

유체기계 덕트 내 시변 음원의 음향 특성에 관한 연구

An Analysis of the Acoustical Source Characteristics in the Time-varying Fluid Machines

장 승 호*, 이 준 신*, 이 정 권**
(Seung-Ho Jang*, Jun-Shin Lee*, Jeong-Guon Ih**)

* 한국전력 전력연구원 원자력연구실, ** 한국과학기술원 기계공학과
(접수일자: 2002년 6월 11일; 수정일자: 2003년 2월 7일; 채택일자: 2003년 2월 15일)

유체기계 덕트 내 음원은 흔히 선형 시불변 모델을 이용하여 음원 임피던스와 강도로 특성화되어진다. 그러나 내연기관 및 압축기 음원에 대한 여러 측정에서 물리적으로 타당하지 않은 부의 저항이 보고된 바 있다. 본 논문에서는 유체기계의 시변성이 음원 특성에 미치는 영향에 대하여 해석적으로 연구하였다. 이를 위하여 왕복동 피스톤 및 배기계를 구성된 간단한 유체기계를 전형적인 주기적으로 시변하는 계로서 다루었으며 등가 음향 회로를 해석하였다. 해석 해를 이용한 모사 측정에서는 실제 음원의 시변성이 부의 저항에 대한 주요한 원인임을 볼 수 있다. 비교적 작은 시변함의 크기를 가지는 경우에 피스톤이 정적 계의 고유진동수의 두 배 또는 그 정수로 나뉘는 주파수로 작동한다면 음원이 큰 음향 파워를 방사하게 됨을 알 수 있다.

핵심용어: 음원 특성, 흡/배기계, 시변 계, 왕복동 엔진

부고분야: 소음 및 공력음향 분야 (10.1)

The in-duct acoustical sources of fluid machines are often characterized by the source impedance and strength using the linear time-invariant model. However, negative resistances, which are physically unreasonable, have been found throughout various measurements of the source properties in IC-engines and compressors. In this paper, the effects of the time-varying nature of fluid machines on the source characteristics are studied analytically. For this purpose, the simple fluid machine consisting of a reciprocating piston and an exhaust is considered as representing a typical periodic, time-varying system and the equivalent circuits are analyzed. Simulated measurements using the analytic solutions show that the time-varying nature in the actual sources is one of the main causes of the negative source resistances. It is also found that, for the small magnitude of the time-varying component, the source radiates large acoustic power if the piston operates at twice the natural frequency of the static system, or integral submultiples of that rate.

Keywords: Source characteristics, Intake/Exhaust system, Time-varying system, Reciprocating engine

ASK subject classification: Noise and aeroacoustics (10.1)

I. 서론

유체기계 흡/배기계를 통해 외부로 방사되는 유체 기인 소음을 저감하기 위해서는 계에 대한 음향 설계가 필요하다. 흡/배기계 특성에 대한 모델링 및 해석에는 여러 방법들이 이용될 수 있으며, 각각의 방법은 장단점을 가지고 있다[1]. 송풍기에서 고효율, 저소음화를 위한 날개

의 형상 설계를 목적으로 한다거나, 압축기 및 내연기관 엔진에서 엔진 성능에 관심을 두어서 흡/배기계가 실린더 내부 호흡에 주는 영향을 연구하고자 한다면 비선형 시변 (nonlinear, time-variant) 유동 방정식을 기반으로 하는 해석 방법이 적합하다. 여기에는 유한차분법, 특성곡선법 등이 있으며 이러한 목적에서 충분히 정확한 결과를 낸다[1,2]. 그러나 흡/배기계를 구성하는 음향 요소, 특히 소음기의 내부 구조는 일반적으로 매우 복잡하며, 이에 대한 해석 및 계산에는 많은 시간과 노력을 요구한다. 따라서 흡/배기계의 음향 특성을 해석하는 데에는

책임지자: 장승호 (jacie3@hanmail.net)
05-380 대전광역시 유성구 문지동 103-16
한국전력 전력연구원 원자력연구실
전화 042-865-5661; 팩스: 042-865-5514)

선형 음향 이론 (linear acoustic theory)이 흔히 이용되어져 왔다.

선형 음향 이론을 이용하면 복잡한 소음계를 주파수 영역의 전달행렬 (transfer matrix) 조합으로 모델링할 수 있으며 매우 빠른 해석이 가능하다. 이러한 모델링에는 해석적 방법이나 유한요소법, 경계요소법과 같은 수치해석법이 쓰일 수 있다. 실제 유체기계 흡/배기계 내의 비교적 큰 음압 레벨에도 불구하고 선형 음향 이론은 소음기 음향 특성 예측에 비교적 정확한 결과를 내미 보고되었다[1].

소음기만의 음향 성능 인자인 전달손실 (transmission loss)은 그 전달행렬만으로 예측이 가능하다. 그러나 더욱 실제적이라 할 수 있는 삽입손실 (insertion loss), 또는 방사음압레벨 (radiated sound pressure level)은 그 예측에 있어서 음원에 대한 정보와 미관에서의 음 방사 특성을 알아야 한다. 미관에서의 음향 방사 특성은 비교적 잘 알려져 있으나[3] 음원의 모델링 및 측정법에 대해서는 아직 불확실한 영역이며 많은 연구가 필요하다.

음원에 대한 특성을 묘사하기 위해서는 그 강도 (strength)와 서로 다른 조건 및 주변 환경들 (surroundings)에 어떻게 반응하는지를 알아야 한다. 여기서 서로 다른 주변 환경은 음원에 장착되는 흡/배기계, 즉 음향 부하 (acoustic load)의 변화를 의미한다. 이때 음원 내부에서 일어나는 현상의 정밀한 정보를 알기보다는 외부로 방사하는 특성을 알기 위한 것이 목적인 경우에는 암상자 (black box) 모델을 이용할 수 있고, 이미 알고 있는 조건 및 환경에서 음원을 테스트하여 가장 적합한 모델 인자 값을 정하게 된다.

