

---

# 절단된 계수 벡터를 사용한 웨이브렛의 힐버트 변환쌍에 관한 연구

배 상 범\*, 김 남 호\*

## A Study on Hilbert Transform Pair of Wavelet using Truncated Coefficient Vector

Sang-Bum Bae\*, Nam-Ho Kim\*

### 요 약

두 개의 웨이브렛이 근사 힐버트 변환 쌍을 형성하도록 설계될 때, 동시에 사용된 웨이브렛 변환 쌍은 펄스와 같은 광대역 신호의 검출과 동일한 대역폭에서 비트 전송율을 증가시키는 분야 등에서 기존의 DWT(discrete wavelet transform)에 비해 우수한 성능을 나타낸다. 따라서, 본 논문에서는 이러한 근사 힐버트 변환 쌍을 형성하는 두 개의 dyadic 웨이브렛 기저를 설계하였으며, 설계과정에서 두 개의 필터가 힐버트 변환 관계를 형성하도록 절단된 계수 벡터를 갖는 플래트 딜레이 필터를 사용하였다.

### ABSTRACT

The wavelet transform pair used simultaneously when two wavelets are designed to form an approximate Hilbert transform pair provide excellent property than present DWT(discrete wavelet transform), especially in field that detect wide-band signals like pulse and increase the bit rate at the same bandwidth. In this paper, the two dyadic wavelet bases which form an approximate Hilbert transform pair were designed, and flat delay filter which has the truncated coefficient vector is used in order that the two filters can form Hilbert transform relation in the process of design.

### 키워드

Hilbert transform, flat delay filter, truncated coefficient vector

### 1. 서 론

신호처리 분야의 새로운 기법으로 제시된 웨이브렛 변환은 시간 및 주파수 국부성을 가지므로, 통계적 특성을 모르거나 시간적으로 예측하기 힘든 신호를 해석하는데 용이할 뿐만 아니라 다중 해상도 해석이 가능하므로 최근 여러 분야에 응용되고 있다.

그리고, 두 개의 웨이브렛 기저가 근사 힐버트

변환쌍을 형성하도록 설계될 때, 이러한 웨이브렛 변환쌍은 펄스 형태의 데이터 검출과 동일한 대역폭에서 비트 전송율을 증가시키는 분야 등에서 기존의 DWT(discrete wavelet transform)에 비해 우수한 성능을 나타낸다.

따라서, 본 논문에서는 orthogonal 접근법을 사용하여 근사 힐버트 변환쌍을 형성하는 웨이브렛 기저를 설계하였다. 설계과정에서 두 개의 필터가 힐버트 변환 관계를 형성하도록 절단된 계수 벡터

---

\* 부경대학교 공과대학 제어계측공학과  
접수일자 : 2003. 3. 8.

를 갖는 플랫 딜레이 필터를 사용하였으며, 파라미터를 가변함에 따라 half-sample 지연 특성파 필터의 유연성을 가변 할 수 있도록 하였다.

## II. 웨이브렛의 힐버트 변환쌍

본 논문에서는 QMF(quadrature mirror filter) 보다 우수한 필터 특성을 나타내고, 완전히 복원 할 수 있는 CQF(conjugate quadrature filter)를 사용하며,  $h_0(n)$ 과  $h_1(n)$ 이 CQF 쌍이 되도록 다음의 식 (1), 식 (2)와 같이 정의한다[1].

$$\sum_n h_0(n)h_0(n+2k) = \delta(k) = \begin{cases} 1, & k=0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$h_1(n) = (-1)^n h_0(L-n) \quad (2)$$

여기서,  $L$ 은 홀수의 정수를 나타내며, 자기 상관함수의 형태는 식 (3)과 같다. 그리고, 필터  $g_0(n)$ 과  $g_1(n)$ 은 동일한 방법에 의한 또 다른 CQF 쌍을 나타내며, 식 (4)를 만족할 경우 CQF 조건이 만족된다.

