 이러한 연구는 벡터 변분부등식이 벡터 최적화 문제를 연구하는 강력한 수학적 도구가 된다는 것을 말한다.

본 논문의 목적은 벡터 변분부등식들의 해집합의 관계와 벡터 볼록 최적화 문제에 있어서의 벡터 변분부등식의 역할에 관련된 최근 연구 결과들 ([13, 31, 32, 34, 37, 38, 52])을 정리하는 것이다.

본 논문의 제 2 절에서는 벡터값을 가지는 함수로 이루어진 벡터 변분부등식들의 간단한 존재정리와 해집합들 사이의 관계를 주고, 제 3 절에서는 미분 불가능한 볼록함수로 이루어진 벡터 볼록 최적화 문제의 해집합들과 볼록함수의 아래미분 (subdifferential) 으로 표현된 벡터 변분부등식들의 해집합들과의 관계를 설명한다. 나아가서 제약집합이 볼록 함수에 의해 구체적으로 주어 질 때에 있어서의 벡터 변분부등식의 해가 될 필요 충분 조건을 준다. 그리고 제 4 절에서는 섭동된 강 단조 벡터 변분부등식의 안정성 결과와 그러한 결과의 섭동된 벡터 강 볼록 최적화 문제에의 적용에 대한 연구결과를 소개한다. 마지막 절인 제 5 절에서는 본 논문에서 열거된 정리들을 요약하고 앞으로의 연구에 대해 간단히 언급한다.

제 2 절 벡터 변분부등식

$\mathbb{R}^n$ 을 n 차원 유클리드 공간, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 를 $\mathbb{R}^n$ 상에서의 내적 (scalar product), $\|\cdot\|$ 을 $\mathbb{R}^n$ 상에서의 노름 (norm) 이라 한다. 그리고 D 를 $\mathbb{R}^n$ 의 폐볼록 부분집합, $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ \ i = 1, \cdots, p$, 를 벡터값을 가지는 함수들이라 하자.

간단히 하기 위해서, $f := (f_1, \cdots, f_p)$ 라 두고, 임의의 $x, v \in \mathbb{R}^n$ 에 대해서

$$f(x)(v) := (\langle f_1(x), v\rangle, \cdots, \langle f_p(x), v\rangle)$$

라 둔다. 나아가서, 아래와 같은 기호를 쓰고자 한다.

$$\mathbb{R}^p_+ = \{x = (x_1, \cdots, x_p) \in \mathbb{R}^p \ \mid\ x_i \geq 0 \text{ for all } i\},$$

$$\overset{o}{\mathbb{R}}{}^p_+ = \{x \in \mathbb{R}^p \ \mid\ x_i > 0 \ \text{ for all } \ i\},$$

$$S_+ = \left\{x \in \mathbb{R}^p_+ \ \mid\ \|x\| = 1\right\},\quad \overset{o}{S}{}_+ = \left\{x \in \overset{o}{\mathbb{R}}{}^p_+ \ \mid\ \|x\| = 1\right\}$$

본 절에서는 다음과 같은 몇 개의 벡터값을 가지는 함수에 대한 벡터 변분부등식 (vector variational inequality for vector valued function)을 생각한다.

(VVIV) Find $\bar{x} \in D$ such that
$$f(\bar{x})(x-\bar{x}) \notin -\mathbb{R}^p_+ \setminus \{0\} \quad \forall x \in D.$$

(MVVIV) Find $\bar{x} \in D$ such that
$$f(x)(x-\bar{x}) \notin -\mathbb{R}^p_+ \setminus \{0\} \quad \forall x \in D.$$

(WVVIV) Find $\bar{x} \in D$ such that
$$f(\bar{x})(x-\bar{x}) \notin -\overset{o}{\mathbb{R}^p_+} \quad \forall x \in D.$$

(WMVVIV) Find $\bar{x} \in D$ such that
$$f(x)(x-\bar{x}) \notin -\overset{o}{\mathbb{R}^p_+} \quad \forall x \in D.$$

윗 문제들의 해집합을 각 각 sol(VVIV), sol(MVVIV), sol(WVVIV), sol(WMVVIV) 라둔다.

$p=1$ 일 때, (VVIV) 와 (MVVIV), (WVVIV) 와 (WMVVIV) 는 아래와 같은 실수값을 가지는 보통의 변분부등식 (VIS), (MVIS) 가 됨은 명백하다.

(VIS) Find $\bar{x} \in D$ such that
$$\langle f_1(\bar{x}), x-\bar{x} \rangle \geq 0 \quad \forall x \in D.$$

(MVIS) Find $\bar{x} \in D$ such that
$$\langle f_1(x), x-\bar{x} \rangle \geq 0 \quad \forall x \in D.$$

따라서 벡터 변분부등식은 보통 (스칼라)의 변분부등식의 확장이다.

임의의 $\lambda := (\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \in S_+$ 에 대해서 우리는 다음과 같은 실수값을 가지는 변분부등식을 생각한다.

(VIS)$_\lambda$ Find $\bar{x} \in D$ such that
$$\langle \textstyle\sum_{i=1}^p \lambda_i f_i(\bar{x}), x-\bar{x} \rangle \geq 0 \quad \forall x \in D.$$

마찬가지로, (VIS)$_\lambda$ 의 해집합을 sol(VIS)$_\lambda$ 라 표시한다.

위에서 거론된 변분부등식의 해집합에 대하여 다음과 같은 결과를 쉽게 얻을 수 있다 (정리 2.1의 (1)은 [31] 참조).

정리 2.1. *다음이 성립한다.*

(1) $\bigcup_{\lambda \in \overset{o}{S}_+} sol(VIS)_\lambda \subset sol(VVIV) \subset sol(WVVIV)$

$= \bigcup_{\lambda \in S_+} sol(VIS)_\lambda.$

(2) *f 가 D 에서 단조 (monotone) 일 때, 즉*
$$\left\langle f_i(x) - f_i(x'), x - x' \right\rangle \geq 0 \quad \forall i = 1, \cdots, p, \forall x, x' \in D$$

일 때, $sol(VVIV) \subset sol(MVVIV)$ 이고 $sol(WVVIV) \subset sol(WMVVIV)$ 이다.