간단하며 널리 쓰이는 흡/배기계 소음원 모델은 선형 시불변 (linear time-invariant) 음원이며 선형이고 시간에 독립적인 계수를 가지는 지배 방정식으로 묘사된다. 따라서 주파수 영역에서의 음원 인자들을 이용하여 음원을 간단히 특성화될 수 있으며, 전달행렬을 이용한 선형 소음기 해석 모델과 직접 연성될 수 있다. 선형 시불변 모델을 가정하였을 때 음원 인자들을 측정할 수 있는 여러 측정법이 제안되어졌다[4-8]. 이들 측정법은 추가적인 외부 가진 음원의 이용 여부에 따라 직접법과 간접법으로 분류된다[8].

압축기, 내연기관 등의 왕복동 엔진 음원들의 경우 본질적으로 시간에 따라 변하는 계이며, 시불변 모델을 이용하였을 때 근사적인 결과를 얻었으나 몇가지 문제점들이 보고되었다. 직접법으로 측정된 내연기관 배기계의 음원 임피던스는 특성 임피던스 (characteristic impedance)와

유사한 값이었으나[4,5], 간접법으로 측정된 결과에서 부의 부호를 가지는 음원 저항 값이 관찰되었다[7,8]. 이것은 시불변 모델에서 서로 다른 방법으로도 동일한 음원 인자 값을 얻어야 한다는 이론[9]에 위배되며, 부의 음원 저항치는 에너지 관점에서 물리적으로 타당하지 않은 결과이다. 이러한 원인이 측정 오차 뿐만 아니라 실제 음원의 비선형 및 시변성 효과일 수 있음이 보고된 바 있다 [10-12].

음원의 시변성에 대한 연구는 몇몇 연구자들에 의하여 수행된 바 있다. Wang[13]은 내연기관 흡기계 음원에 대한 선형 시변 모델을 소음기 전달행렬과 연성하여 흡기 소음 레벨을 예측하였다. Bodén[14]은 암상자 접근을 통하여 시변 음원 모델 및 측정법을 제안하였으나 측정 결과가 비교적 큰 입력 오차 민감성을 보였다. Ih와 Peat [11,12]는 간단한 선형 시변 모델에 대한 수치적 연구를 수행한 결과로서 음원 강도 및 임피던스 값이 어떠한 물리적 의미를 지니지 못하며, 특정 엔진에 있어서 고유한 값이 되지 못하고 부하에 따라 변하게 된다고 하였다. 이상의 기존 연구들에서는 해석 해를 통한 정성적인 연구가 미흡하였다.

본 논문에서는 유체기계 소음원을 시변계 (time-variant system)로 다루고 음향 부하와 연성되었을 때 나오는 응답에 대하여 정성적인 해석을 수행한다. 그러한 전형적인 시변하는 유체기계로서 피스톤의 왕복 운동에 의한 시변 체적 시스템을 다룬다. 또한 비선형적인 특성보다는 시변 특성에 관심을 두므로 해석의 간편성을 위하여 전체 계는 선형이며 피스톤만 운동하고 밸브는 운동하지 않는다고 한다.

II. 이론

일반적으로 계는 시불변 계와 시변 계로 나누어질 수 있다. 한 입력 $x(t)$ 에 대한 계의 응답이 $y(t) = H[x(t)]$ 일 때, 어느 τ 에 대하여도

$$y(t+\tau) = H[x(t+\tau)] \quad (1)$$

이면 H 는 시불변 계이다. 시불변 계는 상수를 계수로 가지는 미적분방정식에 의하여 묘사되어진다. 따라서 계수가 시간에 따라 변하는 경우에는 임의의 τ 에 대하여 식 (1)이 만족하지 않으며, 그러한 계는 시변 계이다. 그림 1에 보인 바와 같이 운동하는 피스톤 시스템을 살펴보면, 피스톤의 위치가 다른 상태 A와 B에서 동일한 P_m 이 각각

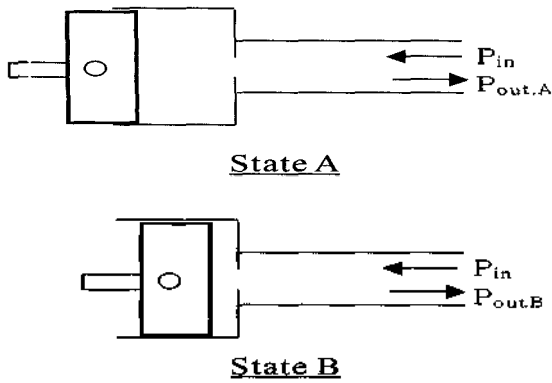


그림 1. 시변 음원으로서의 왕복동 피스톤
Fig. 1. Reciprocating piston as a time-varying source.

입력되었을 때 서로 다른 응답을 내게 된다. 따라서 시변 계이다. 실제 유체기계, 특히 왕복동 엔진은 서로 다른 상태를 거쳐서 작동하므로 입력이 되는 시간에 따라서 출력 결과가 바뀌어서 시변 계라고 할 수 있다. 만일 피스톤의 운동 변위가 매우 작다고 한다면 입력되는 시간에 무관하게 동일한 신호에 대해서는 거의 동일한 응답을 내므로 시불변 계로 다룰 수 있고, 그러한 일례로 덕트 내 작동 중인 스피커는 시불변 계라고 할 수 있다.

선형 시불변 계에 대하여는 그 해석 및 측정법이 잘 알려져 있으며 소음원에 대하여도 많은 연구가 수행된 바 있다[1,4-9]. 선형 시불변 음원은 주파수 영역에서 음원 임피던스와 음원 강도로 특성화 된다. 유체기계 흡/배기 음원에 대해서도 선형 시불변 가정을 함으로써 두 인자들의 측정값을 얻을 수 있으며 흡/배기 음향 설계에 이용되어져 왔다. 그러나 대부분의 유체기계는 근원적으로 비선형 시변 특성을 가지고 있다.

다음 절에서는 전형적인 시변 음원인 왕복 운동하는 피스톤을 가지는 간단한 유체기계에 대하여 다룬다. 이 때 문제를 간단히 하기 위하여 전체 계는 선형이라고 가정한다. 그러면 시변하는 계수를 가지는 선형 방정식을 얻을 수 있으며, 이에 대한 해석 해 및 안정성 조건을 구할 수 있다. 해석 해를 구하는 수화적인 방법은 새로운 것이 아니며 비교적 잘 알려져 있는 Floquet 이론[15]을 이용한다.

