대한수학교육학회지 <학교수학> 제 5 권 제 3 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.5, No.3, 297-314. Sep 2003

수학적 지식 점유를 위한 학습 모델

김 선 희* · 이 종 희**

수학학습에서 학생들은 교과서의 내용 지식 뿐 아니라 수학의 정의, 정리, 알고리즘, 논리적 사고, 발견술, 언어 등의 수학적 지식을 자신의 것으로 만들어 사용하고 활용하는 점유를 해야 한다. 수학적 지식에 포함되는 수학언어는 여러 기능을 담당하면서 수학적 지식 점유를 가능하게 한다. 수학적 지식을 점유할 수 있는 잠재적 수준에 이르기 위해서 학습자는 교사와의 상호작용 뿐 아니라 언어를 사용할 수 있는, 자신과 그리고 동료와의 상호작용이 필요하다. 본 연구는 Vygotsky의 근접발달영역에 기초하여 이러한 상호작용을 IZPD와 ZPP, ZAD의 아이디어로 제시하고 그것이 적용된 수학학습모델을 제시하였다. 두 학생의 학습을 예로 들었을 때, IZPD 뿐 아니라 ZPP와 ZAD의 상호작용 영역이 수학적 지식 점유에 필요했다.

Ⅰ. 서론

최근 구성주의 인식론이 부각되면서 수학은 수학자들이 만들어놓은 완성된 작품이기보다는 학생들 스스로 구성해 가는 것이라는 데에 의견이 모아지고 있다. 학습 과정에서 교과서와 교사의 수학적 지식은 학생들에게 전달되는 것이 아니라 학생들의 적극적인 참여를 통해 구성되어 가는 것이며, 이러한 구성주의의 등장에는 Piaget와 Vygotsky의 영향이 컸다. 특히 Vygotsky는 최근 사회 · 문화적 요인이 아동 발달의 모든 측면에 미치는 영향에 대한 관심이 확산되면서 주목을 받고 있다. Vygotsky는 의식적인 정신세계, 고등 인지 과정, 사고와 행동을 조절하기 위한 언어 사용 능력 등에 기본이 되는 것으로 성인과 아동, 아동과 아동간의 의견 교환을 중시하였고(Berk & Winsler, 1995/1995), 그에 따르면 의미, 기억, 의식을 포함한 모든 지적 발달은 사회적인 차원에서 개인적인 차원으로 발전하는 것이다.

Piaget와 대립되는 Vygotsky의 아이디어 중 하나는 학습이 발달을 주도할 수 있다는 가정이다. Vygotsky는 학습자의 인지적 발달이 이루어진 후 그에 부응하는 교육을 하기보다 교육자와 학습자 사이의 적극적이고 능동적인 상호작용을 통해 교육이 이루어진다고 보았으며, 이때 학습자는 유능한 타인인 교사나 동료의 도움을 받아 실질적 발달 수준에서 잠재적 발달 수준에 도달할 수 있다.

* 광장중학교(ilovemath@empal.com),
** 이화여자대학교(jonghee@ewha.ac.kr)

지식은 학습을 통해 학습자에게 점유[1]되는 것이며 학습의 지도는 사회적 관계를 바탕으로 학생들이 지식을 점유할 수 있도록 인도해야 하는 것이다.

수학적 지식의 점유는 학생들이 수학학습의 결과로 도달해야 할 목표로서, 교사에게서 지식을 전달받는 것이 아니라 타인과 자신의 도움을 받아 학생이 스스로 지식을 구성하여 완전히 자신의 것으로 만들고 사용하고 활용할 수 있는 것을 말한다. 교사가 학생들에게 교과서의 수학을 설명했다고 해서, 학생이 수학적 내용을 표현하는 방법을 보고 써봤다고 해서, 교사나 교과서의 풀이과정을 그대로 공책에 옮긴다고 해서 학생들에게 수학적 지식이 점유되지는 않는다. 수학적 지식을 점유하기 위해 학습자는 교사의 안내나 지각적인 자극에만 의지하지 말고, 자신의 사고를 반성하고 지식의 필요성을 절감하고, 스스로 지식을 표현하고 확장시키려는 의식적인 활동을 해야 한다.

수학 학습은 학습자가 수학적 지식을 점유하는 과정으로 볼 수 있으며, 이 과정에서 학습자는 타인 및 자신과 상호작용을 한다. 학생이 근접발달영역에서 잠재적 발달 수준에 도달하기 위해 유능한 교사의 안내를 받는 것은 타인과의 상호작용이며, 학생 스스로 문제를 해결하고 개념을 생각하는 것은 자신과의 상호작용이다. 인간의 상호작용은 일반적으로 언어를 매개로 하는 경우가 많으며, 수학 학습에서의 상호작용 또한 주로 수학적 언어를 매개로 이루어진다. 수학 학습에서 학생은 언어를 통하여 자신이 모르는 것을 질문하고, 타인의 도움을 받고, 생각을 말하며, 지속적으로 타인 및 자신과 의사소통해야 한다. Vygotsky는 지식의 점유 과정에서 언어의 중요성과 그 기능에 대해서는 언급하고 있으나, 수학 교육 연구는 학습자의 인지적 과정에 언어가 어떤 역할을 하는지 그리고 그 과정에서 타인과의 의사소통이 수학적 지식 점유에 어떻게 도움이 되는지에 대해서는 심도 있게 다루지 않고 있다. 수학은 학생 스스로의 탐구와 노력을 필요로 하며, 매개 기능을 하는 수학 용어와 상징[2]의 의미를 학생들이 해석하고 그것이 사용되는 규칙을 알고 능동적으로 사용할 수 있는 수학언어[3]의 점유가 학습 과정에서 요구된다. 수학 학습에서 수학의 독특한 언어를 사용하고 이것을 활용할 수 있는 것은 지식의 점유에 필요하다. 즉, 수학적 지식에는 수학적 언어가 포함되고 언어 외의 지식의 점유에 있어 언어의 역할이 크기 때문에 본 연구는 언어에 초점을 두고 수학적 지식을 논하기로 한다.

Vygotsky 이론을 적용하여 수학 학습에서 언어에 의해 수학적 지식이 점유될 수 있는 모델을 제시하고자 하는 본 연구는 수학언어 또한 수학적 지식으로 보고 수학학습에서 언어가 어떤 기능을 하는지 그리고 언어에 의해 수학적 지식이 점유되었다고 하는 것은 무엇을 말하는

1) 일반적으로 개인간 국면으로 존재하는 정신기능이 개인내 정신기능으로 전환되는 Vygotsky의 지식의 발달은 '내면화(internalization)'로 번역되어 왔으나 이는 지식의 발달과정을 지나치게 경험주의적인 인식론으로 오해하게 할 수 있고 지식을 발달시키는 아동의 역할을 너무 수동적인 것으로 취급하게 된다는 의미에서 근래에는 '점유(appropriation)'나 '통합화(incorporation)'으로 번역하는 것이 더 타당하다는 입장이 대두되고있다(김지현, 2000). 본 연구에서도 점유라는 용어를 사용할 것이다.

2) 기호의 질료적 형태가 그것이 보증하는 어떤 것과 유사성을 보여주는 기호를 Hegel과 Saussure는 상징, Peirce는 도상이라 하였으며, 반대로 임의적 기호를 Hegel과 Saussure는 기호, Peirce는 상징이라 불렀다 (Trabant, 1996/2001). Peirce의 용어를 따라 본 연구에서 상징은 규약에 의해 정해진 수학에서만 사용되는 기호로 한정한다.

3) 수학언어는 수학에서만 사용되는 상징과 수학용어의 사용역인 일상 언어를 말한다.

지를 규정하고, 수학적 지식이 점유되기 위한 학습에서의 상호작용이 어떠해야 하고 그 안에서 지식 점유가 어떻게 실현될 수 있는지 고찰해 본 후 그에 따른 학습모델을 제시하고, 이 모델이 적용된 두 학생의 문제해결 예시를 보여줄 것이다.

II. 수학언어와 수학적 지식

1. 수학적 지식으로서의 언어

수학적 지식이 무엇인지에 대해서는 수학자 자신들도 명확한 답을 하기 어렵다(Thurston, 1994; Furani, 2000, 재인용). 형식주의 관점에서, 수학은 개념, 규칙, 정리, 구조의 집합이라 할 수 있으며, 반면에 활동주의 관점에서 수학은 일반화, 분류, 형식화, 순서화, 수량화, 추상화, 패턴 탐구 등과 같은 활동에 참여하는 것으로 구성된다. 언어가 수학적 지식으로서 다루어지기 위해서는 지식이 무엇인지가 먼저 분명해야 할 것이며 본 연구는 지식이 인간의 심적 작용인 의식에 의해서 내용이 규정된, 인식에 의한 성과라고 볼 것이다(이희승, 1996). 즉 지식이라 판단하기 위해서는 먼저 인간의 마음속에서 인지적 작용에 의해 구성될 수 있는 것이어야 하고, 구성을 통해 생겨난 내용이 있어야 하며, 인식에 의해 타당성이 입증될 수 있는 결과물이어야 하는 것이다. 김선희 · 이종희(2002)는 언어가 기호로서 기호화와 해석화의 인지 작용에 의해 구성되고, 대상체, 해석체의 내용을 가지고 있다고 했으며, 또 언어는 수학에서 규정한 기준에 의해 옳고 그름이 판단될 수 있는 오랜 역사적 노력의 성취 결과라는 점에서 이러한 지식의 요건에 합당하다 할 수 있다.