(3) f_i, $i = 1, \cdots, p$ 가 연속일 때, $sol(WMVVIV) \subset sol(WVVIV)$.

f_i 가 연속이라 하더라도, $sol(\mathrm{MVVIV}) \subset sol(\mathrm{VVIV})$ 는 성립하지 않을 수 있음을 보이는 예를 제시하고자 한다.

보기 2.1. $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$ $(x \in I\!R)$, $D = (-\infty, 0]$ 라 두고 이러한 $f(x) := (f_1(x), f_2(x))$ 와 D 에 대해서 (MVVIV), (VVIV)를 생각하자. 이 때 $sol(\mathrm{MVVIV}) = (-\infty, 0]$, $sol(\mathrm{VVIV}) = (-\infty, 0)$. 따라서 $sol(\mathrm{MVVIV}) \subset sol(\mathrm{VVIV})$는 일반적으로 성립하지 않는다.

벡터 변분부등식에 대한 간단한 해의 존재정리를 주고자 한다 ([31]).

정리 2.2. (1) 만약 f_i, $i = 1, \cdots, p$ 가 연속이고 D 가 콤팩트 (compact) 일 때 $sol(VVIV) \neq \emptyset$.

(2) f_i, $i = 1, \cdots, p$, 중 적어도 하나가 연속이고, 강제적 (coercive) 즉, $\exists x_0 \in D$ such that

$$\frac{\langle f_i(x) - f_i(x_0), x - x_0 \rangle}{\|x - x_0\|} \to +\infty \text{ as } \|x\| \to +\infty, \; x \in D$$

일 때 $sol(WVVIV) \neq \emptyset$.

특별한 가정아래서는 아래와 같은 정리들을 얻을 수 있다 ([31, 34, 52]).

정리 2.3. 다음과 같은 조건이 성립한다고 하자.

(1) (f_i 의 강 단조성): $\exists\, \alpha > 0$ such that

$$\langle f_i(x) - f_i(x'), x - x' \rangle \geq \alpha \|x - x'\|^2 \; \forall x, x' \in D, \; \forall i = 1, \cdots, p.$$

(2) (f_i 의 리프시즈 연속성): $\exists\, l > 0$ such that

$$\|f_i(x) - f_i(x')\| \leq l \|x - x'\| \; \forall x, x' \in D, \; \forall i = 1, \cdots, p.$$

이 때 다음이 성립한다.

(i) $sol(\mathrm{VVIV}) \neq \emptyset$.

(ii) $cl(\bigcup_{\lambda \in \overset{o}{S}_+} sol(\mathrm{VIS})_\lambda) = clsol(\mathrm{VVIV}) = sol(\mathrm{WVVIV})$.

여기서 cl 는 폐포 (closure) 를 의미한다.

정리 2.4. 만약 A 가 $m \times n$ 행렬, $b \in I\!R^m$, $D = \{x \in I\!R^n \mid Ax \leq b\}$ 일 때,

$$\bigcup_{\lambda \in \overset{o}{S}_+} sol(VIS)_\lambda = sol(VVIV).$$

정리 2.5. 아래의 조건이 성립한다고 하자.

(1) D가 엄격한 볼록 체 (strictly convex body), 즉, $\forall x,\ x' \in D\ (x \neq x')$,

$$\{(1-t)x + tx' \mid t \in (0,1)\} \subset intD.$$

(2) 각 $x \in D$ 에 대해서, 선형사상 $v \mapsto f(x)(v)(: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p)$ 가 전사 (surjective).

이 때 sol(VVIV) $= sol$(WVVIV).

정리 2.3의 가정 (1)과 (2)아래서 정리 2.5의 결과가 성립하지 않는다는 예를 줄 수 있다 ([31, 52]).

제 3 절 벡터 볼록 최적화 문제와 벡터 변분부등식과의 관계

먼저 이 절에서 사용될 진성 하반 연속 볼록함수 (proper lower semicontinuous convex function)의 공액함수 (conjugate function), 에피그라프 (epigraph), 아래미분 (subdifferential), ϵ-아래미분 (ϵ-subdifferential) 에 대한 정의를 준다.

$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 는 진성 하반 연속 볼록 함수라 하자. 이 때 함수 g 의 공액함수는

$$g^*(v) = sup\{\langle v, x\rangle - g(x) \mid x \in domg\}$$

로 정의되는 $g^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 인 함수이고, 여기서 함수 g 의 정의역인 $domg$ 는

$$domg = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) < +\infty\}$$

로 정의되어 진다.

함수 g 의 에피그라프 $epig$ 는

$$epig = \{(x, r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid x \in domg,\ g(x) \leq r\}$$

로 정의되어 진다.

$a \in domg$ 인 a 에서 함수 g 의 아래 미분는

$$\partial g(a) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid g(x) - g(a) \geq \langle v, x - a\rangle\ \ \forall x \in domg\}$$

로 정의되어지는 집합이고,

$\epsilon \geq 0$ 인 ϵ 에 대하여 함수 g 의 ϵ-아래미분는

$$\partial_\epsilon g(a) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid g(x) - g(a) \geq \langle v, x - a\rangle - \epsilon\ \forall x \in domg\}$$

로 정의되는 집합이다.

위에서 정의된 정의들에 대한 설명은 [17, 41]에 잘 되어 있다.

본 논문에서는 다음과 같은 벡터 볼록 최적화 문제 (VP)를 생각한다.

$$\text{(VP)} \qquad \begin{array}{ll} \text{Minimize} & \varphi(x) := (\varphi_1(x), \cdots, \varphi_p(x)) \\ \text{subject to} & x \in D. \end{array}$$

여기서 $\varphi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \cdots, p$ 는 볼록함수이고 D 는 $\mathbb{R}^n$ 의 폐 볼록 부분집합이다.

(VP)의 해는 다음과 같이 정의된다.

정의 3.1. $\bar{x} \in D$ 라 하자.