2.1. 지배방정식 유도

2.1.1. 실린더 내의 시변하는 체적

앞서의 그림 1과 같은 흡기 혹은 배기 계에서 피스톤 왕복이 있는 경우 실린더 내의 질량을 $q(t)$ 로 정의하면 다음과 같다.

$$q(t) = \rho(t)V(t) \tag{2}$$

여기서, $\rho(t)$ 와 $V(t)$ 는 각각 실린더 내의 밀도와 부피로서 시간의 함수이다. 실린더의 크기가 파장에 비하여 작아서 실린더 내의 기체 밀도는 균일하다고 가정한다. 식 (2)를 미분하면

$$\frac{dq(t)}{dt} = \rho(t)\frac{dV(t)}{dt} + V(t)\frac{d\rho(t)}{dt} \tag{3}$$

이다. 실린더 내에서 밖으로의 질량 흐름을 $u(t)$ 라고 하면, 질량 보존 법칙에 의하여

$$q(t) = -\int u(t)dt \tag{4}$$

이며, 식 (3)에 의하여

$$-u(t) = \rho(t)\frac{dV(t)}{dt} + V(t)\frac{d\rho(t)}{dt} \tag{5}$$

이다. $\rho(t)$ 를 압력에 관한 항으로 치환하기 위하여 아래에서 밀도와 압력의 선형 관계를 이용할 수 있다. 실린더 내의 압력을 $p(t)$ 라고 하면 Hooke의 법칙에 의하여

$$p(t) - p_0 = B_{ad}\left(\frac{\rho(t) - \rho_0}{\rho_0}\right) \tag{6}$$

이다. 여기서 p_0 와 ρ_0 는 각각 p 와 ρ 의 정상상태 (steady state) 성분이며, B_{ad} 는 단열 체적 계수 (adiabatic bulk modulus)이다. 음향 이론에서는 $B_{ad}/\rho_0 = c_0^2$ 이므로 식 (6)으로부터

$$\rho(t) = \frac{1}{c_0^2}(p(t) - p_0 + \rho_0 c_0^2) - \frac{1}{c_0^2}(p(t) + p_0) \tag{7}$$

을 얻을 수 있다[13]. 여기서 c_0 는 음속이며 $p_b = \rho_0 c_0^2 - p_0$ 는 시간 t 에 독립적인 항 (constant term)이다. 기체에서는 Poisson의 단열법칙 (Poisson's adiabatic law)에 의해서

$$c_0^2 = \left.\frac{dp}{d\rho}\right|_{\text{is}} = \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \tag{8}$$

이므로

$$p_b = (\gamma - 1)p_0 \tag{9}$$

이다. 여기서 γ 는 비열비 (specific heat ratio)이다. 교정된 압력 $P(t)$ 를

$$P(t) = p(t) + p_b \tag{10}$$

로 정의하면 밀도는 식 (7)로부터

$$p(t) = \frac{1}{c_0} P(t) \tag{11}$$

이다. 식 (11)을 식 (5)에 대입하면

$$-u(t) = \frac{1}{c_0} \frac{dV(t)}{dt} P(t) + \frac{1}{c_0} V(t) \frac{dP(t)}{dt} - \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{c_0} V(t) P(t) \right) \tag{12}$$

이다. 한편 밸브를 지나는 유동은 다음과 같이 밸브 임피던스를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다[16].

$$P(t) - P_v(t) = R_v u(t) + X_v \frac{du(t)}{dt} \tag{13}$$

여기서 R_v 는 밸브 저항 (valve resistance), X_v 는 밸브 리액턴스 (valve reactance) 관련 항이다. 또한 $P_v(t)$ 는 밸브를 바로 지난 지점의 압력 $p_v(t)$ 를 식 (10)과 같이 고쳐서 표현된 압력 $p_v(t) + p_b$ 이다. 밸브는 운동하지 않는다고 하였으므로, 구멍 (orifice)과 같으며 R_v 와 X_v 는 상수이다. 식 (12)와 (13)을 이용하면

$$X_v \frac{du(t)}{dt} + R_v u(t) + \frac{c_0^2}{V(t)} \int u(t) dt = -P_v(t) \tag{14}$$

를 얻을 수 있다. 여기에 식 (4)를 대입해서

$$X_v \frac{d^2 q(t)}{dt^2} + R_v \frac{dq(t)}{dt} + \frac{c^2}{V(t)} q(t) = P_v(t) \tag{15}$$

를 얻을 수 있다.

2.1.2. 음원을 제외한 흡/배기계

음향 부하를 이루는 배기계 요소들은 선형 시불변 요소들로만 구성되어 있다고 하고, 종단은 자유 공간 (free space)에 열려 있다고 하면 그림 2의 음향 회로를 구성할 수 있다. 자유 공간의 압력에 대해서는 다음과 같은 고쳐

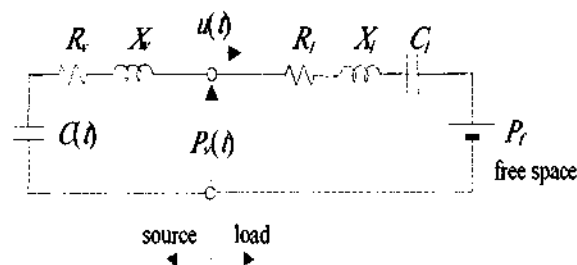


그림 2. 음원-부하 시스템의 등가 회로
Fig. 2. Equivalent circuit for the source-load system.

진 압력 P_f 를 이용한다.

$$P_f = P_v + P_b \tag{16}$$

여기서, p_b 는 정상 상태의 유체로 채워진 자유 공간의 압력이며 p_b 는 식 (9)에 정의된 값이다. 따라서 p_b 는 시간 t 에 대하여 불변인 값으로 dc (직류) 전압으로 표현할 수 있다. 종단부터 음원-부하 경계까지의 배기계는 그림 2와 같이 전달 선 (transmission line)을 저항 요소 R_v , 리액턴스 요소 X_v , 커패시턴스 (capacitance) 요소 C_v 로 표현한다. 이것은 음향 요소들의 감쇠, 공기 질량, 공동의 효과이며 미관 끝에서의 방사 임피던스를 포함하는 값이다. 또한 각 요소들이 가지는 메모리를 무시하였다. 식 (15)와 (16)을 이용하여

$$[X_v + X_v] \frac{d^2 q(t)}{dt^2} + [R_v + R_v] \frac{dq(t)}{dt} + \left[\frac{1}{C(t)} + \frac{1}{C_v} \right] q(t) = P_f \tag{17}$$