형식주의와 활동주의의 서로 다른 극단적 입장을 절충한 van Dormolen(1986)은, 수학이 활동에 의해 새로운 지식인 정리, 규칙, 정의, 방법, 규약과 같은 것을 생산한다고 하면서 이러한 지식의 요소를 핵심(kernel)이라 불렀다. 수학은 인간의 활동과 문화적 유산으로만 볼 수 없으며, 활동에 대한 근거가 있어야 하고 그것이 바로 수학적 지식의 핵심이다. 이러한 생각에서 van Dormolen은 수학적 지식의 여러 양상을 제시하였다. 첫째는 이론적 양상으로, 수학적 구조나 이론을 형성하는 정리, 정의, 공리를 말한다. 둘째는 알고리즘의 양상으로, 명확한 '방법적' 규칙이라 할 수 있다. 셋째는 논리적 양상으로, 이론을 다루게 되는 방법을 알려주는 것이다. 넷째는 방법론적 양상으로, 알고리즘의 양상과 마찬가지로 '방법적' 규칙을 주지만 발견술적인 본질에 해당하며, Polya의 문제해결 전략과 수학적 귀납법에 의한 증명 방법 등이 여기에 해당한다. 다섯째는 의사소통의 양상으로, 증명을 받아들일만하게 쓰는 방법이나 도형의 점에 문자를 표기하는 규약을 포함한다. van Dormolen의 제시는 수학 학습이 활동에서만 끝나는 것이 아니라 활동의 근거를 형식적으로 보여주는 것이 학습의 과정과 결과에 포함되어야 함을 시사한다. 이러한 생각은 수학적 지식의 본질을 탐구한 Kitcher(1984)의 연구에서도 찾아볼 수 있다.

Kitcher는 수학의 역사적 발전 과정에서 나타나는 패턴을 합리화의 과정이라 하면서 문제해결, 새로운 문제제기, 일반화, 엄밀화, 체계화로 설명하고 있다. 여기서 수학은 단순한 활동에 그치지 않고 새로운 언어와 추론을 만들면서 이론을 형식화하는 학문이다. 즉, 해결해야 할 문제를 제기하여 그것을 해결하는 과정에서 일반화를 시행하고, 엄밀한 규약을 설정하면서 구조를 체계화해 가는 것이 수학의 발전 과정인 것이다. 그 결과로 수학은 '언어, 수용된 진

술의 집합, 수용된 추론의 집합, 중요한 것으로 선택된 질문의 집합, (증명과 정의에 대한 규준, 수학의 영역과 구조에 대한 기준을 포함한) 메타-수학의 집합'의 5가지 요소들로 구성될 수 있다. 여기서 수용된 진술은 van Dormolen의 이론적 양상에, 수용된 추론의 집합은 알고리즘과 논리적, 발견술적 양상, 언어는 의사소통의 양상에 대응시킬 수 있다.

수학적 지식이 무엇인가에 대한 두 연구자의 주장은 수학학습 과정에서 학생들이 수학을 구성하는 활동에 참여하면서 엄밀하고 체계적인 수학을 구성해 나가야 함을 시사한다. 그리고 그 과정과 결과를 표현하는 것은 수학언어이다. van Dormolen은 수학언어를 통한 알고리즘의 양상과 규약에 의한 의사소통 양상을 수학적 본질에 포함시켰고, Kitcher는 수학적 실행에 언어를 포함하였다. 따라서 수학적 지식에는 수학적 언어가 포함되며, 수학적 지식의 점유 과정에는 수학적 언어가 수단으로서 포함될 수밖에 없다. 즉 수학적 지식의 점유과정에서 수학적 언어는 지식을 구성하는 매개수단이자 체계인 것이다.

2. 수학 학습에서 언어의 기능

수학언어는 지식을 점유해 가는 과정에서 의사소통의 수단으로서 수학사회의 구성원들에게 통용되며, 정신적 도구로서 수학적 활동에 포함되어 기억전략과 정보를 유지하게 한다. 이것은 수학언어의 학습이 규약적인 용어와 상징을 사용하는 것으로 진행되어야 하고, 학습자가 수학의 개념, 알고리즘, 추론, 문제해결을 학습할 때 사용하는 여러 지식의 재생과 관리가 언어에 의해 가능해질 수 있음을 말하는 것이다. 뿐만 아니라 수학언어는 지식의 발달을 이끄는 개인 정신간 국면에서 매개라는 독특한 기능을 수행하면서 의사소통과 학습을 가능하게 한다.

수학 학습에서 언어의 기능을 Vygotsky가 언급한 언어의 일반적인 기능에 의해 알아보도록 한다. Vygotsky는 엥겔스의 도구적 매개 개념을 확장하여 이를 기술적 도구와 심리적 도구의 개념에 적용하였는데, 기술적 도구는 외부의 대상에 대해 사용될 수 있는 도구이며, 심리적 도구는 자신 또는 타인에게 심리적으로 영향을 주는 행동을 할 때 사용되는 수단이다(Wertsch, 1985/1995). 이 심리적 도구는 기호이며 언어는 기호에 속하는 것으로 볼 수 있다. Vygotsky는 일반적으로 언어의 기능을 신호화와 의미화, 사회적 기능과 개인적 기능, 의사소통 기능과 지적 기능, 지시 기능과 상징 기능으로 대조시켰다. 신호화(signaling)는 동물과 인간 모두에게 행동의 기초가 되는 것으로 조건반사와 같은 신경활동을 말하며, 의미화(signification)는 인간에게만 해당하는 것으로 인위적인 언어를 만들고 이를 사용하는 것이다. 수학 학습과정에서 의미화는 수학적 개념을 표현하기 위해 언어가 의식적으로 만들어지고 사용되는 것에서 나타난다. 이때 수학의 상징과 용어가 제대로 기능하기 위해서는 사회적으로 동의를 얻을 수 있는 규칙이 적용되어야 하며, 동시에 개인적으로 수학 기호를 발명하여 사용하더라도 사회적으로 받아들여질 수 있도록 발전되어야 한다.

언어 기호는 처음에 다른 사람에게 영향을 주는 사회적인 목적을 위해 사용되는 사회적 기능의 수단이다가 후에 자기 자신에게 영향을 미치는 수단이 된다. 언어의 사회적 기능과 개인적 기능간의 구분은 일반적으로 개인간 심리 기능의 매개수단과 개인내 심리 기능의 매개수단간의 구분이며, 개인내의 심리적 기능에서 언어적 매개의 역할을 이해하기 위해서는 개인간 심리적 수준에서의 언어를 먼저 이해해야

한다. 의사소통 기능과 지적 기능은 이러한 사회적 기능과 개인적 기능에 대한 생각을 구체화시킨 것으로, 의사소통 기능은 사회적 기원을 가지면서 개인간에 사용된 언어가 개인적이고 지적인 기능으로 전환되는 것에서 역할을 한다. 지적 기능은 유능한 타인인 교사가 사용하는 언어를 모방하고 스스로 개념을 생각해보고 적용하는 사고과정에서 사용되며, 이러한 지적 기능의 방향을 안내하고 교정하는 것은 사회적인 의사소통 기능이 담당할 수 있다. 언어가 의사소통의 기능으로만 사용된다면, 학습자는 수학적 문제해결에서 발견술을 생각해 내거나 추론을 발전시킬 수 없다. 김선희 · 이종희(2003b)는 학생들의 언어 이해와 사용에 의해 지적 기능과 의사소통 기능을 조사하면서, 학생들의 수학적 언어 이해 수준과 사용 수준이 다름을 확인하였다. 학습자의 역동적이고 적극적인 학습이 이루어지기 위해서는 언어의 의사소통 기능과 지적 기능이 함께 활용될 수 있는 학습 상황이 설계되어야 할 것이다.