(1) 임의의 $x \in D$ 에 대해서

$$(\varphi_1(x) - \varphi_1(\bar{x}), \cdots, \varphi_p(x) - \varphi_p(\bar{x})) \notin -\mathbb{R}^p_+ \setminus \{0\}$$

가 성립할 때 $\bar{x} \in D$ 는 (VP)의 효율해 (efficient solution) 라 하고,

(2) $\bar{x} \in D$ 가 (VP)의 효율해이고, 각 $i \in \{1, \cdots, p\}$ 와 $\varphi_i(x) < \varphi_i(\bar{x})$ 인 임의의 $x \in D$ 에 대해 $\varphi_j(x) > \varphi_j(\bar{x})$ 이고

$$\frac{\varphi_i(\bar{x}) - \varphi_i(x)}{\varphi_j(x) - \varphi_j(\bar{x})} \le M$$

가 되는 $j \in \{1, \cdots, p\}$ 가 존재하는 상수 $M > 0$ 가 존재할 때 $\bar{x} \in D$ 를 (VP)의 진성 효율해 (properly efficient solution) 라 한다.

(3) 임의의 $x \in D$ 에 대해서

$$(\varphi_1(x) - \varphi_1(\bar{x}), \cdots, \varphi_p(x) - \varphi_p(\bar{x})) \notin -\overset{o}{\mathbb{R}}{}^p_+$$

가 성립할 때 $\bar{x} \in D$ 를 (VP)의 약 효율해 (weakly efficient solution) 라 한다.

(VP)의 효율해 전체 집합을 Eff(VP), 진성 효율해 전체 집합을 $PrEff$(VP), 약 효율해 전체 집합을 $WEff$(VP)라 표시하자. 이 때, $PrEff(\text{VP}) \subset Eff(\text{VP}) \subset WEff(\text{VP})$ 가 성립함은 정의로 부터 분명하다. (VP)의 해에 대한 기본적 설명은 [11, 42]에 잘 되어 있다.

(VP)의 목적함수인 φ_i, $i = 1, \cdots, p$ 가 미분가능일 때, $f_i(x) = \nabla\varphi_i(x)$, $i = 1, \cdots, p$ 라 두고 이 f_i 들에 대한 제 2 절의 벡터 변분부등식 (VVIV), (MVVIV), (WVVIV) 를 각각 $(\text{VVIV})_\nabla$, $(\text{MVVIV})_\nabla$, $(\text{WVVIV})_\nabla$ 라 두자. 여기서 $\nabla\varphi_i(x)$ 는 x 에서의 함수 φ_i 의 구배 (gradient)이다. 예를 들면 $(\text{VVIV})_\nabla$ 는 아래와 같다.

$(\text{VVIV})_\nabla$ Find $\bar{x} \in D$ such that

$$(\langle\nabla\varphi_1(\bar{x}), x - \bar{x}\rangle, \cdots, \langle\nabla\varphi_p(\bar{x}), x - \bar{x}\rangle) \notin -\mathbb{R}^p_+ \setminus \{0\} \ \forall x \in D.$$

최근에 Giannessi ([13])에 의해 아래와 같은 정리 3.1이 밝혀졌다.

정리 3.1. (VP)의 목적함수 φ_i, $i = 1, \cdots, p$ 가 미분가능일 때 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} sol(\text{VVIV})_\nabla \subset sol\ (\text{MVVIV})_\nabla &= Eff(\text{VP}) \\ &\subset WEff(\text{VP}) = sol(\text{WVVIV})_\nabla. \end{aligned}$$

정리 3.1을 미분 불가능한 볼록 함수들로 구성된 벡터 볼록 최적화 문제 (VP)로 확장하기 위해서 아래와 같은 (VP)의 목적함수인 φ_i 들의 아래미분 $\partial\varphi_i$ 에 대한 보통 (스칼라)의 변분부등식과 벡터 변분부등식을 생각해야 한다. 여기서 $\partial\varphi_i$ 는 다가함수 (multifunction) 임을 주목하자.

$(\text{VIM})_\lambda$ Find $\bar{x} \in D$ such that $\exists \xi_i \in \partial\varphi_i(\bar{x}),\ i = 1, \cdots, p$, such that
$$\left\langle \sum_{i=1}^p \lambda_i \xi_i, x - \bar{x} \right\rangle \geq 0 \quad \forall x \in D,$$

여기서 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \in S_+$.

$(\text{MVIM})_\lambda$ Find $\bar{x} \in D$ such that $\forall x \in D$, $\exists \xi_i \in \partial\varphi_i(x)$, $i = 1, \cdots, p$, such that
$$\left\langle \sum_{i=1}^p \lambda_i \xi_i, x - \bar{x} \right\rangle \geq 0,$$

여기서 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \in S_+$.

$(\text{VVIM})_1$ Find $\bar{x} \in D$ such that $\forall x \in D$, $\forall \xi_i \in \partial\varphi_i(\bar{x})$, $i = 1, \cdots, p$,
$$(\langle \xi_1, x - \bar{x} \rangle, \cdots, \langle \xi_p, x - \bar{x} \rangle) \notin -\mathbb{R}^p_+ \setminus \{0\}.$$

$(\text{VVIM})_2$ Find $\bar{x} \in D$ such that $\exists \xi_i \in \partial\varphi_i(\bar{x})$, $i = 1, \cdots, p$, such that
$$(\langle \xi_1, x - \bar{x} \rangle, \cdots, \langle \xi_p, x - \bar{x} \rangle) \notin -\mathbb{R}^p_+ \setminus \{0\} \quad \forall x \in D.$$

$(\text{VVIM})_3$ Find $\bar{x} \in D$ such that $\forall x \in D$, $\exists \xi_i \in \partial\varphi_i(\bar{x})$, $i = 1, \cdots, p$, such that
$$(\langle \xi_1, x - \bar{x} \rangle, \cdots, \langle \xi_p, x - \bar{x} \rangle) \notin -\mathbb{R}^p_+ \setminus \{0\}.$$

(MVVIM) Find $\bar{x} \in D$ such that $\forall x \in D$, $\forall \xi_i \in \partial\varphi_i(x)$, $i = 1, \cdots, p$, such that
$$(\langle \xi_1, x - \bar{x} \rangle, \cdots, \langle \xi_p, x - \bar{x} \rangle) \notin -\mathbb{R}^p_+ \setminus \{0\}.$$

$(\text{WVVIM})_1$ Find $\bar{x} \in D$ such that $\forall x \in D$, $\forall \xi_i \in \partial\varphi_i(\bar{x})$, $i = 1, \cdots, p$, such that
$$(\langle \xi_1, x - \bar{x} \rangle, \cdots, \langle \xi_p, x - \bar{x} \rangle) \notin -\overset{o}{\mathbb{R}}{}^p_+.$$