$$p_h(n) = \sum_k h_0(k)h_0(k-n) \quad (3)$$

$$p_h(2n) = p_g(2n) = \delta(n) \quad (4)$$

그리고, dilation과 웨이브렛 방정식은 다음의 식 (5), 식 (6)과 같으며,  $\phi_h$ 와  $\phi_g$ 는 동일한 방법으로 나타낸다.

$$\phi_h(t) = \sqrt{2} \sum_n h_0(n) \phi_h(2t-n) \quad (5)$$

$$\phi_h(t) = \sqrt{2} \sum_n h_1(n) \phi_h(2t-n) \quad (6)$$

이때, 설계되어진  $\phi_h$ 와  $\phi_g$ 가 식 (7)을 만족할

경우, 두 웨이브렛 기저는 힐버트 변환 관계에 있으며, 이러한 관계를 유도하기 위해 다음의 식 (8)을 가정한다. 여기서,  $\Psi(\omega)$ 는  $\phi(t)$ 의 푸리에 변환을 의미한다.

$$\Psi_g(\omega) = \begin{cases} -j\Psi_h(\omega), & \omega > 0 \\ j\Psi_h(\omega), & \omega < 0 \end{cases} \quad (7)$$

$$G_0(\omega) = H_0(\omega)e^{-j\theta(\omega)} \quad (8)$$

CQF 조건을 만족하는 각각의 필터와 스케일링, 그리고 웨이브렛 함수로부터 다음의 식 (9)를 얻을 수 있으며, 식 (7)과 식 (9)로부터 식 (10)의 조건을 정의할 수 있다.

$$\Psi_g(\omega) = \Psi_h(\omega)e^{j[\theta(\omega/2 - \pi) - \sum_{k=2}^{\infty} \theta(\omega/2^k)]} \quad (9)$$

$$\theta(\omega/2 - \pi) - \sum_{k=2}^{\infty} \theta(\omega/2^k) = \begin{cases} -\pi/2, & \omega > 0 \\ \pi/2, & \omega < 0 \end{cases} \quad (10)$$

식 (10)의 조건은  $\theta(\omega) = \omega/2$ 을 선택하는 것에 의해 만족된다. 따라서,  $H_0(\omega)$ 와  $G_0(\omega)$ 가 식 (11)를 만족하는 저역통과 CQF 필터라면, 상응하는 웨이브렛은 식 (12)와 같이 힐버트 변환쌍을 형성한다.

$$G_0(\omega) = H_0(\omega)e^{-j\frac{\omega}{2}} \quad \text{for } |\omega| < \pi \quad (11)$$

$$\phi_g(t) = H\{\phi_h(t)\} \quad (12)$$

그리고, 동가적으로 디지털 필터  $g_0(n)$ 은  $h_0(n)$ 이 half-sample 지연된 것이다.

$$g_0(n) = h_0(n-1/2) \quad (13)$$

본 논문의 접근법은 힐버트 변환 관계를 형성

하기 위해 올패스 필터의 설계 과정을 포함하며, 다음의 식 (14)는  $\tau$ -sample의 지연을 갖는 올패스 필터를 나타낸다[2].

$$A(z) = \frac{z^{-N}D(1/z)}{D(z)} \quad (14)$$

여기서,  $N$ 은 올패스 필터의 차수를 나타내며, 분자와 분모의 계수는 반전된 형태를 갖는다.

$$D(z) = 1 + \sum_{n=1}^N d(n)z^{-n} \quad (15)$$

식 (15)의 계수 벡터  $d(n)$ 은 다음의 식 (16)과 같으며,  $(x)_n$ 은 rising factorial을 나타낸다.