수학 학습에서 개인의 지식이 점유되고 발전하는 것은 언어의 지시기능과 상징기능에 의해서이다. 이 기능들은 언어가 가리키는 참조대상과의 관계에 따라 분류되는 것으로, Peirce가 기호의 표현과 기호의 대상과의 관계에 의해 기호를 도상, 지표, 상징으로 분류한 것에서 (Trabant, 1996/2001) 지표와 상징의 기능에 해당한다고 할 수 있다. 지표는 대상을 가리키는 지시 기능을 담당하는 기호로, 그 대상과 직접적이고 물리적인 관련을 맺으며 의사소통에서 기호 표현과 그것의 대상이 공간적, 시간적으로 함께 나타나야 해석이 가능하다. 맥락에 구속되어 있는 지표는 개인간의 상황에서 사용되는 순간에 상황과 맥락에 의존하는 형태로 상호작용에 참여하는 사람의 활동을 지시하거나 구속하게 된다(김지현, 2000). 학습자가 개념과 언어를 학습해야 할 때, 교사는 학생의 수준에서 적절한 지식과 사용역의 언어를 사용하여 지식을 점유할 수 있는 상황과 맥락을 형성해야 하며, 이때 언어는 주로 지시기능을 담당한다. 수학 교과서의 기호 도입과 전개 과정을 조사한 김선희 · 이종희(2003a)는 표현과 탐구를 강조한 어느 접근을 취하더라도 기존에 알고 있는 지식과 사용역의 언어를 형판으로 대수기호가 등장하고 있음을 보여주었다. 기호의 정의를 내리기 전이나 기호의 의미가 채워지기 전, 기호는 상황과 맥락에 의존한 지시기능을 담당한다. 이때, 학습자는 교사가 사용하는 언어를 어떤 것을 지시한다는 의미로 받아들이며 맥락 없이는 언어의 의미를 파악하지 못한다.

초기 단계의 언어기능은 지시 기능이지만 일련의 개념이 형성된 이후의 언어는 상징 기능을 한다. 언어가 매개하는 개념간의 관계와 탈맥락화에 의해서 지시 기능은 상징 기능으로 전환된다. 언어가 지시하는 대상에 대한 일반화와 추상화를 시도하면서 개념이 형성되면, 언어는 이제 추상적 개념을 매개하게 된다. 이때 지시 기능을 통하여 개념의 형성에 외적으로 기여하는 언어는 고등정신기능이 점유되면서 상징 기능으로 전환된다. 사회적 규약에 의해 기호가 가리키는 대상과의 관계가 규정되는 상징은 대상을 맥락과 연결하지 않고 학습자에게 하나의 수학적 대상으로 인식되어 자의적인 기호의 기능을 하는 것이다. 즉, 수학적 언어가 대상으로 조작될 수 있고 언어 안에 수학적 의미가 압축되어 포함될 때 그 언어는 맥락에서 벗어나 독립적으로 존재할 수 있는 상징 기능을 담당하는 것이며, 이때 수학에서 사용되는 언어는 상징이다. 학습자는 수학에서 범주화, 연역적인 추론을 하면서 상징 기능의 언어를 사용하며, 상징 기능은 수학적 개념 사이의 관계를 형성할 수 있도록 해 준다. 예를 들어, 시

간에 따른 거리의 함수를 $y=3x$라고 나타낼 때 상징의 식 $y=3x$는 일차함수로 분류가 가능하고, 기울기와 y절편을 갖는 직선의 그래프로 인식되어 대상으로 다루어질 수 있고 평행이동의 개념과 관계가 형성될 수 있다.

상징 기능은 단지 학습자가 교사의 설명 내용을 잘 듣고 이해하면서 도움을 받는 상호작용보다는 학습자가 스스로 자신의 생각을 정리하고 사고 과정을 관찰하면서 자기-조절을 하는 자신과의 상호작용에서 더 잘 기능한다. 지식 점유 과정과 언어 매개기능에 대한 교육학적 고찰에서 김지현(2000)은 개인정신간 국면에서의 언어기능은 지시기능으로, 개인정신내 국면에서의 언어기능은 상징기능으로 보고 있다. 언어가 각 기능을 발휘하기 위해서는 수학 학습이 일어나는 상호작용이 개인간, 개인내의 어떤 것이어야 하는가에 관심을 갖게 하며, 교사의 도움을 받는 개인정신간 근접발달영역만으로 수학언어의 상징 기능이 제대로 생겨날 수 있는지 의문을 가질 수 있다.

수학적 지식의 학습 과정에서 수학언어는 위에서 언급한 여러 기능을 담당할 수 있다. 신호화보다는 의미화, 사회적 기능보다는 개인적 기능, 의사소통 기능보다는 지적 기능, 지시 기능보다는 상징의 기능이 더 고등한 형태로 제시되고 있으나 본 연구는 이 중에서 의사소통 기능과 지적 기능은 지속적인 교대 작용이 필요하다고 본다. 수학 학습에서 사용되는 언어는 문제 해결과 개념 정립을 위한 개인의 지적 기능 뿐 아니라 교사의 안내를 받고 수학 사회의 정해진 상징과 규칙을 학습하는 의사소통 기능으로도 사용되어야 하기 때문이다. 다음 장에서는 언어의 기능을 기초로, 언어를 포함하여 수학적 지식을 점유했다는 것이 무엇인지 규정해 보기로 한다.

3. 수학적 지식 점유의 판단

본 연구는 언어에 의하여 수학적 지식 점유를 할 수 있는 학습지도를 모색하려 한다. 학습지도의 결과로 학생이 수학적 지식을 점유했다는 것을 무엇이라 판단할 수 있는지 언어라는 수학적 지식과 언어에 의한 수학적 지식 점유 두 가지에서 학습자가 지식을 점유했다고 볼 수 있는 기준이 무엇인지 생각해볼 수 있을 것이다.

수학언어라는 지식의 점유는 Peirce의 삼원적 요소(Trabant, 1996/2001)와 기호학의 분야인 구문론, 의미론, 화용론에 의해 다음과 같이 판단될 수 있다. 첫째, 수학언어가 사용되는 규칙을 아는 것이다. 언어의 사용을 명확하게 하는 것은 수학의 표현과 의사소통에 엄밀성을 주고, 압축된 의미를 포함한 상징을 통해 수학적 구조를 파악하게 할 수 있다. 수학언어의 점유는 수학에서 통용되는 약속된 규칙에 맞추어 언어를 사용할 수 있는 것이어야 하며 이것은 구문론에 의존한 점유일 수 있다. 둘째는, 수학언어의 의미를 이해하는 것이다. 수학언어를 보고 그 뜻과 의미를 학습자 임의대로 해석하는 것은 수학적 지식 점유라고 볼 수 없다. 초기의 불완전한 해석도 학습을 통해 학습자에게 수학적 진리와 아이디어의 관계를 볼 수 있도록 발전되어야 하며, 수학적 문제해결이나 개념상 의미에 맞는 해석이 이루어져야 한다. 세 번째로 수학언어를 적절하게 해석하고 사용해야 한다. 수학에서는 하나의 의미에 여러 표현을 할 수 있으며, 그 해석 또한 여럿이 될 수 있다. 예를 들어, 일차함수를 표현하는 기호는 표, 그래프, 대수식 등이 될 수 있으며, 그 해석 또한 기울기, y절편, 함수의 한 부류 등이 될 수 있다. 수학적 아이디어나 구조, 문제해결 등의 수

학적 지식은 언어에 의해 표현되고 발전한다. 현상의 관찰을 통해 그 정보를 수학적으로 구조화하거나 다른 사람이 이해할 수 있도록 표현하는 것은 수학 학습에서 의사소통의 기본이며, 이러한 교육 목표는 상황에 따라 적절한 기호를 사용하고 그 의미를 해석하는 화용론에서 다루어지는 내용이다.

수학언어의 학습은 그 자체 뿐 아니라 여타 수학적 지식의 점유를 설명하고 그에 도움을 주는 역할을 한다. 모든 수학적 지식의 점유에 대해 상세하게 논할 수는 없지만, 언어에 의한 수학적 지식 점유가 무엇인지는 말할 수 있다. 수학적 지식을 점유한다는 것은 타인과 자신의 도움으로 지식을 스스로 구성하고 자신의 것으로 만들어 사용하고 활용하는 것이라 했다. 여기서 스스로 지식을 구성하기 위해 타인의 도움을 받을 때는 신호화, 사회적, 의사소통, 지시 기능의 언어가 사용되지만, 자신의 도움을 받을 때는 개인적이고 지적인, 상징 기능의 언어가 사용된다. 그리고 지식을 자신의 것으로 만들어 사용하고 활용하는 것은 의사소통, 지적, 의미화, 상징 기능의 언어가 사용된다. 이러한 언어 기능에서 볼 때, 수학적 지식 점유에는 언어가 중요한 역할을 하며, 이러한 기능에 따라 수학적 지식 점유의 판단을 해볼 수 있다.