$(\text{WVVIM})_2$ Find $\bar{x} \in D$ such that $\exists \xi_i \in \partial\varphi_i(\bar{x})$, $i = 1, \cdots, p$, such that
$$(\langle \xi_1, x - \bar{x} \rangle, \cdots, \langle \xi_p, x - \bar{x} \rangle) \notin -\overset{o}{\mathbb{R}}{}^p_+ \quad \forall x \in D.$$

$(\text{WVVIM})_3$ Find $\bar{x} \in D$ such that $\forall x \in D$, $\exists \xi_i \in \partial\varphi_i(\bar{x})$, $i = 1, \cdots, p$, such that

$$\left(\langle \xi_1, x-\bar{x}\rangle, \cdots, \langle \xi_p, x-\bar{x}\rangle\right) \notin -\overset{o}{\mathbb{R}}{}^p_+.$$

(WMVVIM) Find $\bar{x} \in D$ such that $\forall x \in D$, $\forall \xi_i \in \partial\varphi_i(x)$, $i = 1, \cdots, p$, such that

$$\left(\langle \xi_1, x-\bar{x}\rangle, \cdots, \langle \xi_p, x-\bar{x}\rangle\right) \notin -\overset{o}{\mathbb{R}}{}^p_+.$$

윗의 변분부등식의 해집합을 각각

$$sol(VIM)_\lambda, sol(MVIM)_\lambda, sol(VVIM)_1, \cdots, sol(WMVVIM)$$

라 둔다.

윗의 변분부등식의 해집합과 (VP)의 해집합 사이에 아래와 같은 결과를 얻을 수 있다 ([32, 37]).

정리 3.2. 다음이 성립한다.
(1) $sol(\text{VVIM})_1 \subset sol(\text{VVIM})_2$.
(2) $$PrEff(\text{VP}) = \bigcup_{\lambda \in \overset{o}{S}_+} sol(\text{VIM})_\lambda \subset sol(\text{VVIM})_2 \subset sol(\text{VVIM})_3 \subset sol(\text{MVVIM}) = Eff(\text{VP}).$$
(3) $$\begin{aligned} sol(\text{WVVIM})_1 \subset WEff(\text{VP}) &= \bigcup_{\lambda \in S_+} sol(\text{VIM})_\lambda \\ &= \bigcup_{\lambda \in S_+} sol(\text{MVIM})_\lambda = sol(\text{WVVIM})_2 \\ &= sol(\text{WVVIM})_3 = sol(\text{WMVVIM}). \end{aligned}$$

특별한 가정아래에서는 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다 ([37]).

정리 3.3. (1) *D 가 $\mathbb{R}^n$ 에 있어서의 볼록 다면체 (polyhedral convex set)일 때*

$$sol(VVIM)_2 = PrEff(VP).$$

(2) *D 가 $\mathbb{R}^n$ 에 있어서의 볼록 다면체이고, 각 $i = 1, \cdots, p$ 에 대해서 $epi\varphi_i$ 가 $\mathbb{R}^n$ 에 있어서의 볼록 다면체일 때*

$$sol(VVIM)_3 = PrEff(VP).$$

최근에 Jeyakumar, Lee, Dinh ([19])는 제약상정 조건 없이 성립하는 스칼라 볼록 최적화 문제에 대한 수렴적 최적 조건을 밝혔다. 그리고 Lee, Lee ([38])는 벡터 볼록 최적화 문제에 대한 수렴적 최적조건을 얻고, 제약집합 D 가 구체적으로 주어질 때에 있어서의 제 2 절의 벡터 변분부등식 (VVIV) 와 (WVVIV)의 해가 될 필요 충분 조건을 밝혔다. 제약상정 조건없이 성립하는 벡터 볼록 최적화 문제에 대한 최적조건에 대한 기본적인 연구는 [14]를 참고할 만 하다.

제약집합 D 가 구체적으로 주어질 때에 있어서의 제 2 절의 벡터 변분부등식 (VVIV)와 (WVVIV)의 해가 될 필요 충분 조건을 준다 ([38]).

정리 3.4. $g_i : I\!R^n \to I\!R$, $i = 1, \cdots, m$ 는 볼록 함수, $D = \{x \in I\!R^n \mid g_i(x) \leq 0,\ i = 1, \cdots, m\}$, $\bar{x} \in D$ 일 때 다음은 동치이다.

(1) $\bar{x} \in sol(\text{VVIV})$.

(2) $-(\sum_{i=1}^p f_i(\bar{x}), \langle \sum_{i=1}^p f_i(\bar{x}), \bar{x}\rangle) \in cl\Big(\bigcup_{\mu_i \geq 0} \sum_{i=1}^m epi(\mu_i g_i)^* +$
$\bigcup_{\nu_i \geq 0} \Big[\{\sum_{i=1}^p \nu_i f_i(\bar{x})\} \times I\!R_+ + (0, \sum_{i=1}^p \nu_i \langle f_i(\bar{x}), \bar{x}\rangle)\Big]\Big)$.

(3) $\exists \mu_n := (\mu_n^1, \cdots, \mu_n^m) \in I\!R_+^m$, $\delta_n \geq 0$, $v_n \in \partial_{\delta_n}(\sum_{i=1}^m \mu_n^i g_i)(\bar{x})$, $\nu_n := (\nu_n^1, \cdots, \nu_n^p) \in I\!R_+^p$ such that

$$\lim_{n\to\infty} (v_n + \textstyle\sum_{i=1}^p \nu_n^i f_i(\bar{x})) = -u,$$

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \textstyle\sum_{i=1}^m \mu_n^i g_i(\bar{x}) = 0.$$

(4) $\exists \mu_n := (\mu_n^1, \cdots, \mu_n^m) \in I\!R_+^m$, $\exists \nu_n := (\nu_n^1, \cdots, \nu_n^p) \in I\!R_+^p$, $x_n \in I\!R^n$, $s_n \in \sum_{i=1}^m \mu_n^i \partial g_i(x_n) + \sum_{i=1}^p \nu_n^i f_i(\bar{x})$ such that

$$\lim_{n\to\infty} s_n = -u,$$

$$\lim_{n\to\infty} \Big[\textstyle\sum_{i=1}^m \mu_n^i g_i(x_n) + \sum_{i=1}^p \nu_n^i \langle f_i(\bar{x}), x_n - \bar{x}\rangle\Big] = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}.$$

정리 3.5. $g_i : I\!R^n \to I\!R$, $i = 1, \cdots, m$ 는 볼록 함수, $D = \{x \in I\!R^n \mid g_i(x) \leq 0,\ i = 1, \cdots, m\}$, $\bar{x} \in D$ 일 때 다음은 동치이다.