또는,

$$X_v \frac{d^2 q(t)}{dt^2} + R_v \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C(t)} q(t) = P_f \tag{18}$$

를 얻을 수 있다. 여기서 $C(t)$ 는 $V(t)/c^2$ 이다. 즉, 식 (18)은 상수 강제 (constant forcing) 항과 시변하는 계수를 가지는 2차 방정식이다. 또한 다음과 같이 다시 표현될 수 있다.

$$\frac{d^2 q(t)}{dt^2} + 2\zeta \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{X_v} [s_0 - s_1 g(t)] q(t) = \frac{1}{X_v} P_f \tag{19}$$

여기서, $2\zeta = R_v/X_v$ 이며 $1/C(t) = s_0 - s_1 g(t)$ 이다. 즉 s_0 와 s_1 은 각각 $1/C(t)$ 의 상수 항과 시변하는 크기를 나타내는 항으로 정의되었다. 한편 음원 특성을 측정하기 위한 직접법의 수행시에는 식 (18)에서 상수 강제 항 대신에 추가적 외부 음원의 주파수 성분에 해당하는 조화 강제 (sinusoidal forcing) 항을 넣어 생각할 수 있다.

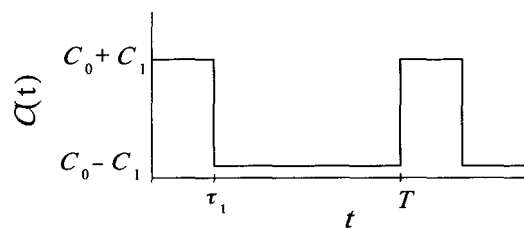


그림 3. 음향 커패시턴스의 시간에 따른 변화
Fig. 3. Time variation of the acoustic capacitance.

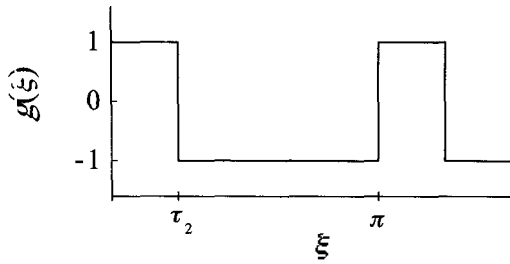


그림 4. 단위 사각 파형
Fig. 4. Unit rectangular waveform.

2.2. 해석 해

식 (19)의 해석적인 해를 얻기 위해서는 상태 변이 행렬 (state transition matrix)을 얻어야 한다. 그러나 물리계에서 흔한 Mathieu 식을 포함한 대부분의 주기적인 시스템에서는 상태 변이 행렬의 닫힌 형태 (closed form)를 구하기가 어렵다[15,17]. 반면 해석 해가 알려진 몇 가지 간단한 주기적 시스템이 있다. 대표적인 예가 Meissner 식이며 가장 먼저 시도될 수 있는 기본적인 형태의 식이다. 즉 비록 매우 근사화된 형태이지만 시변하는 계의 특성을 해석적으로 다루어 볼 수 있으므로 의미있다고 할 수 있다. 또한 내연기관 및 압축기 등에서 피스톤이 왕복하는 동안 밸브의 열리고 닫힘을 스텝 함수의 형태로 근사한다면 시스템의 거동은 Meissner 식의 형태로 표현할 수 있다. 이 경우 피스톤 왕복시에 밸브가 열리고 닫히는 과정을 실린더 축의 시변 체적이 불연속적으로 그림 3의 형태로 바뀌는 것으로 생각할 수 있다. 이때 식 (19)에서 s_0 와 s_1 은

$$s_1 = \frac{C_1}{(C_0 + C_1)(C_0 - C_1)}, \quad s_0 = \frac{C_0}{(C_0 + C_1)(C_0 - C_1)} + \frac{1}{C_1} \quad (20)$$

이때 $g(t)$ 는 그림 4와 같이 단위 사각 파형 (unit rectangular waveform)을 표현하는 함수가 된다. T 는 피스톤의 작동 주기이고, 따라서 작동 각주파수 ω_p 는 $2\pi/T$ 이다. 식 (19)에 대한 동차 방정식 (homogeneous equation)으로부터 $x(t) = \exp(\xi t) q(t)$ 로 변환하면 다음과 같은 형태가 된다.

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{1}{X_1} [s_0 - X_1 \xi^2 - s_1 g(t)] x = 0 \quad (21)$$

다시 $\omega_p t = 2\xi$ 로 치환하면

$$\frac{d^2 x}{d\xi^2} + \frac{4}{\omega_p^2 X_1} [s_0 - X_1 \xi^2 - s_1 g(\xi)] x = 0 \quad (22)$$

을 얻을 수 있다. $g(\xi)$ 는 ξ 에 대해 주기적이며, 그 주기는 π 이다. 식 (22)를 다시

$$x' + [\alpha - 2\beta g(\xi)] x = 0 \quad (23)$$

로 정리할 수 있다. 여기서,

$$\alpha = \frac{4}{\omega_p^2 X_1} (s_0 - X_1 \xi^2), \quad \beta = \frac{2}{\omega_p^2 X_1} s_1 \quad (24a,b)$$

이다. 식 (23)의 Wronskian 행렬과 그 역행렬은

$$W(\xi) = \begin{bmatrix} \cos \sigma \xi & \frac{1}{\sigma} \sin \sigma \xi \\ -\sigma \sin \sigma \xi & \cos \sigma \xi \end{bmatrix}$$

$$W^{-1}(\xi) = \begin{bmatrix} \cos \sigma \xi & -\frac{1}{\sigma} \sin \sigma \xi \\ \sigma \sin \sigma \xi & \cos \sigma \xi \end{bmatrix} \quad (25a,b)$$

이다[15,17]. 여기서,

$$\sigma = \begin{cases} \sqrt{\alpha - 2\beta} & \text{for } 0 \leq \xi < \tau_2 \\ \sqrt{\alpha + 2\beta} & \text{for } \tau_2 \leq \xi < \pi \end{cases} \quad (26)$$