먼저, 지적인 기능의 언어가 사용될 때 수학적 지식의 점유는 다음과 같이 판단될 수 있다. 첫째, 수학용어와 상징을 사용하여 수학적 지식을 표현하고 아이디어나 언어표현 사이의 관계를 파악할 수 있어야 한다. 즉, 자신의 지식을 수학언어를 사용하여 표현할 수 있어야 한다는 것이다. 수학적 지식을 수학언어로 표현하고 그 관계를 기술하는 것에서 학생들은 자신과의 의사소통에 임할 수 있으며, 이 기준은 개인 내적으로 언어에 대한 규칙을 확립하고 의미를 파악하고 해석하는 수학언어 자체의 지식 점유에 포함되는 것으로 볼 수 있다. 둘째, 수학언어로 표현된 수학적 지식을 동치의 다른 수학적 표현으로 바꾸고 해석할 수 있어야 한다. 이는 수학 표현간의 번역과 관련된 것으로, 수학적 지식을 점유하기 위해 일상 언어보다 형식적이고 엄밀한 더 높은 수준의 상징으로 향해야 할 것이다. 동료들과 서로 다른 표현의 장점과 단점에 대해 의견을 나누는 협상을 하여 점유될 수도 있으며, 언어 표현을 변형하는 것은 문제해결의 발견술에서도 유용하다.

의미화의 기능을 강조한다면, 수학적 지식을 점유했다는 것은 누군가에게 자신의 지식을 보여줄 수 있어야 한다. 그래서 지식 점유 판단의 기준인 세 번째로, 상대방의 이해를 돕기 위해 상대방의 수준에서 이해할 수 있는 수학언어를 사용할 수 있어야 하는 것을 제시한다. 이 기준은 두 번째 기준인 표현간의 번역이 점유되었을 때 실현될 수 있으며, 상대방이 어느 정도의 지식과 언어를 점유하고 있는지 알고 그에 맞는 수준을 제시할 때 의사소통의 효과를 거둘 수 있다. 아는 것과 표현하고 가르치는 것에는 차이가 존재하듯이, 학생들은 수학적 의사소통을 성공적으로 하기 위해서 타인의 수학적 지식과 수학적 언어의 수준을 파악하여 그에 맞는 언어를 사용해야 한다. 그리고 네 번째로, 자신의 수학적 지식을 상대방에게 논리적으로 설득시킬 수 있어야 한다. 이 기준은 논리적인 사고와 언어적 기술을 통해 점유될 수 있는 것으로 언어에 의한 지식 그 이상을 요구한다.

지시 기능에서 벗어나 추상적인 수학적 관계를 깨닫고 파악할 때 사용되는 상징 기능을 강조하면, 수학적 지식을 점유한 다섯 번째 기능은 학습자가 자신의 수학적 지식을 토대로 지

식이나 아이디어 간의 관계를 언어로 기술하여 보다 상위의 지식을 점유할 수 있도록 창의성을 발휘하는 것으로 정할 수 있다. 교사의 안내를 통해 알게 되는 것 이외에도 자신의 힘으로 상징 간의 구문론적 관계나 아이디어간의 관계를 토대로 수학적 사실을 발견하거나 문제를 해결할 수 있어야 한다. 실생활의 상황에서 수학적 본질을 꿰뚫고 그것을 수학언어로 사용하는 것 또한 창의성 발휘에 포함되며, 문제해결 능력으로 볼 수도 있다.

이 다섯 가지 수학적 지식 점유의 기준은 이론적, 알고리즘, 방법적, 논리적 지식과 중요한 질문 등의 수학적 지식에 모두 적용될 수 있다. 그러나 이것은 언어의 관점으로 본 것이며 수학적 지식 점유를 판단할 수 있는 다른 기준이 존재할 수도 있다.

III. 수학적 지식 점유에 필요한 상호작용

수학자체가 언어라고 할 수는 없으나 수학은 언어적 지식을 포함하며, 수학적 언어는 수학적 지식의 여러 양상에서 중요한 역할을 할 수 있다. 교육적 관점에서 학생들이 수학적 지식을 점유하기 위해 수학언어를 사용할 수 있는 상호작용 영역은 Vygotsky의 근접발달영역 이론에 기초한다. Vygotsky는 지식의 점유 과정을 교수학습 상호작용이라고 하면서 고등정신기능의 발달단계상 차이가 있는 학습자와 유능한 타인의 적극적인 협동적 활동을 제안하고 있다(김지현, 2000). 여기서 Vygotsky는 수학적 지식을 획득하고 있는 사람과 그렇지 않은 사람이 독립적이고 자율적인 정신기능의 발달을 위해 긴밀한 상호작용이 필요함을 생각하고 있으며, 이러한 교수학습 상호작용은 학습자의 근접발달영역 내에서 이루어진다. 여기서 언어는 개인적 기능보다는 사회적 기능을 하고 학습자는 유능한 타인과의 상호작용 내에서 의사소통을 한다.

근접발달영역은 학습자가 독자적으로 문제를 해결함으로써 결정되는 실질적 발달수준과 교사의 안내를 통하여 문제를 해결함으로써 결정되는 잠재적 발달수준간의 거리를 말한다(Wertsch, 1985/1995). 그러나 본 연구는 근접발달영역을 실제와 잠재 수준 사이의 시간적 거리가 아닌, 잠재적 수준에 도달할 수 있는 교사와 학습자의 교수학습 상호작용으로 재해석하여 논의를 진행할 것이며, Vygotsky의 근접발달영역과 구분하기 위해 근접발달 상호작용영역(interaction zone of proximal development; IZPD)[4] 라 부를 것이다. 잠재적 발달 수준에 도달하기 위해서 학생은 교사나 좀더 유능한 동료와의 사회적 상호작용이 필요하며, 이 상호작용 안에서 교사는 과제 해결을 위해 시범을 보인다거나, 과제의 제시형태를 바꾼다거나, 더 많은 시도를 한다거나, 성공적인 학습 전략에 대해 더 많은 정보를 제공한다거나, 유도 질문을 한다거나, 문제 해결의 실마리나 힌트, 자극 등을 제공하는 등의 역할을 해야 한다(백순근, 1999). 지식을 전달하든 안내하든 과거로부터 현재까지 교사는 교육의 중심에 있어 왔고, 교사와 학생의 상호작용은 수학학습에서 꼭 필요하다.

그러나 수학학습이 교사의 안내를 받는 것으로 끝나서는 안 된다. 수학은 교사의 안내로 규약적 용어와 상징을 사용하고 해석할 수 있게 되더라도 학생 스스로 자신의 도움을 받아 배운 내용을 반성하고 생각하는 학습이 필요하

4) 이후에는 근접발달 상호작용영역을 IZPD라 부르기로 한다.

다. Gallimore와 Tharp(1990)는 지식의 점유인 내면화 이전에 타인의 도움과 자신의 도움을 받는 두 가지 단계가 근접발달영역에 포함되어야 한다고 했다. 즉, 교사의 도움 뿐 아니라 자신의 도움으로 지식을 학습하는 과정이 필요하고 그때에야 지식이 점유되었다고 할 수 있는 것이다. 학습자는 알고리즘과 문제해결을 위해 새로운 의미의 언어를 자유자재로 사용할 수 있어야 한다. 수학언어를 사용하고 그 의미를 이해하고 해석하는 것은 학생 자신의 판단으로 기호화와 해석화를 통해 수학을 경험하는 것을 필요로 한다. 본 연구에서는 자신의 도움을 받는 상호작용과 학습 지도에 대해 말하고자 하며, IZPD에서 이루지 못한 점유나 이미 도달한 잠재적 수준의 유지를 위한 상호작용 영역으로 Albert(2000)의 '근접실행영역(zone of proximal practice; ZPP[5])'과 Tchoshanov(2001)의 '발전된 발달 영역(zone of advanced development: ZAD[6])'을 제시한다[7].

수학은 혼자 힘으로 개념을 생각하고, 문제해결 전략을 구상하고, 공식을 암기하여 사용하는 개인 학습이 필수적이다. 근접발달영역 이론이 시사하는 것처럼 교사의 안내를 통한 상호작용에 의해서 잠재적 발달 수준에 이른다고 가정한다면, 복습이나 과제, 프로젝트와 같은 학습자 중심의 개인 학습이 경시될 수 있다. Vygotsky가 제시한 언어의 기능 중에서, 의미화, 개인적, 지적, 상징기능이 제대로 발휘될 수 있는 상호작용 영역이 필요하며, 이것은 학습자가 자신의 도움으로 학습을 주도할 수 있는 영역인 ZPP로 먼저 설명될 수 있다.

Albert(2000)는 지식의 점유과정 이후 학습자 자신의 도움을 받아 쓰기를 통하여 발달된 능력을 실행할 수 있다고 하면서, 근접발달영역의 구성을 근접실행영역 ZPP로 확장하였다. ZPP에서는 자기-비계, 자기-조절의 개인적인 사고 과정이 이루어지고, 이것은 다시 사회적 상호작용의 기원에서 출발하는 근접발달영역으로 향하는 순환과정이 된다. 근접발달영역은 주로 구어를 통한 상호작용으로 다른 사람의 도움을 받는 것에, ZPP는 문어를 사용하여 자신의 개인적인 문제 해결을 하는 것에 해당한다.