(1) $\bar{x} \in sol(\text{WVVIV})$.

(2) $\exists \lambda := (\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \in S_+$, $\mu_n := (\mu_n^1, \cdots, \mu_n^m) \in I\!R_+^m$, $\epsilon_n \geq 0$, $v_n \in \partial_{\epsilon_n}(\sum_{i=1}^m \mu_n^i g_i)(\bar{x})$ such that

$$\lim_{n\to\infty} v_n = -\textstyle\sum_{i=1}^p \lambda_i f_i(\bar{x}),$$

$$\lim_{n\to\infty} \textstyle\sum_{i=1}^m \mu_n^i g_i(\bar{x}) = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \epsilon_n = 0.$$

(3) $\exists \lambda := (\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \in S_+$, $\mu_n := (\mu_n^1, \cdots, \mu_n^m) \in I\!R_+^m$, $x_n \in I\!R^n$, $v_n \in \sum_{i=1}^m \mu_n^i \partial g_i(x_n)$ such that

$$\lim_{n\to\infty} v_n = -\textstyle\sum_{i=1}^p \lambda_i f_i(\bar{x}),$$

$$\lim_{n\to\infty} \textstyle\sum_{i=1}^m \mu_n^i g_i(x_n) = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}.$$

만약 $\bigcup_{\mu_i \geq 0} \sum_{i=1}^m epi(\mu_i g_i)^*$ 가 폐집합이면 아래와 같은 정리를 얻을 수 있다. Slater 조건이 성립하면, 즉, $g_i(x_0) < 0, \ \ i = 1, \cdots, m$ 가 되는 x_0 가 존재하면 $\bigcup_{\mu_i \geq 0} \sum_{i=1}^m epi(\mu_i g_i)^*$ 가 폐집합이 된다.

정리 3.6. *$g_i : I\!R^n \to I\!R$, $i = 1, \cdots, m$ 는 볼록 함수, $D = \{x \in I\!R^n \mid g_i(x) \leq 0, \ i = 1, \cdots, m\}$, $\bar{x} \in D$ 일 때, 만약 $\bigcup_{\mu_i \geq 0} \sum_{i=1}^m epi(\mu_i g_i)^*$ 가 폐집합이면 다음은 동치이다.*

(1) $\bar{x} \in sol(\text{WVVIV})$.
(2) $\exists \lambda := (\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \in S_+, \ \mu := (\mu_1, \cdots, \mu_m) \in I\!R^m_+$ such that

$$-\sum_{i=1}^p \lambda_i f_i(\bar{x}) \in \sum_{j=1}^m \mu_j \partial g_j(\bar{x}),$$

$$\sum_{j=1}^m \mu_j g_j(\bar{x}) = 0.$$

제 4 절 섭동된 벡터 변분부등식의 안정성

본 절에서는 매개변수 (parameter) 에 의해 섭동된 (perturbed) 벡터 변분부등식의 안정성 결과와 이 결과를 섭동된 벡터 최적화 문제에 적용하여 얻는 결과를 제시한다 ([31]).

M, Λ 를 $M \subset I\!R^s$, $\Lambda \subset I\!R^r$ 인 집합, $K : \Lambda \to 2^{I\!R^n}$ 를 폐 볼록 집합을 함수값으로 가지는 다가함수, 그리고 $f_i : I\!R^n \times M \to I\!R^n$, $\ i = 1, \cdots, p$, 를 주어진 함수라 하자. 매개변수 $(\mu, \lambda) \in M \times \Lambda$ 에 대하여 다음과 같은 섭동된 벡터 변분부등식을 생각한다.

(VVIV(μ,λ)) Find $x \in K(\lambda)$ such that $\forall x' \in K(\lambda)$,

$$(\langle f_1(x,\mu), x'-x \rangle, \cdots, \langle f_p(x,\mu), x'-x \rangle) \notin -I\!R^p_+ \setminus \{0\}.$$

(WVVIV(μ,λ)) Find $x \in K(\lambda)$ such that $\forall x' \in K(\lambda)$,

$$(\langle f_1(x,\mu), x'-x \rangle, \cdots, \langle f_p(x,\mu), x'-x \rangle) \notin -\overset{o}{I\!R}{}^p_+.$$

윗의 섭동된 벡터 변분부등식의 해집합을

$$sol(\text{VVIV}(\mu,\lambda)), \quad sol(\text{WVVIV}(\mu,\lambda))$$

라 표시한다. 몇 가지 정의를 주고자 한다.

함수 $h : I\!R^n \to I\!R$ 가 $\rho > 0$ 에 대한 강 볼록 (strongly convex) 이라는 것은 h 가 $\forall x, x' \in I\!R^n \ \ \forall t \in [0,1]$,

$$h(tx + (1-t)x') \leq th(x) + (1-t)h(x') - \rho t(1-t)\|x - x'\|^2$$

를 만족할 때를 말한다. 함수 h 가 연속적으로 미분가능이고 $\rho > 0$ 에 대한 강 볼록이면 $\nabla h(\cdot)$ 는 강 단조 (strongly monotone) 이다. 즉,

$$\langle \nabla h(x) - \nabla h(x'), x - x' \rangle \geq \alpha \|x - x'\|^2 \quad \forall x, x' \in I\!R^n$$

인 상수 $\alpha > 0$ 가 존재한다 ([44]). 다음과 같이 $I\!R^n$ 의 부분집합 A, B 에 대한 하우스도르프 거리 (Hausdorff distance)의 정의를 준다.

$$H(A, B) := \max\{\sup_{a \in A} d(a, B),\ \sup_{b \in B} d(b, A)\}.$$

여기서 $d(a, B) = \inf_{b \in B} \|a - b\|$.

아래와 같은 섭동된 강 단조 벡터 변분부등식에 대한 안정성 결과를 얻을 수 있다 ([31]).