이고 $\tau_2 = \omega_p \tau_1 / 2$ 이다. 따라서 이산 변이 행렬 (discrete transition matrix) $\tilde{G}(\pi, 0)$ 는

$$\tilde{G}(\pi, 0) = \begin{bmatrix} \cos \sigma_2 (\pi - \tau_2) & \frac{1}{\sigma_2} \sin \sigma_2 (\pi - \tau_2) \\ -\sigma_2 \sin \sigma_2 (\pi - \tau_2) & \cos \sigma_2 (\pi - \tau_2) \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} \cos \sigma_1 \tau_2 & \frac{1}{\sigma_1} \sin \sigma_1 \tau_2 \\ -\sigma_1 \sin \sigma_1 \tau_2 & \cos \sigma_1 \tau_2 \end{bmatrix} \quad (27)$$

이다. 여기서 $\sigma_1 = \sqrt{\alpha - 2\beta}$, $\sigma_2 = \sqrt{\alpha + 2\beta}$ 이다. 식 (27)로부터 고유 응답이 안정한 조건 (stable condition)은 감쇠 (또는 저항)가 없는 계인 경우 ($\zeta = 0$)에

$$|\text{trace} \tilde{G}(\pi, 0)| < 2 \quad (28)$$

또는,

$$\left| \cos \sigma_2 (\pi - \tau_2) \cos \sigma_1 \tau_2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) \sin \sigma_2 (\pi - \tau_2) \sin \sigma_1 \tau_2 \right| < 1 \quad (29)$$

이다. $\tau_2 = \pi/2$ 일 때 식 (29)의 조건을 그려보면 그림 5와 같다. 특히 특성 승수 (characteristic multiplier)의 범위에 따라서 해의 모드 (mode)를 구분할 수 있다[17]. 특성 승수가 복소수인 경우 C-type, 양의 실수인 경우 P-type, 음의 실수인 경우 N-type이 된다.

C-type 해는 인자들이 식 (29)의 조건을 만족할 경우와 같아서 안정적이고, 감쇠가 없는 계인 경우 그림 6(a)와

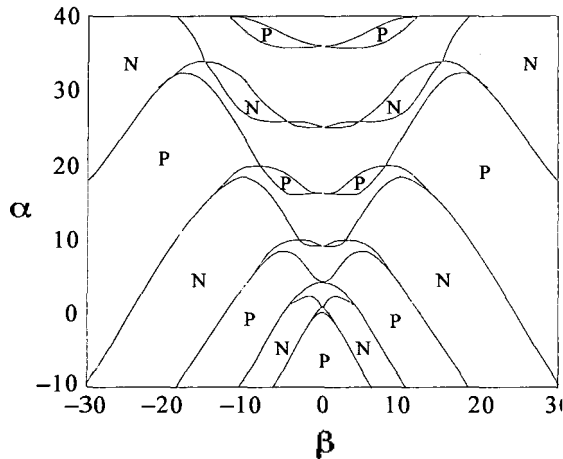


그림 5. 저항이 없을 때 계의 안정성 도표 ($\tau_2 = \pi/2$). 표시 없는 부분, 안정 (C-type 해); 'P'로 표시된 부분, 불안정 (P-type 해); 'N'으로 표시된 부분, 불안정 (N-type 해)
 Fig. 5. Stability diagram of the system without resistances ($\tau_2 = \pi/2$). Unmarked region, stable (C-type solution); Region marked with 'P', unstable (P-type solution); Region marked with 'N', unstable (N-type solution).

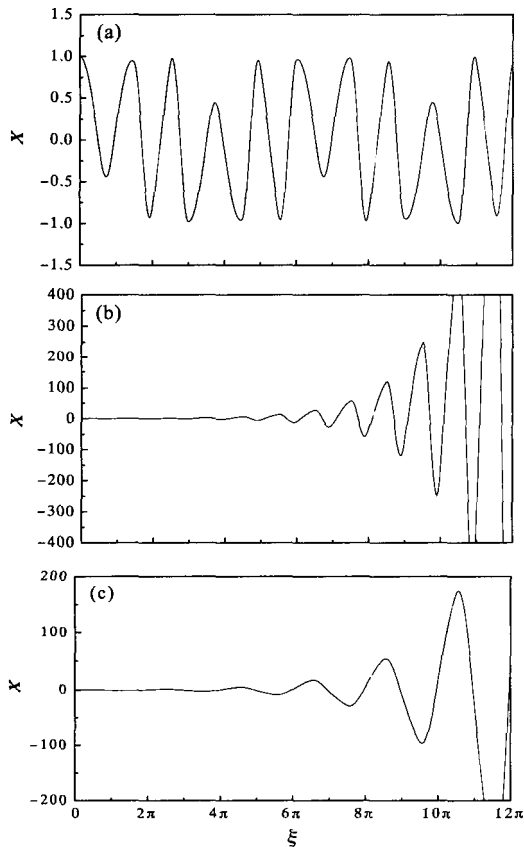


그림 6. 저항이 없는 경우에 대한 계의 비강제 응답 ($\tau_2 = \pi/2$). (a) C-type (α, β)=(3,1), (b) P-type (α, β)=(4,1.5), (c) N-type (α, β)=(1,0.3)
 Fig. 6. Unforced responses for the system without resistances ($\tau_2 = \pi/2$). (a) C-type (α, β)=(3,1), (b) P-type (α, β)=(4,1.5), (c) N-type (α, β)=(1,0.3).

같이 진폭과 위상이 모두 변조(modulation)된 특성을 나타낸다. 이때 일반적으로는 주기적이지 않다. P-type과 N-type 해는 불안정하며 지수적으로 변조, 변동하는(exponentially modulated, oscillatory) 특성을 가지고 증폭된다. 전자의 주기(pseudo-period)는 피스톤 작동 주기와 같고 후자의 주기는 피스톤 작동 주기의 1/2(subharmonic)이다(그림 6(b), (c) 참조). 한편 $\tau_2 \neq \pi/2$ 인 경우 $g(\xi)$ 가 대칭적이지 않으므로 그 안정성 도표(stability diagram) 또한 대칭적이지 않게 된다. $\zeta \neq 0$ 인 감쇠가 있는 계인 경우, $x(t) = \exp(\zeta t)q(t)$ 와 같은 변환에 의해서 해가 얻어지므로 식(28)에 의해서 주어지는 특성 먹지수(characteristic exponent) μ 가 다음과 같은 조건을 만족할 때 안정적이게 된다.

$$\text{Re}(\mu) < \zeta \tag{30}$$

$\tau_2 = \pi/4, \zeta = 0.2$ 일 때, 식(30)에 의해 주어지는 안정성 도표는 그림 7과 같다.