$$d(n) = (-1)^n \binom{N}{n} \frac{(\tau-N)_n}{(\tau+1)_n} \quad (16)$$

그러나, 일반적으로 올패스 필터의 계수값은 index  $n$ 과 함께 급속히 감소하며, zero에 근접한 계수값은 필터의 특성에 큰 영향을 미치지 않으므로, 식 (16)은 다음의 식 (17)로 나타낼 수 있다. 여기서,  $n = 1, 2, \dots, N$ 이며,  $M \geq N$ 인 차수  $M$ 을 선택하여 필터의 특성을 가변할 수 있다.

$$d(n) = (-1)^n \binom{M}{n} \frac{(\tau-N)_n}{(\tau+1)_n} \quad (17)$$

### III. 웨이브렛 기저

본 논문에서는 힐버트 변환쌍을 형성하는 두 개의 웨이브렛 기저를 생성하기 위해 orthogonal 접근법을 사용하였으며, 두 개의 저역통과 스케일링 필터가 전달함수의 형태에서 다음의 식 (18)과 같이  $\tau$ -sample의 지연을 갖는 올패스 필터를 포함하도록 설계한다.

$$G_0(z) = H_0(z) \frac{z^{-N}D(1/z)}{D(z)} \quad (18)$$

식 (18)로부터  $G_0(z)$ 는  $H_0(z)$ 와 올패스 필터로 구성되어 있음을 확인 할 수 있다. 따라서, 다음의 조건들은 만족된다.

$$|G_0(\omega)| = |H_0(\omega)| \quad \text{and} \quad |G_1(\omega)| = |H_1(\omega)|$$

그리고, 식 (18)을 얻기 위해 전달함수를 다음의 두 식과 같이 둘 수 있다.

$$H_0(z) = F(z)D(z) \quad (19)$$

$$G_0(z) = F(z)z^{-N}D(1/z) \quad (20)$$

따라서, 저역통과 스케일링 필터가 다음의 식 (21), 식 (22)와 같은 orthonormal 웨이브렛 쌍을 구하며, 여기서  $d(n)$ 은 half-sample 지연을 갖도록 선택된다.

$$h_0(n) = f(n) * d(n) \quad (21)$$

$$g_0(n) = f(n) * d(N-n) \quad (22)$$

만약, 올패스 시스템  $A(z)$ 가 식 (23)과 같은 근사 half-sample 지연이라면, 그때 식 (11)는 식 (24)로 된다.

$$A(\omega) \approx e^{-j\frac{\omega}{2}} \quad \text{around } \omega = 0 \quad (23)$$

$$G_0(\omega) \approx H_0(\omega)e^{-j\frac{\omega}{2}} \quad \text{around } \omega = 0 \quad (24)$$

이것은 식 (17)에서  $\tau = 1/2$ 을 대입한 올패스 필터를 선택하여 구한다.

그리고, 식 (19)와 식 (20)은 파라미터  $K$ 를 포함하도록 다음의 식들과 같이 나타낼 수 있다.

$$F(z) = Q(z)(1 + z^{-1})^K \quad (25)$$

$$H_0(z) = Q(z)(1 + z^{-1})^K D(z) \quad (26)$$

$$G_0(z) = Q(z)(1 + z^{-1})^K z^{-N} D(1/z) \quad (27)$$

식 (3)의 전달함수 형태는 다음의 식 (28)과 같으며,  $P_g(z)$ 는 동일한 방법에 의해 나타낼 수 있다. 따라서,  $P_h(z)$  또는  $P_g(z)$ 로부터 동일하게 식 (29)를 유도할 수 있다.

$$P_h(z) = H_0(z)H_0(1/z) \quad (28)$$

$$P(z) = Q(z)Q(1/z) \cdot (z + 2 + z^{-1})^K D(z)D(1/z) \quad (29)$$

위의 식 (29)에서  $P(z) = P_h(z) = P_g(z)$ 이며,  $(z + 2 + z^{-1})^K D(z)D(1/z)$ 은 앞의 과정들로부터 파라미터  $K, M, N$ 을 사용하여 얻을 수 있다. 그리고,  $R(z)$ 를 식 (32)와 같이 두었을 때,  $r(n) = r(-n)$ 이고,  $P(z)$ 가 halfband의 조건을 만족하는 최소 길이의  $r(n)$ 을 구한 뒤,  $h_0(n)$ 과  $g_0(n)$ 이 CQF의 조건을 만족하도록 최소차수  $Q(z)$ 를 spectral factorization을 통해 구한다.