정리 4.1. *주어진 매개변수* $(\bar{\mu}, \bar{\lambda}) \in M \times \Lambda$ *에 대하여 다음이 성립한다고 가정한다.*

(1) (K *의 의사 리프시츠 연속성*): *임의의* $\bar{x} \in sol(WVVIV(\bar{\mu}, \bar{\lambda}))$ *에 대하여 다가함수* K *는* $(\bar{\lambda}, \bar{x})$ *에서 의사 리프시츠 (pseudo-Lipschitz), 즉,* $\forall \lambda,\ \lambda' \in \Lambda \cap V$,

$$K(\lambda) \cap W \subset K(\lambda') + k\|\lambda - \lambda'\| B$$

가 되는 $\bar{\lambda}$ *의 근방* V, $\bar{x}$ *의 근방* W, *상수* $k > 0$ *가 존재한다. 여기서* B *는* $I\!R^n$ *의 폐단위구 (closed unit ball)이다.*

(2) (f_i *의 강 단조성*): $\forall x,\ x' \in I\!R^n$, $\forall \mu \in M \cap U_1$, $i = 1, 2, \cdots, p$,

$$\langle f_i(x, \mu) - f_i(x', \mu), x - x' \rangle \geq \alpha \|x - x'\|^2$$

가 되는 $\bar{\mu}$ *의 근방* U_1, *상수* $\alpha > 0$ *가 존재한다.*

(3) (f_i *의 리프시츠 연속성*): $\forall x,\ x' \in I\!R^n$, $\forall \mu,\ \mu' \in M \cap U_2$, $i = 1, 2, \cdots, p$,

$$\|f_i(x, \mu) - f_i(x', \mu')\| \leq l(\|x - x'\| + \|\mu - \mu'\|)$$

가 되는 $\bar{\mu}$ *의 근방* U_2, *상수* $l > 0$ *가 존재한다.*

이 때 다음 (i)과 (ii)가 성립하는 $\bar{\mu}$ 의 근방 $\widetilde{U}$, $\bar{\lambda}$ 의 근방 $\widetilde{V}$, 상수 $k_{\bar{\mu}} > 0$, $k_{\bar{\lambda}} > 0$ 가 존재한다.

(i) 임의의 $(\mu, \lambda) \in (M \cap \widetilde{U}) \times (\Lambda \cap \widetilde{V})$ 에 대하여

$$sol(\mathrm{VVIV}(\mu, \lambda)) \neq \emptyset,\ sol(\mathrm{WVVIV}(\mu, \lambda)) \neq \emptyset.$$

(ii) 임의의 (μ, λ), $(\mu', \lambda') \in (M \cap \widetilde{U}) \times (\Lambda \cap \widetilde{V})$ 에 대하여

$$H(sol(\mathrm{WVVIV}(\mu, \lambda)), sol(\mathrm{WVVIV}(\mu', \lambda'))) \leq k_{\bar{\mu}} \|\mu - \mu'\| + k_{\bar{\lambda}} \|\lambda - \lambda'\|^{\frac{1}{2}},$$

$$H(sol(\mathrm{VVIV}(\mu, \lambda)), sol(\mathrm{VVIV}(\mu', \lambda'))) \leq k_{\bar{\mu}} \|\mu - \mu'\| + k_{\bar{\lambda}} \|\lambda - \lambda'\|^{\frac{1}{2}}.$$

정리 4.1을 섭동된 벡터 최적화 문제에 적용하고자 한다.

집합 M, Λ 와 다가함수 K 를 이 절의 처음 부분과 같은 것으로 본다. $\varphi_i : \mathbb{R}^n \times M \to \mathbb{R}$, $i = 1, \cdots, p$ 를 임의로 고정된 $\mu \in M$ 에 있어서 첫 번째 변수 x 에 대하여 연속적으로 미분 가능한 함수라 가정한다. 주어진 (μ, λ) 에 대하여 다음과 같은 섭동된 벡터 최적화 문제를 생각한다.

$$\begin{array}{lll} (\mathrm{VP}(\mu,\lambda)) & \text{Minimize} & \varphi(x,\mu) := (\varphi_1(x,\mu), \cdots, \varphi_p(x,\mu)) \\ & \text{subject to} & x \in K(\lambda). \end{array}$$

$(\mathrm{VP}(\mu,\lambda))$의 효율해 전체 집합을 $Eff(\mathrm{VP}(\mu,\lambda))$의 약 효율해 전체 집합을 $WEff(\mathrm{VP}(\mu,\lambda))$라 둔다.

정리 3.1을 사용하여 정리 4.1을 섭동된 벡터 강 볼록 최적화 문제 $(\mathrm{VP}(\mu,\lambda))$에 적용하면 다음과 같은 $(\mathrm{VP}(\mu,\lambda))$에 대한 안정성 결과를 얻을 수 있다 ([31]).

정리 4.2. *주어진 매개변수* $(\bar{\mu}, \bar{\lambda}) \in M \times \Lambda$ *에 대하여 다음이 성립한다고 가정한다.*

(1) *(K 의 의사 리프시즈 연속성): 임의의* $\bar{x} \in WEff(VP(\bar{\mu},\bar{\lambda}))$ *에 대하여 다가함수* K *는* $(\bar{\lambda}, \bar{x})$ *에서 의사 리프시즈 (pseudo-Lipschitz) 이다.*

(2) *(φ_i 의 강 볼록성): 임의의* $\mu \in M \cap U_1$*와* $i \in \{1, 2, \cdots, p\}$ *에 대해서, 함수* $\varphi_i(\cdot, \mu)$, $i = 1, \cdots, p$ *는* $\rho > 0$ *에 대한 강 볼록 함수가 되는* $\bar{\mu}$ *의 근방* U_1 *가 존재한다.*

(3) *($\nabla_x \varphi_i(\cdot)$ 의 리프시즈 연속성):* $\forall x, x' \in \mathbb{R}^n$, $\forall \mu, \mu' \in M \cap U_2$, $\forall i = 1, 2, \cdots, p$

$$\|\nabla_x \varphi_i(x,\mu) - \nabla_x \varphi_i(x',\mu')\| \le l(\|x - x'\| + \|\mu - \mu'\|)$$