한편, 변환되기 전 식(21)의 상태 변이 행렬은 식(27)을 이용하여

$$G(t,0) = \exp(-\zeta t) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\zeta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega_p/2 \end{bmatrix} \tilde{G}(\zeta,0) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2/\omega_p \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \zeta & 1 \end{bmatrix} \tag{31}$$

로 얻을 수 있다. 결국 식(19)의 정상 상태 해는

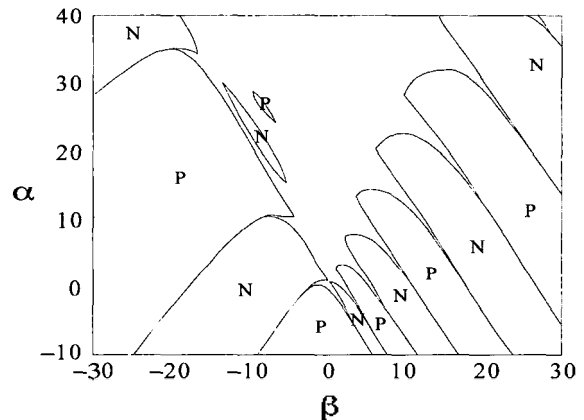


그림 7. 저항이 있을 때 계의 안정성 도표 ($\tau_2 = \pi/4, \zeta = 0.2$). 표시 없는 부분, 안정 (C-type 해); 'P'로 표시된 부분, 불안정 (P-type 해); 'N'으로 표시된 부분, 불안정 (N-type 해)
 Fig. 7. Stability diagram of the system with resistances ($\tau_2 = \pi/4, \zeta = 0.2$). Unmarked region, stable (C-type solution); Region marked with 'P', unstable (P-type solution); Region marked with 'N', unstable (N-type solution).

$$q_{z,i}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \exp(jn\omega_p t) \quad (32)$$

이다. 여기서

$$q_{z,i}(t) = \begin{Bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{Bmatrix}_{z,i} \quad (33)$$

$$Q_n = \sum_{i=1}^2 \left[\frac{\Phi_{n-1} \Psi_1 \bar{\Phi}_2 \hat{i} + \Phi_{n-2} \Psi_2 \bar{\Phi}_1 \hat{i}}{-\mu_1 + jn\omega_p} + \frac{\Phi_{n-1} \Psi_2 \bar{\Phi}_1 \hat{i} + \Phi_{n-2} \Psi_1 \bar{\Phi}_2 \hat{i}}{-\mu_2 + jn\omega_p} \right] \quad (34)$$

$$\hat{i} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P_r / X_i \end{Bmatrix} \quad (35)$$

이며, μ_1 과 μ_2 는 특성 역지수이다. 또한 $\Phi_n, \bar{\Phi}_n, \Psi_1, \Psi_2$ 는 $G(T, 0) = \exp(\Gamma T)$ 일 때 각각 다음과 같이 정의되는 값이다[15, 17, 18].

$$\Phi_n(t) = G(t, 0) \exp(-\Gamma t) \quad (36)$$

$$\Phi_n(t) = \sum_{i=1}^2 \Phi_n \exp(jn\omega_p t) \quad (37)$$

$$\Phi_n^{-1}(t) = \sum_{i=1}^2 \bar{\Phi}_n \exp(jk\omega_p t) \quad (38)$$

$$\Psi_i = \frac{\prod_{j=1}^i (\mu_j - \Gamma)}{\prod_{j=1}^i (\mu_j - \mu_i)} \quad (39)$$

식 (19)에서 강제 항이 대기압 값으로서, 가진 주파수 0에 해당하는 상수이므로 식 (32)의 정상 상태 해는 피스톤 작동 주파수를 기본 주파수로 하여 주기적이게 된다. 만일 조화적으로 변동하는 강제항일 경우에 강제항의 주파수와 피스톤 작동 주파수 이외에도 다른 주파수 성분들이 방사된다.

2.3. 방출되는 음향 파워의 최대 조건

흡/배기계 소음 설계자의 주관심이 되는 것은 주어진 소음원에 대하여 방출되는 음향 파워가 크지 않고 작게 되는 흡/배기계가 어떤 것인가이다. 선형 음향 이론에 의하면 음원으로부터 방출되는 음향 파워 P_n 는

$$W = \frac{1}{\rho_0} \langle (P_r(t) - P_r) u(t) \rangle = \frac{1}{\rho_0} \langle P_r(t) u(t) \rangle = \frac{|P_r(t)|^2}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{Z_i(t)} \right) \quad (40)$$

이다. 여기서, $\langle \rangle$ 는 시간에 대한 평균을 의미하며, $P_r(t)$ 는 $P_r(t)$ 의 푸리에 변환이고 부하 임피던스 $Z_i(t)$ 는

$$Z_i(t) = \frac{P_r(t)}{u(t)} = R_r + j \left[2\pi f X_r - \frac{1}{2\pi f C_r} \right] \quad (41)$$

로 정의된 값이다.

시변 성분을 무시하고 선형 시불변 음원 모델을 이용하는 경우에 음원 임피던스 $Z_r(f)$ 는

$$Z_r(f) = R_r + j \left[2\pi f X_r - \frac{1}{2\pi f C_r} \right] \quad (42)$$

이다. 이것은 식 (14)와 (15)에서 그림 3의 시변 성분 C_r 을 0으로 하였을 때 얻어진다. 음향 파워의 방사가 최대가 되는 음향 부하는 식 (40)으로부터 $dW=0, d^2W < 0$ 을 조사하여

$$Z_i(t) = Z_r^*(f) \quad (43)$$

인 조건이며, 부분 최소의 경우는 발생하지 않는다 [8, 19]. 여기서, (*)는 켈레복소수 (complex conjugate)를 의미한다. 식 (43)은 선형회로 이론에서 잘 알려진 바와 같이 임피던스 매칭 조건을 이용하여도 얻어질 수 있다. 식 (43)의 조건은 식 (41)과 (42)로부터

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{C_r + C_i}{C_r C_i (X_r + X_i)}} = f_{res} \quad (44)$$

와 동일하다. 여기서, f_{res} 은 정적 (static) 음원-부하 계의 공명 주파수이다. 소음기 설계자는 배압 (back pressure)의 허용 조건 하에서 방사 음향 파워가 최소가 되도록 하는 것이 목적이 될 것이지만, 그러한 음향 파워의 부분최소값은 존재하지 않는다. 대신에 엔진의 운전 속도 구간 내의 작동 주파수들에 대하여 식 (43)의 조건에 의하여 주어지는 음향 파워의 최대 방사를 피하도록 설계할 수 있다. 즉, 흡/배기계 임피던스가 음원 임피던스의 켈레복소수와 다른 값을 가져야 한다.