개인간 정신에서 개인내 정신으로 외적인 상호작용이 학습자의 지식으로 점유된 후 학생은 글과 기호, 그림, 표 등의 표현수단을 통해 수학에 대한 자신의 생각을 정리하고 발전시킬 수 있는 기회가 필요하다. 수학적 언어를 포함한 지식의 점유는 상징규칙의 자동화를 포함하며 이것은 ZPP의 실행에 의해 점유될 수 있다. Albert의 ZPP는 쓰기가 수학 학습에서 사용되어야 한다는 것을 Vygotsky의 이론에 근거하여 제시한 것이며, 개인적 문제해결을 자신과의 의사소통으로 본다. Vygotsky(1978/1994)는 사회적, 의사소통의 기능 외에 개인적, 지적 기능의 언어를 언급할 때 문어의 학습에 대한 의견을 제시한 바 있다. 그는 쓰기가 아동에게 유의미한 것이어야 하고 선천적 요구가 내면에서 우러나오는 동기 유발을 할 수 있어야 한다고 주장했다(Wertsch, 1985/1995). NCTM(1989, 2000)에서도 의사소통의 중요성을 강조되면서 현재 수학 학습에도 쓰기를 활용한 학습 지도 방안이 많이 소개되고 있으며(김용익, 1999), 그 효과에 대한 검증도 이루어지고 있다(예를 들어, 김선희, 1998; 최인숙, 1998; 채미애, 2002). 수

5) 이후에는 근접실행영역을 ZPP라 할 것이다.
6) 이후에는 발전된 발달 영역을 ZAD라 할 것이다
7) Albert와 Tchoshanov의 아이디어가 포함되기는 하지만, 본 연구는 그들의 용어를 사용하되 그들의 의견을 그대로 따르지는 않을 것이다. .

학에만 한정된 새로운 용어와 상징을 학습할 때 학생들은 근접발달영역에서 교사가 수학 용어를 모델링하는 것처럼, 스스로 수학적 지식을 글로 써서 의사소통하는 실행을 해야 한다(Miller, 1993). 요약하면, 교사의 안내에 의해 구성된 수학적 지식이 학습자에게 확고하게 점유되기 위해서는 학습자 스스로 언어를 사용하고 개념을 생각하고 알고리즘을 실행하고 추론하는 개인 학습이 필요하며 이것은 문어를 통한 자신과의 상호작용인 ZPP에서 이루어질 수 있다.

언어의 기능 중에서 인위적인 언어를 만들고 사용하는 의미화를 강조한다면, 학습자는 자신의 생각을 적극적으로 타인에게 알리기 위해 언어를 사용할 수 있다. 이때의 의사소통은 학습자가 자신의 학습 뿐 아니라 타인의 학습을 독려하는 차원에서 이루어질 수 있으며 타인의 입장에서 이해하기 쉬운 언어를 사용하는 의사소통 기능과 그를 통해 자신의 학습을 굳건히 할 수 있는 지적 기능이 모두 사용될 수 있다. 이러한 상호작용은 ZAD로 설명된다.

Tchoshanov(2001)는 근접발달영역의 잠재적 수준에서 학생들의 창의성을 강조한 또 하나의 영역인 ZAD가 존재한다고 하였다. 학생들이 이해의 수준을 넘어 창의성을 발휘하고 외면화를 한다는 점에서 이 영역은 주목할 만하다. 근접발달영역에서는 비교, 재생, 동화, 모방의 기능이 중요하지만 ZAD에서는 구성, 생산, 창조가 중시된다. Tchoshanov는 근접발달영역의 하위 수준인 실질적 발달 수준을 학생들의 실제 지식, 기술, 경험을 포함한 발달수준으로 실현된 발달 수준(level of actualization development; LAD[8])이라고 칭하였다. 학생들의 인지발달은 LAD에서 출발하며, 의미에 대한 사회적 협상의 장소인 학교에서 교사와 학생들이 서로의 이해를 점유할 수 있는 영역인 근접발달영역을 거쳐, 창의성을 외면화하는 ZAD에 도달한다. ZAD는 학습자가 자신의 수학적 개념을 점유한 후 창의성을 발휘하여 문제를 해결하고 그것을 남에게 보여줄 수 있는 영역이다.

교사의 안내를 통해 도달된 잠재적 수준에서 자신이 갖고 있는 지식을 글로 쓰고 설명하는 것 뿐 아니라 자신보다 유능하지 못한 동료나 후배에게 설명하면서 학습자는 유능한 타인인 교사의 역할을 담당할 수 있다. 이러한 상호작용에서 학습자는 자신의 수학적 지식을 확고히 할 수 있는 기회를 얻으며, 이 상호작용은 현재 의사소통의 실행 방안으로 선택되고 있는 협동학습에서 유능한 학생이 얻을 수 있는 장점을 설명해 줄 수 있다. 학생들이 교사나 동료와 원활한 의사소통을 하고 있다고 해서 그 의미가 교사의 것과 동일하다고 간주할 수 없다. 실제로 다른 사람을 도와주는 위치에 있을 때, 학생이 사용하는 언어의 의미가 더 분명히 나타난다. 학생들은 수학적 개념의 이해만이 아니라 이해한 개념을 도구로 적용하고 확장하여 창의성을 발휘하고 문제 해결에 응용할 수 있어야 한다. 이것은 혼자 문제를 푸는 문어를 실행하는 경험 뿐 아니라 동료들과 서로 의미를 생성해 내는 협동 학습에서 실천될 수 있다.

Albert(2000)는 근접발달영역 이후 자신의 힘으로 문제를 해결할 수 있는 ZPP가 존재한다고 한 반면, Tchoshanov(2001)는 Tchoshanov는 근접발달영역에 점유 과정을 포함시켜 창의성을 발휘할 수 있는 외면화 과정을 ZAD라는 새로운 영역을 구성하였다. 본 연구에서는 지식

8) 이후에는 실제적 발달 수준은 LAD로 명할 것이다.

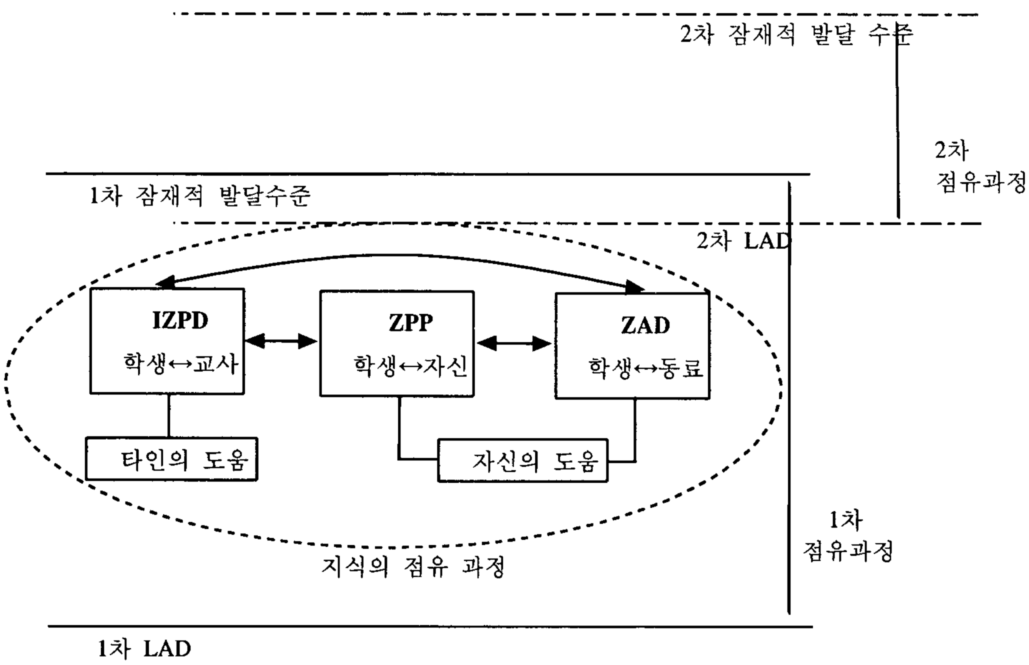
의 점유에 IZPD, ZPP, ZAD가 모두 필요하며, 학습자는 IZPD에서 교사의 도움에 의해 잠재적 수준에 도달할 수 있지만 잠재적 수준에서 지식을 확고히 하고 실행하고 적용하기 위해 ZPP와 ZAD가 있어야 할 것으로 본다. 이를 토대로 다음 장에서는 학습자가 수학적 지식을 점유하기 위한 학습모델을 제시하고자 한다.