$$R(z) = Q(z)Q(1/z) \quad (30)$$

#### IV. 시뮬레이션 및 결과

본 논문에서는 orthogonal 웨이브렛 기저를 설계하였으며,  $M = N + 1$ 로 고정하여  $K$ 와  $N$ 값을 가변하며 시뮬레이션하고, 그 결과를 검토하였다. 그림 1은  $K = 2, N = 4$ 인 경우에 원형 계수 벡터에 의해 설계되어진 두 개의 웨이브렛 기저를 나타내고 있으며, 그림 2는 동일 경우에 대하여,

절단된 계수 벡터에 의해 설계되어진 두 개의 웨이브렛 기저를 나타내고 있다.

그리고, 그림 3은 각각의 방법에 의해 설계되어진 웨이브렛 기저의 힐버트 변환 특성을 확인하기 위한 것이며,  $|\Psi_h(\omega) + j\Psi_g(\omega)|$ 의 크기를 나타내고 있다. 그림으로부터 method 1은 원형 계수 벡터에 의한 힐버트 특성이며, method 2는 절단된 계수 벡터에 의한 힐버트 특성이다. 그림들로부터 그림 (a)는  $K = 2, N = 2$ 인 경우이며, 그림 (b)는  $K = 2, N = 3$ 인 경우이고, 그림 (c)는  $K = 2, N = 4$ 인 경우, 주파수 영역에서 웨이브렛의 크기를 나타내고 있다.

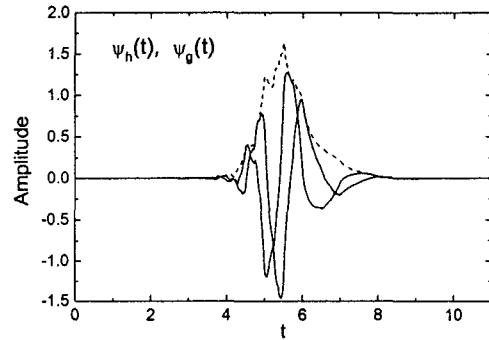


그림 4. 원형 계수 벡터에 의한 웨이브렛의 힐버트 변환쌍  
Fig. 1. Hilbert transform pair of wavelet by original coefficient vector.

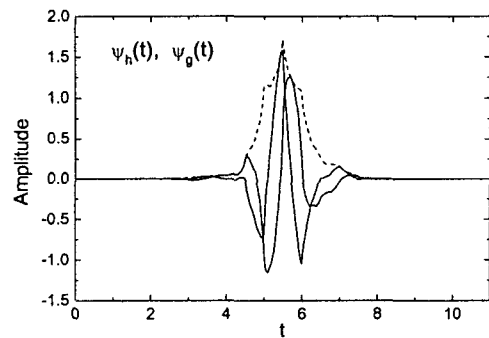


그림 2. 절단된 계수 벡터에 의한 웨이브렛의 힐버트 변환쌍  
Fig. 2. Hilbert transform pair of wavelet by truncated coefficient vector.