시변하는 음원으로부터 음향 파워가 크게 방사되는 조건은 2.3절의 해석 결과로부터 얻어질 수 있다. 그림 5와 7에 보인 바와 같은 안정성 도표에서 P와 N-type 해가 되는 불안정한 영역에서는 매우 큰 속도 또는 음압이 나오게 된다. 실제에서 큰 크기의 음압이 나오는 때에는 본 해석에서 고려되지 않은 비선형 효과 등에 의하여 해석에서와 같이 무한 값으로 되지는 않게 된다. 만일 시변하는 크기가 비교적 작고 저항요소가 작은 경우에는 불안정한 조건은 그림 5에서

$$\frac{4}{\omega_p^2 X_i} s_0 = \mu^2 \quad (45)$$

또는,

$$f_p = \frac{2 f_m}{n} \quad (46)$$

이다. 여기서, n 은 정수이고 f_p 는 피스톤 작동 주파수 $\omega_p/2\pi$ 이다. 식 (46)의 조건이 식 (44)의 경우를 포함하고 있음이 주목된다. 피스톤의 작동 주파수가 음원-부하 전체 계의 정적 고유 진동수의 두 배, 또는 그 정수로 나눈 값인 경우에 큰 음향 방사가 발생하게 된다. 즉, 소음 설계 시 설계 방침은 피스톤 작동 속도 구간 내에서 식 (46)의 조건을 피하도록 하는 것이다. 결국, 시변 음원 모델이 시불변 모델보다 흡/배기계의 소음 설계에 더 실제적이면서 많은 정보를 제공한다고 할 수 있다.

III. 음원 특성 측정 모사

유체기계 흡/배기계 소음 설계에는 선형 시불변 가정을 이용하여 측정된 음원 강도 및 임피던스 인자들이 흔히 사용되어지고 있다. 이 때 왕복동 엔진 음원들에서는 간접 측정법 적용시 물리적으로 타당해 보이지 않는 부의 음원 저항 값이 나타나고 있으며 이 원인들을 밝히는 연구가 수행되어져 왔다[10-12]. 따라서 엔진 음원 내에서 일어나는 복잡한 현상들 중에 시변하는 특성만을 다룬 본 연구의 간단한 모델을 적용하고 음원 인자들을 측정 모사하는 것이 의미있을 수 있다. 본 절에서는 II절의 시변하는 피스톤 모델 및 해석 결과를 이용하여 음원 특성의 간접 측정법을 모사한다.

식 (4)와 (32), 그리고 음원-부하 관계식을 이용하면 m 차 (ω_p 의 m 배 주파수)의 음원 강도 $P_{s,m}$ 및 음원 임피던스 $Z_{s,m}$ 은

$$V_m = -Q_{m,2} / \rho_0 = P_{s,m} / (Z_{l,m} + Z_{s,m}) \quad (47)$$

로부터 얻을 수 있다. 여기서, V_m 은 m 차의 체적속도, $Q_{m,2}$ 는 Q_m 의 2번째 요소, $Z_{l,m}$ 은 m 차의 부하 임피던스이다. $P_{s,m}$ 과 $Z_{s,m}$ 은 부하의 변화에 무관한 값으로 가정되고 두 개 이상의 부하에 대한 응답으로 연립 방정식을 만들어 얻어진다. 부하의 응답은 실제 측정에서는 음압을 마이크로폰으로 측정하게 되는데, 본 모사에서는 식 (32)의 해석 해로서 얻어진 값을 입력한다. 그림 8은 이상과 같이 계산한 음원 임피던스를 보이고 있다. 여기서, 피스톤 음원에 관계된 인자는 $R_v = 1$, $X_v = 10$, $1/C(t) = c^2/1.5 \times [1 - g(t)/3]$, $c = 340$, $\tau_2 = \pi/4$, $P_f = 10^5$ 이고, 하나의 부하는 $R_l + R_r = 4$, $X_l + X_r = 2$, $1/C_l = 10^5$ 이며

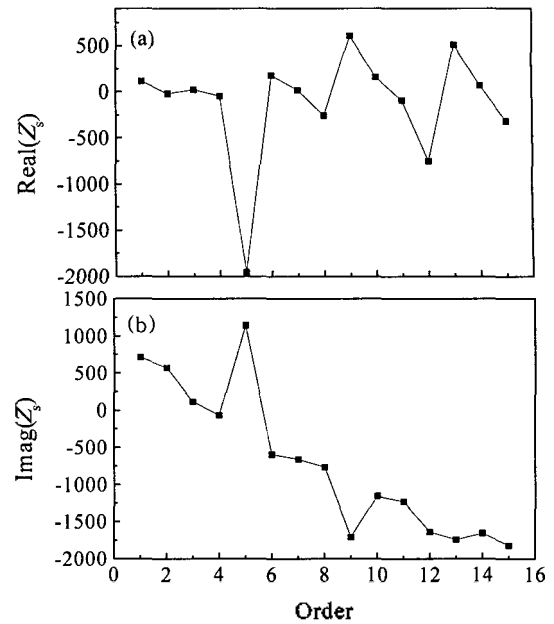


그림 8. 시변 피스톤 음원에 2부하법을 이용하여 계산된 음원 임피던스. (a) 음원 저항, (b) 음원 리액턴스
Fig. 8. Calculated source impedance by the two-load method for the time-varying piston source. (a) Source resistance, (b) source reactance.