Ⅳ. 수학적 지식 점유를 위한 학습 모델

수학적 지식 점유를 하기 위해 IZPD, ZPP, ZAD를 포함한 학습 모델을 제시하고자 한다. Vygotsky는 인지 발달이 부분적으로 인간의 역동성의 결과에 의해 일어난다는 사실을 인정했지만 이를 실제 연구에서 인식하지 못했기 때문에(Wertsch, 1985/1995), 근접발달영역 이후 잠재적 발달 수준이 무엇인지에 대해 학자에 따라 다양한 의견과 해석이 있을 수 있다. 학습자는 IZPD에서 교사의 안내를 받아 지식을 점유하려 한다. 그러나 이로써 수학 학습이 완성된 것은 아니며 학습자 스스로 탐구하고 생각하여 문제를 해결하는 자신의 도움을 받는 문어의 의사소통이 이루어지는 ZPP와, 협동 학습에서 다른 사람의 학습을 도와줄 수 있고 더 나은 창의력을 발휘할 수 있는 ZAD가 존재하여 점유를 확고하게 해야 한다. 수학 이론의 구조를 형성하는 정리나 정의는 교사의 안내에 의해서 그대로 학생에게 전달될 수 없는 것이며, 학습자 스스로 구성하는 활동을 통해 점유될 수 있는 동기가 필요하다. 왜 정의가 필요하고 수학적 정리가 왜 옳은지 수학언어를 사용하여 논리적으로 생각하고 알고리즘으로 실행하고 그 타당성을 확실히 할 수 있어야 하는 것이다. 여기서 사용되는 수학적 언어는 주로 상징의 언어이며 수학적 지식의 점유는 상징의 의미와 규칙에 대한 암기, 그리고 그 실행이 포함되어야 한다. 실제로 점유된 지식이 유지되고 실행되고 발전하는 것은 ZPP와 ZAD에서 이며, ZPP와 ZAD를 거칠 때 지식의 점유가 완성될 수 있다. 따라서 수학 학습에서 수학 지식의 점유는 IZPD에서 멈출 것이 아니라 ZPP와 ZAD의 영역도 고려한 과정으로 설계되어야 할 것이다. 이를 정리하면 [그림 Ⅳ-1]과 같다.

수학 교수학습에서 학습자는 초기에 실질적인 발달 수준인 LAD에 있다. 이 시기에 학습자는 교사에 의해 안내되어 수학적 활동에 참여하게 되고, 도전이 되는 문제나 프로젝트, 패러독스, 오개념, 오류 등의 인지적 어려움에서 출발하여 동기 부여와 같은 학습에서의 도입 단계를 경험하게 된다(Tchoshanov, 2001). IZPD에서 학습자는 유능한 타인 즉 교사와 사회적 상호작용을 한다. 여기서 교사는 학습자보다 유능한 동료나 보조 교사 등으로 대체될 수 있으며, 이 단계에서의 학습은 비계설정에 의한 교수에 의해 이루어진다. 탐구적 접근이나 표현적 접근의 기호 도입을 통해 교사는 학생들이 수학적 언어 지식을 점유하도록 도와야 하며, 학생에게 학습목표를 제시하고, 수학 상징의 규칙이 어떻게 설정되었는지 근거를 학생들에게 설득시키고 수학언어의 의미를 객관적으로 규정하고 상황에 적절하게 언어를 해석하는 모델 역할을 해야 한다.

학생들의 수학적 언어 이해는 위계적인 것이므로(김선희 · 이종희, 2003b), 상황과 연결된 지시사를 사용한 명시적 언어에서 출발하여 점차 상징의 관계적 기호를 사용하여 규약적 기호화



[그림 Ⅳ-1] 수학적 지식 점유를 위한 학습모델

를 돕고, 언어 사용의 모델로서 수사적 기술을 보여주어야 한다. IZPD에서의 상호작용은 주로 구어가 사용되고, 수학적 모델링의 학습도 포함될 수 있다.

ZPP에서 학습자는 자신의 생각을 정리하고 혼자 힘으로 문제를 해결하고 더 발전시켜 새로운 아이디어를 낸다. 자신과의 상호작용을 통한 점유 과정은 자신의 도움으로 수학을 학습하는 것으로, 자신의 생각을 글로 쓰거나 독백과 같은 내적 언어를 사용하게 된다. 수학 상징의 조작이 자동적으로 이루어지도록 연습하고, 언어의 의미에 대한 해석과 적절한 사용 판단을 자기 조절에 의해 해야 한다. 학습자는 자신의 도움으로 수학적 표현의 번역을 시도하고, 의식적으로 높은 수준의 수학적 언어를 사용하려 하고, 아이디어나 식의 관계를 통해 새로운 사실을 발견하거나 문제해결을 하는 창의성을 시도할 수 있다.

ZAD에서 학습자는 자신보다 학습이 진전되지 못한 동료를 돕고, 다른 동료들과의 아이디어를 종합하여 더 나은 구성을 하는 상호작용을 겪는다. 유능한 사람으로서 상대방의 요구에 대처하려 할 때 자신이 생각하지 못했던 점을 발견하고, 상대방을 이해시키기 위해 비계설정 등의 과정을 통하여 자신의 학습 내용을 점검할 수 있다. Chiu(1996)는 상호작용에서 더 능력 있는 사람이 타인에게 자신의 생각을 설명하고 이해시키려 하는 과정에서 자신의 이해를 정교히 하고 상대방의 필요에 적응함으로써 이득을 얻는다고 하였다. 상징의 규약이나 의미에 대한 근거를 조직하고, 수학적 내용 별로 언어의 적절한 사용과 해석에 대한 논리를 확

립하여 표현하고, 자신보다 낮은 수준의 언어로 번역하여 자신의 표현만을 고집하지 않으면서 상대방의 이해를 돕고, 언어의 기능과 수사적 기술을 사용하여 상대방을 설득시키고, 창의성을 발휘하는 지식 점유 활동이 ZAD에서 이루어질 수 있으며, 협동 그룹 내에서 동료와의 상호작용을 필요로 한다.

[그림 Ⅳ-1]의 모델은 학습자가 수학적 지식을 점유하는 과정을 IZPD, ZPP, ZAD로 세분화한 것이다. 이러한 세 가지 상호작용 영역은 수학 수업 내에서 지속적으로 상호작용될 수 있으며 이를 보여주기 위해 양방향의 화살표가 사용되어 있다. 교사에 의해 안내된 지식이 ZPP에서 실행되지 못할 때 다시 IZPD로 갈 수 있고 ZAD에서 자신의 생각을 분명히 표현하지 못할 때 IZPD나 ZPP로 갈 수 있다. 상호작용에서 받는 피드백에 의해 IZPD, ZPP, ZAD 간의 이동이 가능할 수 있다. 하지만 학습과정에서 변형이 이루어지더라도 IZPD는 필수적으로 실행되어야 한다.

이 모델은 후속적인 학습을 위한 연계성을 설명하기 위해 1차 점유과정과 2차 점유과정을 구분하였다. 즉 현재 학습에 임하고자 하는 학습자의 발달 수준은 1차 LAD이고 잠재적으로 도달할 수 있는 수준은 1차 잠재적 발달 수준이지만, 실제로 도달한 것은 2차 LAD이다. 1차 점유과정의 목표인 잠재적 수준에 도달하지 못했더라도 다음 단계의 학습(2차 점유과정)은 2차 LAD부터 계속 이루어진다. 그래서 2차 점유과정의 LAD는 1차 점유과정의 잠재적 수준보다 낮거나 같다. IZPD, ZPP, ZAD는 학습 과정에서 중복되어 일어나기도 한다. 교사나 동료와의 상호작용을 통해 학습하는 동안 혼자 쓰기를 할 수도 있는 것이다. 학습과정에서 IZPD를 넘어선 ZPP와 ZAD에서의 상호작용은 학습자 스스로의 조절과 비계를 가정하기 때문에 언어의 기능에서 의미화, 개인적 기능, 지적 기능, 상징기능이 발휘될 수 있는 장을 열어준다. 이런 상호작용 과정을 통해 수학 학습이 이루어지는 것이며 수학적 지식의 점유를 이끌 수 있다.

상호작용 모델 각각에서 본 연구가 추구하고자 한 수학적 지식의 점유와 언어의 기능, 의사소통방식, 학습자의 상호작용 대상을 <표 Ⅳ-1>과 같이 정리할 수 있다. 엄밀하게 적용되지는 않더라도 전통적인 수학 학습 지도에서 벗어나 의사소통이 강조되는 수학적 지식 점유를 꾀하는 학습 지도를 계획하는데 있어 본 연구의 내용은 적절한 제안을 하게 될 것이다.