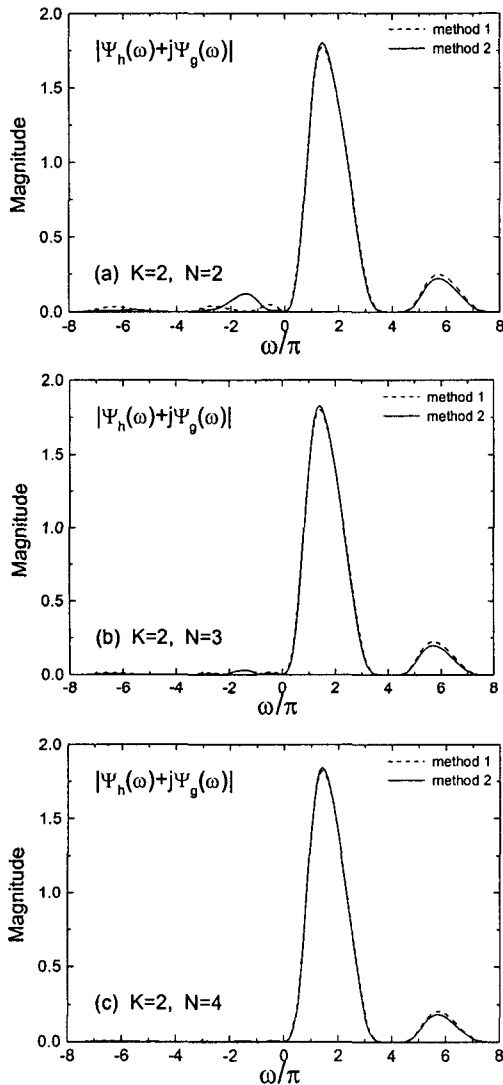


그림 3. 주파수 영역에서 웨이블릿의 크기  
Fig. 3. Magnitude of wavelet in frequency domain.

각 경우에 대하여 음의 주파수 영역의 크기는 원형 계수 벡터에 의한 방법보다 절단된 계수 벡터에 의한 방법이  $N$ 의 증가와 함께 더욱 급격히 감소하고 있음을 확인할 수 있으며,  $M = N + 1$ ,  $K=2$ 로 고정한 그림 3의 결과에서는  $N=3$  이상에서 절단된 계수 벡터에 의한 방법이 우수한 특성을 나타내고 있다.

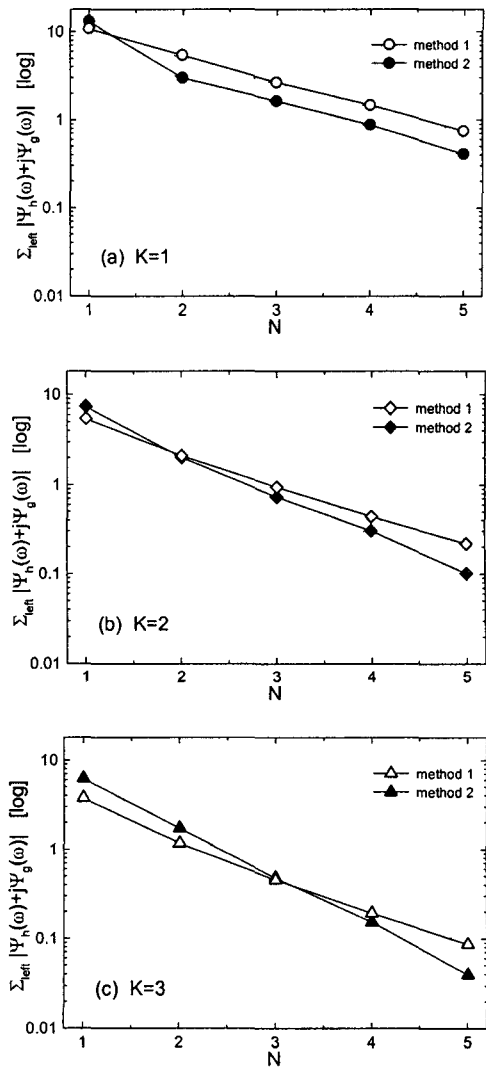


그림 4. 음의 주파수 영역의 합  
Fig. 4. Sum of negative frequency domain.