가 되는 $\bar{\mu}$ *의 근방* U_2, *상수* $l > 0$ *가 존재한다.*

이 때 다음 (i)과 (ii)가 성립하는 $\bar{\mu}$ *의 근방* $\widetilde{U}$, $\bar{\lambda}$ *의 근방* $\widetilde{V}$, *상수* $k_{\bar{\mu}} > 0$, $k_{\bar{\lambda}} > 0$ *가 존재한다.*

(i) *임의의* $(\mu, \lambda) \in (M \cap \widetilde{U}) \times (\Lambda \cap \widetilde{V})$ *에 대하여*

$$Eff(VP(\mu,\lambda)) \neq \emptyset, \; WEff(VP(\mu,\lambda)) \neq \emptyset.$$

(ii) *임의의* (μ, λ), $(\mu', \lambda') \in (M \cap \widetilde{U}) \times (\Lambda \cap \widetilde{V})$ *에 대하여*

$$H(WEff(VP(\mu,\lambda)), WEff(VP(\mu',\lambda'))) \le k_{\bar{\mu}}\|\mu - \mu'\| + k_{\bar{\lambda}}\|\lambda - \lambda'\|^{\frac{1}{2}},$$

$$H(Eff(VP(\mu,\lambda)), Eff(VP(\mu',\lambda'))) \le k_{\bar{\mu}}\|\mu - \mu'\| + k_{\bar{\lambda}}\|\lambda - \lambda'\|^{\frac{1}{2}}.$$

제 5 절 끝내는 말

본 논문에서는 벡터값을 가지는 함수로 이루어진 벡터 변분부등식들의 간단한 존재정리와 해집합들 사이의 관계 (정리 2.1-2.5), 미분 (불) 가능한 볼록함수로 이루어진 벡터 볼록 최적화 문제의 해집합들과 볼록 함수의 (아래)미분으로 표현된 벡터 변분부등식의 해집합들과의 관계 (정리 3.1-3.3), 제약집합이 볼록 함수에 의해 구체적으로 주어 질 때에 있어서의 벡터 변분부등식의 해가 될 필요 충분 조건 (정리 3.4-3.6), 섭동된 강 단조 벡터 변분부등식의 안정성 결과와 섭동된 벡터 강 볼록 최적화 문제에의 적용 (정리 4.1, 4.2)에 대한 최근 연구결과들 ([13, 31, 32, 34, 37, 38, 52])을 정리하였다.

다가함수에 대한 벡터 변분부등식의 해집합들 사이의 관계에 대한 연구가 요구된다. 특히 $sol(\mathrm{WVVIM})_2 = sol(\mathrm{WVVIM})_3$ 가 다가함수에 대하여 성립하는냐 하는 것은 아직까지 풀리지 않았다. 그리고 섭동된 아핀 단조 벡터 변분부등식에 대한 안정성 문제와 섭동된 아핀 강 단조 벡터 변분부등식에 대한 민감도 문제에 대한 연구도 요구되어 진다. 벡터 변분부등식의 해를 구하기 위한 알고리즘에 대한 연구는 시작 단계에 있다 ([15]).

참고 문헌

[1] G. Y. Chen and G. M. Cheng, *Vector variational inequality and vector optimizaiton*, Toward Interactive and Intelligent Decision Support Systems, Edited by Y. Sawaragi, K. Inoue and H. Nakayama, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems Vol. 285, Springer-Verlag, pp. 408–416, 1987.

[2] G. Y. Chen and B. D. Craven, *A vector variational inequality and optimization over an efficient set*, Z. Oper. Res. **34** (1990), 1–12.

[3] G. Y. Chen and X. Q. Yang, *The vector complementary problem and its equivalences with the weak minimal element in ordered spaces*, J. Math. Anal. Appl. **153** (1990), 136–158.

[4] G. Y. Chen, *Existence of solutions for a vector variational inequality: an extension of the Hartmann-Stampacchia theorem*, J. Optim. Theory Appl. **74** (1992), 445–456.

[5] G. Y. Chen and B. D. Craven, *Existence and continuity of solutions for vector optimization*, J. Optim. Theory Appl. **81** (1994), 459–468.

[6] G. Y. Chen, C. J. Goh and X. Q. Yang, *Network equilibrium with Vector costs and nonlinear scalarization methods*, Math. Methods Oper. Res. **49** (1999), 239–253.

[7] Y. Chiang, O. Chadli and J. C. Yao, *Existence of solutions to implicit vector variational inequalities*, J. Optim. Theory Appl. **116** (2003), 251–264.

[8] P. Daniele and A. Maugeri, *Vector variational inequalities and modelling of a continuum traffic equilibrium problem*, Vector Variational Inequalities and Vector Equilibria, Edited by F. Giannessi, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands, pp. 97–111, 2000.

[9] A. Daniilidis and N. Hadjisavvas, *Existence theorems for vector variational inequalities*, Bull. Austral. Math. Soc. **54** (1996), 473–481.

[10] J. Fu, *Simultaneous vector variational inequalities and vector implicit complementarity problem*, J. Optim. Theory Appl. **93**(1997), 141-151.

[11] A. M. Geoffrion, *Proper efficiency and the theory of vector maximization*, J. Math. Anal. Appl. **22** (1968), 618–630.

[12] F. Giannessi, *Theorems of alternative, quadratic program and complementarity problems*, Variational Inequality and Complementarity Problems, Edited by R. W. Cottle, F. Giannessi, J.-L. Lions, pp.151–186, 1980.

[13] ———, *On Minty variational principle*, New Trends in Mathematical Programming, Edited by F. Giannessi, S. Komlosi, and T. Rapcsák, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands, pp. 93–99, 1998.

[14] B. M. Glover, V. Jeyakumar and A. M. Rubinov, *Dual conditions characterizing optimality for convex multi-objective programs*, Math. Programming **84** (1999), 201–207.

[15] C.-J. Goh and X. Q. Yang, *Scalarization methods for vector variational inequality*, Vector Variational Inequalities and Vector Equilibria, Edited by F. Giannessi, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands, pp. 217–232, 2000.

[16] N. Hadjisavvas and S. Schaible, *From scalar to vector equilibrium problems in the quasimonotone case*, J. Optim. Theory Appl. **96** (1998), 297–309.