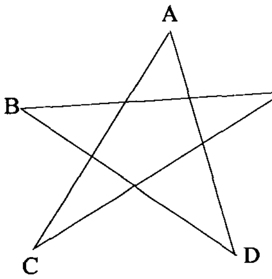
<표 Ⅳ-1> 상호작용과 수학적 지식의 점유

상호작용	점유 가능한 수학적 지식 기준	강조되는 언어의 기능	주요 의사소통 방식	상호작용 대상
IZPD	상징 조작규칙 수학적 대상 확인	신호화 사회적 의사소통 지시	구어	유능한 타인
	지식을 언어로 표현			
ZPP	상징 조작의 자동화 수학언어의 의미 해석	개인적 지적 상징	문어	자기 자신
	지식을 언어로 표현 표현간의 번역 창의성			
ZAD	수학언어의 규약이나 의미를 조직 수학언어의 해석이나 사용에 대한 논리 확립	의미화 지적 의사소통 상징	구어와 문어	무능한 타인
	상대방의 이해 도모 상대방을 설득 창의성 발휘			

Ⅴ. 수학적 지식 점유의 예시

Ⅳ장에서 제시된 모델을 통해 학습자가 수학적 지식을 점유하는 예를 보이고자 한다. 학습 주제는 논리와 발견술의 양상과 관련된 문제해결의 수학적 지식이며, 연구에 참여한 학생들은 의사소통 지도가 수학 학습에 미치는 영향에 대한 연구(김선희, 1998)에서 의사소통 지도를 받고 있던 실험반 학생들이다. 이 학생들은 수업 시간에는 협동 학습을, 수학 수업이 끝날 때는 그 날 배운 수학에 대한 일기를 쓰고, 성적이 상위권과 하위권인 학생들 간에 수학 펜팔을 시행하고 있었다. 학습 내용은 평면도형의 성질에서 내각의 크기의 합과 관련된 것이다. 본 장에서 연구대상이 된 두 학생은 성적이 각각 하위권과 상위권인 중학교 1학년 학생 A와 B이며, 이들이 다음 문제를 해결하면서 지식을 점유한 과정을 IZPD, ZPP, ZAD의 영역에서 설명하고자 한다.

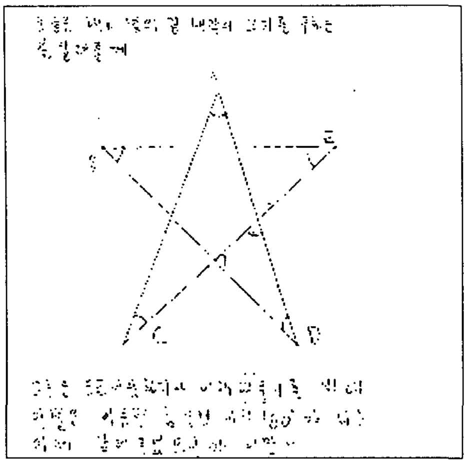
문제. 다음 그림에서 ∠A+∠B+∠C+∠D+∠E의 값을 구하여라.



이 문제를 해결하는 학생들의 LAD는 '삼각형의 내각의 합이 180°'라는 것과 '삼각형의 두 내각의 합은 그 내각과 이웃하지 않은 한 외각의 크기와 같다'라는 지식을 점유한 수준이다. 교과서에 제시된 이 문제를 학생들이 해결하기 위해 교사는 학급 전체 학생들과 해결 전략을 구상하기 시작하였다. 교사는 학생들의 LAD 지식을 상기시키는 발문을 하여 삼각형의 내각의 합이 문제해결의 지식에 적용될 수 있음을 암시하고, 학생들이 생각한 해결 전략을 발표하게 하였다. 학생들은 그림 안에 여러 개의 삼각형이 있음을 확인하였고 이러한 학생들의 방법론적 발견술 지식을 안내하고자 교사는 그 삼각형들을 각각 다른 색으로 표시하면서 문제에 있는 각들을 한데 모을 수 있을지 질문하였다. 학생들은 외각의 크기를 이용하여 문제의 각들이 하나의 삼각형의 내각이 될 수 있다고 하면서 180°라는 답을 얻었다. 이러한 교사와 학생들의 상호작용은 교사의 안내를 통해 학생들이 문제를 해결하게 된 전통적인 수업의 IZPD라 볼 수 있다.

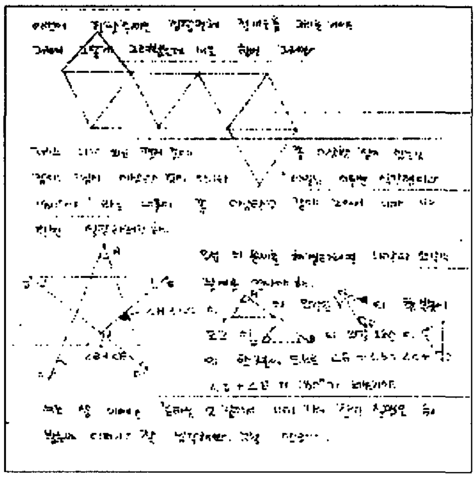
이후 교사는 학생들에게 공책에 혼자 힘으로 문제를 다시 풀어보게 하였다. 이로써 학생들은ZPP에 임하게 되었으며 IZPD에서 점유한 지식을 다시 되새겨보면서 답을 구할 수 있었다. 그러나 학생 A와 B 모두 문제 해결 과정을 생략하여 그림에 알 수 없는 표시를 하였고 정답만 적어 두었다. 문제해결에서 논리적이고 발견술적인 수학적 지식이 확고한지 알아보기 위해 교사는 ZAD의 상호작용에 임할 수 있도록, 하위권 학생들에게 학습한 문제를 친구에게 설명하는 글을 수학 펜팔의 주제로 쓰게 하였다. 이때 IZPD에서 교사가 파악하지 못한 학생 A의 오개념이 나타났다. 학생 A는 답이 180°인 것과 문제를 해결하는데 '삼각형의 외각은 이웃하지 않은 다른 두 내각의 크기의 합과 같다'는 사실이 적용됨은 알고 있었으나 실제 문제해결에 적용하여 설명하지 못했고 도형을 이

등변삼각형이라고 하는 옳지 않은 설명을 했다. 학생 A의 설명은 [그림 V-1]와 같다.



[그림 V-1] A학생의 문제해결

A학생의 편지를 받은 B학생은 수학 펜팔에 잘못된 부분을 지적하여 친구에게 다시 설명해 주었다. ZPP에서 문제의 해결 과정을 명확히 하지 않았던 B학생은 ZAD에서 지식을 점유하지 못한 A학생이 알 수 있는 형식으로 쉽게 설명을 하여 의사소통의 수학적 지식을 잘 활용하였다. 그 내용은 [그림 V-2]과 같다.



[그림 V-2] B학생의 문제해결

위의 학습 예시는 두 학생이 IZPD, ZPP, ZAD에서 문제를 해결한 것을 보여준다. 학생 A는 IZPD에서 교사의 설명을 듣고 문제를 해결할 수 있었으나 ZPP에서는 자신의 도움으로 문제를 해결하는데 IZPD의 결과만을 사용하였고 ZAD에서 오개념을 보여주었다. 자신이 알고 있는 지식을 수학언어를 사용하여 논리적으로 표현하지 못했다는 점에서, IZPD에서 교사의 안내로 학습한 지식이 A학생에게 완전히 점유되어 유지되지 못한 것이다. 이 학생은 ZPP에서 자신의 도움으로 문제를 해결할 기회를 얻었으나 자신의 말로 문제해결 과정을 서술하고 의사소통할 수 있는 언어를 사용하지 못하였고, 180°라는 것을 해답의 지시기능으로만 기억하고 있었다. 그러나 ZAD의 경험에 의해 다른 학생의 도움을 받을 수 있는 기회도 얻었고, 지식의 점유 상태를 교사에게 알려주어 이후 IZPD로 되돌아가 학습할 기회도 얻었다.

학생 B는 IZPD에서 교사의 안내를 받아 문제의 전략을 알아내고 ZPP에서 혼자 힘으로도 문제를 해결할 수 있었다. 그러나 ZPP에서는 문제 해결 과정을 보여주는 수학적 언어를 제대로 사용하지 못했고 수학적 논리나 발견술의 지식을 보여줄 수 없었다. 수학적 지식을 점유했다면 수학적 언어를 사용하여 논리적으로 설명하고 표현할 수 있어야 한다. 학생 B는 ZAD에서 무능한 동료를 도우려 할 때에야 자신의 생각을 잘 정리하여 이해할 수 있는 언어로 의사소통하였고, 상대방의 수준에 맞는 언어로 표현하고 교사의 필기를 다른 방식의 표현으로 번역하고, 동료의 어려움에 대해 자신이 도와주려는 학습 태도를 가져 자신의 지식을 확고히 하였다.

두 학생의 문제 해결 예시를 통해, 수학적 지식의 점유는 단지 교사의 안내에 의한 IZPD

만이 아니라 ZPP와 ZAD의 상호작용에 의해 완전해질 수 있음이 제안된다. ZPP에서 학생들이 지식을 점유한 것을 자세하게 보여주지는 못했지만, ZAD에서 학생 B는 잠재적 수준의 수학적 지식을 보여주었다. 창의적으로 문제를 새롭게 해결하거나 발전시키는 기회나 과정이 보이지는 않았으나 이 모델을 통해 학생들의 수학 학습이 단지 IZPD에만 머물 것이 아니라 학생들의 의사소통과 언어 이해, 사용이 강조되는 것으로 발전되는 가능성은 보여주었다.