그림 4에서는 두 가지 설계 방법에 대해서,  $K$ 와  $N$ 의 변화에 따른 힐버트 변환 관계를 음의 주파수에서의 크기의 합으로 비교하였다. 그림으로부터 일정한  $K$ 에 대해서,  $N$ 의 차수가 적을 경우에는 원형 계수 벡터에 의한 방법이 더욱 힐버트 변환 관계에 가까우며,  $N$ 의 차수가 증가할수록 절단된 계수 벡터에 의한 방법이 우수한 특성을 나타내고 있다.

이러한 결과는 올패스 필터를 형성하는 전체 필터의 차수가 낮을 경우에, 계수의 절단은 큰 오차의 원인이 되므로, 필요에 따라 적절한 차수 이상의 경우에서 절단된 계수 벡터에 의한 방법을 사용하여야 함을 나타낸다. 그리고, 필터의 특성은  $K$ 와  $N$ ,  $M=N+x$ 을 선택함에 따라서 융통성 있게 조절할 수 있으며,  $M=N$ 인 경우에는 원형 계수벡터에 의한 방법과 같은 결과를 얻는다. 그러나, 일정한 길이의 차수에서 이러한 파라미터들 사이에는 trade-off가 필요하며, 전체적인 필터의 차수를 증가시킨다면, 보다 유연하고 우수한 half-sample 지연 특성을 갖는 웨이브렛 기저를 얻을 수 있다.

### V. 결론

본 논문에서는 orthogonal 접근법을 사용하여 근사 힐버트 변환쌍을 형성하는 웨이브렛 기저를 설계하였다. 그리고, 설계에서 두 개의 필터가 힐버트 변환 관계를 형성하도록 플랫폼 딜레이 응답 특성을 갖는 절단된 올패스 필터를 사용하였으며,  $K$ 와  $N$ ,  $M=N+x$ 와 같은 세 개의 파라미터를 가변함에 따라 새로운 웨이브렛 기저를 얻을 수 있다. 이러한 파라미터의 조합은 웨이브렛의 유연성과 half-sample 지연 특성을 결정한다.

본 논문에서 사용한 방법은 힐버트 변환 관계를 형성하기 위한 기존의 방법들에 비해 알고리즘이 간단하고 파라미터를 가변함에 따라 융통성 있는 특성을 얻을 수 있다. 따라서 펄스 형태의 데이터 검출과 waveform encoding 등과 같은 신호처리 분야에 유용할 것으로 사료된다.

### 참고 문헌

- [1] M. J. T. Smith and T. P. Barnwell, III, "Exact reconstruction for tree-structured subband coders", IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, vol. ASSP-34, pp. 431-441, June 1986.
- [2] J. P. Thiran, "Recursive digital filters with

maximally flat group delay", IEEE Trans. Circuit Theory, vol. CT-18, pp. 659-664, Nov. 1971.

- [3] C. Herley and M. Vetterli, "Wavelets and recursive filter banks", IEEE Trans. Signal Processing, vol. 41, pp. 2536-2556, Aug. 1993.
- [4] N. G. Kingsbury, "Complex wavelets for shift invariant analysis and filtering of signals", Appl. Comput. Harmon. Anal., vol. 10, no. 3, pp. 234-253, May. 2001.
- [5] D. Wei and A. C. Bovik, "Generalized Coiflets with nonzero-centered vanishing moments", IEEE Trans. Circuits Syst. II, vol. 45, pp. 988-1001, Aug. 1998.
- [6] P. Abry and P. Flandrin, "Multiresolution transient detection", Proc. IEEE-SP Int. Symp. Time-Scale Anal., pp. 225-228, Oct. 1994.

### 저자 소개



#### 배상범(Sang-Bum Bae)

2002년 6월 제6권 제 4호 참조  
2002년 3월~현재 부경대학교 대학원 제어계측공학과 박사과정

※ 관심분야 : 통신 및 신호처리



#### 김남호(Nam-Ho Kim)

2002년 6월 제6권 제 4호 참조  
1992년 3월~현재 부경대학교 공과대학 전기제어계측공학부 전임 강사/조교수/부교수/교수

※ 관심분야 : 회로 및 시스템, 신호처리