다른 부하는 $R_l + R_r = 10$, $X_l + X_r = 3$, $1/C_l = 500$ 이다. 이 값들은 해가 안정한 영역에 들도록 하면서 일반적인 인덕트 계에서 기대되는 값들이다. 그림 8에서 음원 저항이 많은 차수들에서 부의 값을 보이고 있음이 관찰된다. 따라서 기존의 왕복동 엔진 음원들의 측정치에서 보여지는 부의 음원 저항 값이 실제 음원의 시변성에 기인한다고 할 수 있다. 그러나 본 연구에서 다루지 않은 실제 음원의 비선형성 및 측정 오차 등에 의한 효과들도 그러한 원인이 될 수 있으며[10-12] 이에 대한 연구가 더 요구된다.

IV. 결론

시변하는 유체기계로서 주기적으로 왕복 운동하는 피스톤 음원에 대하여 선형 시변 계수를 가지는 시스템으로 모델링하고 해를 구하여 정성적인 해석을 수행하였다. 일반적인 작동 및 간접측정법 상황에서 피스톤의 작동 주파수를 기본 주파수로 하는 주기적인 정상 상태 해를 얻었다. 이러한 해가 불안정한 영역을 살핀 결과, 피스톤의 작동 주파수가 음원-부하 전체 계의 정적 고유 진동수의 2배, 또는 그 정수로 나눈 값일 때에 매우 큰 음향 방사가 발생한다. 반면에 선형 시불변 가정에서는 부하 임피던스가 음원 임피던스의 켈레복소수일 때 최대 음향 파워

가 방사되며, 이것은 음원의 주파수가 음원-부하 전체 계의 고유 진동수와 같은 조건이다.

한편, 선형 시불변 가정과 간접측정법을 왕복동 엔진에 적용하였을 때 측정되어지는 부의 음원 저항에 대하여 그 원인을 살펴보고자 측정 상황에 대한 수치적인 모사를 수행하였다. 입력 값으로서 엔진 음원 내에서 일어나는 복잡한 현상들 중에 시변하는 특성만을 다룬 본 논문의 해석 결과를 이용하였다. 결과적으로 유체기계 음원의 시변성이 부의 음원 저항을 내는데 중요하다. 그러나 실제 유체기계의 비선형 효과 및 측정 오차 등도 원인이 될 수 있으며, 이에 대한 연구가 더욱 필요하다.

참고 문헌

1. M. L. Munjal, *Acoustics of Ducts and Mufflers*, Wiley-Interscience, New York, 1987.
2. A. D. Jones, "Modeling the exhaust noise radiated from reciprocating internal combustion engines - A literature review," *Noise Control Eng. J.*, 23, 12-31, 1984.
3. H. Levine and J. Schwinger, "On the radiation of sound from an unflanged circular pipe," *Phy. Rev.*, 73, 383-406, 1948.
4. D. F. Ross and M. J. Crocker, "Measurement of the acoustical internal impedance of an internal combustion engine," *J. Acoust. Soc. Am.*, 74, 18-27, 1983.
5. M. G. Prasad and M. J. Crocker, "Acoustical source characterization studies on a multi-cylinder engine exhaust system," *J. Sound Vib.*, 90, 479-490, 1983.
6. M. L. Kalthuriya and M. L. Munjal, "Experimental evaluation of the aeroacoustic characteristics of a source of pulsating gas flow," *J. Acoust. Soc. Am.*, 65, 240-248, 1979.
7. H. Boden, "On multi-load methods for determination of the source data of acoustic one-port sources," *J. Sound Vib.*, 180, 725-743, 1995.
8. S.-H. Jang and J.-G. Ih, "Refined multi-load method for measuring acoustical source characteristics of an intake or exhaust system," *J. Acoust. Soc. Am.*, 107, 3217-3225, 2000.
9. M. L. Munjal and A. G. Doige, "On uniqueness, transfer and combination of acoustic sources in one-dimensional systems," *J. Sound Vib.*, 121, 25-35, 1988.
10. F. Albertson, "Negative resistances in nonlinear lumped acoustic systems and IC-engine source data," *J. Acoust. Soc. Am.*, 105, 1143, 1999.
11. J.-G. Ih and K. S. Peat, "On the causes of negative impedance in the measurement of intake and exhaust noise sources," *Appl. Acoust.*, 63, 153-171, 2001.
12. K. S. Peat and J.-G. Ih, "An analytical investigation of the indirect measurement method of estimating the acoustic impedance of a time-varying source," *J. Sound Vib.*, 244, 821-835, 2001.
13. W. M. Wang, "Matrix formulation in acoustical analysis of mechanically driven fluid systems," *J. Acoust. Soc. Am.*, 41, 1418-1423, 1967.
14. H. Bodén, "The multiple load method for measuring the source characteristics of time variant sources," Report TRITA-TAK-8802, Department of Technical Acoustics, Royal Institute of Technology, Stockholm, 1986.
15. A. H. Nayfeh and D. T. Mook, *Nonlinear Oscillations*, John Wiley, New York, 1979.
16. W. E. Zorumski and T. L. Parrott, *Nonlinear Acoustic Theory for Rigid Porous Materials*, NASA TN D-6196, 1971.
17. J. A. Richards, *Analysis of Periodically Time-varying Systems*, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
18. G. A. Korn and T. M. Korn, *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers*, McGraw-Hill, New York, 1968.
19. H. Boden and M. Abom, "Maximum sound power from in-duct sources with applications to fans," *J. Sound Vib.*, 187, 543-550, 1995.

저자 약력

● 장 승 호 (Seung-Ho Jang)



1995년 2월: KAIST 기계공학과 (공학사)
 1997년 2월: KAIST 기계공학과 (공학석사)
 2002년 2월: KAIST 기계공학과 (공학박사)
 2002년 2월~현재: 한전 전력연구원 근무

● 이 준 신 (Jun-Shin Lee)



1985년 2월: 서울대학교 농업기계과 (농학사)
 1988년 2월: KAIST 기계공학과 (공학석사)
 1995년 2월: KAIST 기계공학과 (공학박사)
 1996년 10월~현재: 한전 전력연구원 근무

● 이 정 권 (Jeong-Guon Ih)



1979년 2월: 서울대학교 기계공학과 (공학사)
 1981년 2월: KAIST 기계공학과 (공학석사)
 1985년 2월: KAIST 기계공학과 (공학박사)
 1979년 7월~1990년 7월: 대우자동차 근무
 1990년 8월~현재: KAIST 교수