[17] J. B. Hiriart-Urruty and C. Lamarechal, *Convex Analysis and Minimization Algorithms*, Volumes I and II, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1993.

[18] J. Jahn, *Mathematical Vector Optimization in Partially Ordered Linear Spaces*, Peter Lang, Frankfurt am Main, Germany, 1986.

[19] V. Jeyakumar, G. M. Lee and N. D. Dinh, *New sequential Lagrange multiplier conditions characterizing optimality without constraint qualification for convex programs*, SIAM J. Optim. (to appear).

[20] P. H. Khanh and L. M. Luu, *On the upper semicontinuity with respect to parameters of solutions to vector quasi-variational inequalities and applications*, J. Global Optim. (to appear).

[21] M. H. Kim, S. H. Kum and G. M. Lee, *Vector variational inequalities involving vector maximal points*, J. Optim. Theory Appl. **114** (2002), 593–607.

[22] W. K. Kim and K. K. Tan, *On generalized vector quasi-variational inequalities*, Optim. **46** (1999), 185–198.

[23] I. V. Konnov and J. C. Yao, *On the generalized vector variational inequality problem*, J. Math. Anal. Appl. **206** (1997), 42–58.

[24] S. H. Kum, G. M. Lee and J. C. Yao, *An existence result for implicit vector variational inequality with multifunctions*, Appl. Math. Lett. **16** (2003), 453–458.

[25] S. H. Kum and G. M. Lee, *Remarks on implicit vector variatinal inequalities*, Taiwanese J. Math. **6** (2002), 369–382.

[26] B. S. Lee, G. M. Lee and D. S. Kim, *Generalized vector-valued variational inequalities and fuzzy extension*, J. Korean Math. Soc. **33** (1996), 609–624.

[27] B. S. Lee and G. M. Lee, *A vector version of Minty's lemma and application*, Appl. Math. Lett. **12** (1999), 43–50.

[28] G. M. Lee, D. S. Kim, B. S. Lee and S. J. Cho, *Generalized vector variational inequality and fuzzy extension*, Appl. Math. Lett. **6** (1993), 47–51.

[29] G. M. Lee, B. S. Lee and S. S. Chang, *On vector quasivariational inequalities*, J. Math. Anal. Appl. **203** (1996), 626–638.

[30] G. M. Lee, D. S. Kim and H. Kuk, *Existence of solutions for vector optimization problems*, J. Math. Anal. Appl. **220** (1998), 90–98.

[31] G. M. Lee, D. S. Kim, B. S. Lee and N. D. Yen, *Vector variational inequality as a tool for studying vector optimization problems*, Nonlinear Anal. TMA. **34** (1998), 745–765.

[32] G. M. Lee, *On relations between vector variational inequality and vector optimization problem*, Progress in Optimizatin, Edited by X. Q. Yang, A. I. Mees, M. E. Fisher, and L. S. Jennings, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands, pp. 167–179, 2000.

[33] G. M. Lee and S. H. Kum, *On implicit vector variational inequalities*, J. Optim. Theory Appl. **104** (2000), 409–425.

[34] G. M. Lee and N. D. Yen, *A result on vector variational inequalities with polyhedral constraint sets*, J. Optim. Theory Appl. **109** (2001), 193–197.

[35] G. M. Lee and M. H. Kim, *Remarks on relations between vector variational inequality and vector optimizaiton problem*, Nonlienar Anal. TMA. **47** (2001), 627–635.

[36] ______, *On second order necessary optimality conditions for vector optimization problems*, J. Korean Math. Soc. **40** (2003), 287–305.

[37] G. M. Lee and K. B. Lee, *Vector variational inequalities for nondifferentiable convex vector optimization problems*, submitted.

[38] ______, *On optimality conditions for convex vector optimization without constraint qualifications*, manuscript.

[39] S. J. Li, G. Y. Chen and K. L. Teo, *On the stability of generalized vector quasivariational inequality problems*, J. Optim. Theory Appl. **113** (2002), 283–295.

[40] D. T. Luc, *Theory of Vector Optimization*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 319, Springer-Verlag, 1989.

[41] R. T. Rockafellar, Convex Analysis, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1970.

[42] Y. Sawaragi, H. Nakayama and T. Tanino, Theory of Multiobjective Optimizatin, Academic Press, New York, NY, 1985.

[43] A. H. Siddiqi, Q. H. Aansari and R. Ahmad, *On vector variational inequality*, J. Optim. Theory Appl. **84** (1995), 171–180.

[44] J.-P. Vial, *Strong and weak convexity of sets and functions*, Math. Oper. Res. **8** (1983), 231–259.

[45] A. R. Warburton, *Quasiconcave vector maximization: Connectedness of the sets of Pareto-optimal and Weak Pareto-optimal Alternatives*, J. Optim. Theory Appl. **40** (1983), 537–557.

[46] D. E. Ward and G. M. Lee, *On relations between vector optimization problems and vector variational inequalities*, J. Optim. Theory Appl. **113** (2002), 583–596.

[47] X. Q. Yang, *Generalized convex functions and vector variational inequalities*, J. Optim. Theory Appl. **79** (1993), 563–580.

[48] ______, *Vector variational inequality and its duality*, Nonlinear Anal. TMA. **21** (1993), 869–877.

[49] ______, *Vector variational inequality and vector pseudolinear programming*, J. Optim. Theory Appl. **95** (1997), 729–734.

[50] X. Q. Yang and C. J. Goh, *On vector variational inequalities:application to vector equilibria*, J. Optim. Theory Appl. **95** (1997), 431–443.

[51] ———, *Vector variational inequalities, vector equilibrium flow and vector optimization*, Vector Variational Inequalities and Vector Equilibria, Edited by F. Giannessi, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands, pp. 447–465, 2000.

[52] N. D. Yen and G. M. Lee, *On monotone and strongly monotone vector variational inequalities*, Vector Variational Inequalities and Vector Equilibria, Edited by F. Giannessi, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands, pp. 467–478, 2000.

[53] S. Y. Yu and J. C. Yao, *On vector variational inequalitis*, J. Optim. Theory Appl. **89** (1996), 749–769.

부경대학교 자연과학대학 수리과학부
부산시 남구 대연3동 599-1번지
608-737
E-mail: gmlee@pknu.ac.kr