Ⅵ. 결론 및 제언

학생들은 수학을 학습함으로써 수학적 지식을 점유해야 한다. 이것은 학생들의 능동적인 학습을 강조한 것으로 진정 수학적 지식을 학습했다면 그것을 사용하고 활용할 수 있어야 하며, 다른 사람에게 보여주고 설득력 있게 표현하고, 그를 바탕으로 더 많은 수학적 지식을 창출할 수 있어야 한다. 이를 위해 제시한 수학적 지식의 점유 과정 모델은, 수학 수업에서 학습자가 실제로 잠재적 발달 수준에 도달하기 위해서는 단순히 교사의 도움을 받는 것 뿐 아니라 학습자 자신의 도움을 받아 생각을 정리하고 문제를 해결하고 다른 사람에게도 도움을 줄 수 있는 과정이 필요하다는 생각에서 제시된 것이었으며 학생들의 예를 통해 입증되었다.

학습이 발달을 주도할 수 있다고 가정할 때 교사는 IZPD 창출을 위하여 비계를 설정하여 학생과 상호작용해야 하며, 전통적인 일제 수업은 IZPD의 상호작용만이 존재했다. 그러나 수학은 유능한 타인의 도움만을 받는 사회적 상호작용을 통해서 학습이 끝나는 것이 아니다. 지식의 점유는 개인내 정신 작용이며, 듣고 보고 읽는 행동이 아니라 생각하고 사고를 반성하고 체계적으로 표현하려고 노력하는 ZPP에서 얻어질 수 있다. 그리고 자신의 생각을 설명하는 ZAD에서도 더 확장된 학습을 하게 할 수 있다. 서로 유능한 타인이 될 수 있는 수학적 토론에서 학습자가 동료에게 설명하고 의견을 듣고 확장된 지식을 함께 창출할 수 있다면, 학생들은 자신의 생각을 말할 기회를 가짐으로써 개념을 정리할 수 있고 대립되는 의견을 조율하면서 수학을 점유할 수 있을 것이다.

수학언어는 수학적 지식이자 학습에서 의사소통과 사고를 가능하게 하는 도구로 지금까지 수학의 표현 수단으로서만 인식되었으나 언어의 적극적인 기능과 역할을 강조할 때 학습자의 능동적 활동이 중시된 상호작용을 제안할 수 있었다. 수학을 학습했다면 수학의 상징과 용어를 그 의미에 맞게 사용하고 규칙에 의해 적용할 수 있어야 하며, 따라서 수학언어가 수학적 지식에 포함되어야 한다. 수학언어 뿐 아니라 여타 수학적 지식의 점유에 대한 학습모델을 제안하기는 했으나 이 학습 모델이 모든 학습 상황을 설명하고 안내할 수는 없을 것이다. 앞으로 모델을 적용한 학습에서 수학적 지식 점유를 조사하는 연구가 진행되어야 하며, 이때의 지식 점유는 본 연구가 제시한 판단기준에 따를 수 있을 것이다.

본 연구는 수학의 언어적 측면을 강조하면서 수학적 언어를 포함한 지식을 점유하기 위해 여러 상호작용이 필요함을 보여주었다. 각 상호작용에는 항상 의사소통이 포함되며, 수학적 의사소통이 없이 수학 학습은 거의 불가능하다. 본 연구는 수학적 의사소통이 수학적 지식의 점유에 중요하다는 근거를 제시하였다. 학생들의 활동적 학습이 강조되면서 현재 의사소통의 중요성이 많이 부각되고 있고 의사소통은

수학적 지식 점유에도 큰 역할을 하고 있다. 학생들이 그룹에서 공부하고, 이해를 말로 표현하고, 다른 학생의 이해와 갈등을 겪으면서 타당화와 정당화의 토론에 참여하는 의사소통을 할 때 이해를 더 잘 할 것 같다(Sierpinska, 1994). 문제해결 뿐 아니라 개념학습, 알고리즘, 추론의 수학적 지식 점유에 있어서도 의사소통은 본 연구의 모델을 통해 적용될 수 있을 것이다. 그리고 교사는 학생들이 상호작용 과정에서 의사소통하는데 어려움이 없는지 확인하고, 교수 학습의 실행을 위해 상호작용과 의사소통을 어떻게 도입하고 실시할지 고려해볼 수 있을 것이다.

참고문헌

김선희(1998). **의사소통 지도가 수학 학습에 미치는 효과**. 이화여자대학교 교육대학원 석사학위논문.

김선희 · 이종희(2002). 수학기호와 그 의미에 대한 고찰 및 도입 방법. **학교수학, 4**(4), 539-554.

김선희 · 이종희(2003a). 기호학 관점에서 본 문자와 식. **학교수학, 5**(1), 59-76.

김선희 · 이종희(2003b). 중학생들의 수학적 언어 수준. **수학교육학 연구, 13**(2), 123-141.

김용익(1999). 수학 교육에서의 쓰기(writing)의 활용 방향. **학교수학, 1**(2), 589-603.

김지현(2000). **비고츠키의 지식점유과정과 언어매개기능에 관한 교육학적 고찰**. 서울대학교 대학원 교육학과 박사학위논문.

백순.(1999). Vygotsky의 ZPD 이론이 향상도 평가에 주는 시사. **교육평가연구, 12**(1), 191-215.

이희승(1996). **민중 엣센스 국어사전**(수정판). 민중서림.

채미애(2002). **수학적 의사소통을 강조한 수업의 효과**. 이화여자대학교 교육대학원 석사학위논문.

최인숙(1998). **수학 학습 과정에서 일지 쓰기(journal writing)의 효과에 관한 연구**. 이화여자대학교 교육대학원 석사학위논문.

Albert, L. R. (2000). Outside-in_ inside-out: seventh-grade students' mathematical thought processes. *Educational Studies in Mathematics, 41*, 109-141.

Berk, L. E., & Winsler, A. (1995). **어린이들의 학습에 비계설정-비고츠키와 유아교육.** (홍용희, 역). 서울: 창지사. (영어 원작은 1995년에 출판).

Chiu, M. M. (1996). *Building mathematical understanding during collaboration: students learning functions and graphs in an urban, public high school.* Doctorial dissertation. Univ. of California, Berkeley.

Furani, H. A. (2000). *Toddlers' symbolizing and its mathematical potential.* Doctorial dissertation of Michigan State University.

Gallimore, R., & Tharp, R. (1990). Teaching mind in society: teaching, schooling, and literate discourse. In L. C. Moll (Ed.), *Vygotsky and education: Instructional implications and applications of socio-historical psychology*(pp.175-205). Cambridge University Press.

Miller, L. D. (1993). Making the connection with language. *Arithmetic Teacher, 40*(6), 311-316.

Kitcher, P. (1984). *The nature of mathematical knowledge*. Oxford University Press.

NCTM. (1989). *Curriculum and Evaluation*

Standards for School Mathematics. VA: NCTM.

NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* VA: NCTM.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics.* Falmer Press.

Tchoshanov, M. A. (2001). Cognitive Mechanism of Constructive Activity Development. *Proceeding of the 25th Conference of the International Group for PME.* 4-249 - 4-256.

Trabant, J. (2001). **기호학의 전통과 경향**. (안정오, 역). 서울: 인간사랑. (독어 원작은 1996년에 출판).

Van Dormolen, J. (1986). Textual Analysis. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education*(pp.141-171). D. Reidel Publishing Company.

Vygotsky, L. S. (1994). **사회 속의 정신 -고등 심리 과정의 발달.** (조희숙 외, 역). 서울: 성원사. (영어 원작은 1978년에 출판).

Wertsch, J. V. (1995). **비고츠키-마음의 사회적 형성.** (한양대 사회인지발달연구모임, 역).서울: 정민사. (영어 원작은 1985년에 출판).

Learning Model for the Appropriation of Mathematical Knowledge

Kim, Sun Hee (Gwangjang Middle School)
Lee, Chong Hee (Ewha Womans University)

Mathematics students must appropriate their mathematical knowledge which has the definition and theorem of mathematics, algorithm, reasonable thought, heuristic, and mathematics language, and so on. That is, students should construct, use, and apply their own knowledge during learning. Appropriation of mathematical knowledge is practicable when mathematics language is in charge of many functions that Vygotsky cited. To reach the potential development level with mathematics language, students need the zones that they interact themselves and peers, as well as teacher. On that ground, this study presented the interactional zones of IZPD, ZPP, and ZAD, and modeled mathematics learning. By the case of 2 students, we found that ZPP and ZAD were necessary and important.

***keyword: mathematical knowledge, mathematics language, appropriation, interaction**