대한수학교육학회지 <학교수학> 제 5 권 제 3 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.5, No.3, 361-384. Sep 2003

문장제 해결에서 구조-표현을 강조한 학습의 교수학적 효과 분석1)

이 종 희* · 김 부 미**

본 연구는 연립일차방정식에 관한 문장제에서 IDEAL 문제 해결 모형을 바탕으로 "구조-표현"을 강조한 교수-학습을 실시하였을 때 학생들의 문제해결 과정을 탐구하였다. 연구 결과, 구조-표현을 강조한 학급의 학생들이 이를 강조하지 않은 학급의 학생들보다 문제해결 능력이 향상되었으며, 동치문제, 동형문제, 유사문제를 더 정확하게 구별하였다. 또한, 구조-표현을 강조한 학급의 학생들이 그렇지 않은 학급의 학생들보다 문맥에 대한 이해 및 불완전한 정보 추출에서의 오류, 미지수간의 내적 관계에 대한 수학적 기호표현으로의 불완전한 전이 오류, 적절하지 않은 방정식 생성 오류의 발생 빈도가 적었다. 그리고, IDEAL 문제 해결 모형의 문제의 확인 단계(I)와 문제의 정의 단계(D)에서 학생들이 문제 해결 계획을 수립하기 위해 문제를 읽고 이해하여 문제를 해결하는 과정을 중점적으로 분석한 결과, 직접 변환 모델과 구조 도식 모델이 나타났다.

I. 서론

역사적으로 Diophantus와 Viete의 경우에서 알 수 있듯이, 대수는 문제 해결의 맥락에서 시작하고 발달하여 왔으며, 학생들은 학교에서 대수를 배우는 동안 다양한 문제를 풀게 된다. 사실상 수학에서 문제는 다양한 구조에 의해 표현된다. 그리고 학생들은 문제를 인식했을 당시 문제의 표면적인 세부 정보로부터 실재적인 구조로 이동해 가며, 이 과정에서 학생들이 대수 문장제를 해결하려면 문제에 대한 분석을 해야 한다. 그러나, 학생들은 대수 문장제의 수학적 그리고 언어적 구조에 대한 이해의 부족으로 인하여 문제를 철저하게 분석하지 않고, 학생들 나름대로 다양하고 전형적인 방법과 기술만을 고집하거나 문제의 외형적인 정보에만 쉽게 의존함으로써 문장제를 해결하는데 여러 가지 오류를 저지르기도 한다. 이러한 대수 문장제 해결과정에서 겪는 어려움을 극복하고 문장제에 대한 이해 능력을 향상시켜 학생들이 보다 훌륭한 문제 해결자가 되도록 하기 위하여, 문장제 구조와 문제 해결의 관계에 대한 연구들이 수행되어 왔다.

Fuson & Willis(1989)는 특수한 문장제 유형과 각 유형별 문제 해결 모형을 학습함으로써 학생들은 문제 구조를 인식할 수 있으며, 탐구적인 문제 해결을 할 수 있다고 주장하였다. 그리고 Weaver와 Kintsch(1992)에 의하면, 문제의 기초적인 구조에 대한 간단한 지도를 받은

* 이화여자대학교(jonghee@ewha.ac.kr)
** 구월여자중학교(bumi71@ewha.ac.kr)
1) 이 논문은 한국 학술진흥재단의 지원(KRF-2002-030-B00051)에 의하여 이루어졌음.

학생들이 유사한 구조와 다른 구조들이 혼합되어 있는 대수 문장제를 풀 때, 그 문제에 대한 직접적인 풀이방법을 배우지 않았음에도 불구하고, 문제 해결 능력이 유의적으로 향상되었다. 또한 이종희, 김진화, 김선희(2003)는 중학교 1학년 학생들을 대상으로 문장제 해결에서 유추적 전이 효과를 연구하였는데, 모범풀이가 주어진 문제가 해결 절차를 수정해야 하는 유사문제[2]를 푸는데는 별로 도움이 되지 않고 동치문제[3] 해결에만 효과가 있었으며, 그림·도표의 유무와 참고 허용 여부에 관계없이 동치문제를 동형문제[4]보다 더 잘 해결하였다. 그리고 동형 문제를 해결한 학생들은 그림·도표가 주어진 경우나 참고가 허용된 경우에만 유사문제를 잘 해결하였다.

이상에서 살펴본바, 문장제 속의 구조를 추출할 수 있는 능력은 실생활과 관련된 문제 상황을 언어로 표현한 문장제를 접할 때 문제를 분명히 이해하고 그 문제를 해결할 수 있는 합리적인 방법을 계획하여 실행하도록 함으로써 강화될 수 있을 것이다. 또한 학생들이 문장제를 풀기 위해 시행착오를 반복하면서 문제의 구조를 파악하여 이전에 푼 문제와 같은 방법으로 해를 구하는 문제인지 또는 다른 방법으로 해를 구하는 문제인지를 구별하게 된다면 성공적으로 문제를 해결할 수 있을 것이다.

그러나, 이러한 연구는 학생들이 문제의 구조와 의미를 이해하여 문제를 해결하는 과정이 중요하다는 것은 인식하였지만 이를 실제 수업에 적용하는 방법에 대한 연구로는 충분하지 못한 것 같다. 또한 이종희, 김진화, 김선희(2003)의 연구에서 학습문제와 검사문제의 유사성에 따른 유추적 문제 해결이 문장제 해결 능력을 신장할 수 있었지만, 대부분의 학생들은 동형문제와 유사문제 해결에 어려움을 보였다. 이는 학생들이 해결한 문제에서 파악한 구조를 유추하여 여러 문제의 구조적 유사성을 식별하는데 어려움을 보였기 때문으로 볼 수 있다. 이러한 문제점을 극복하기 위해서는 학교 현장에서 보다 적극적인 노력을 할 필요가 있다. 이러한 취지에서 최근에 수업 프로그램의 개발에 대한 연구가 이루어지고 있는데, 이러한 연구들의 대부분은 Rudnitsky, Etheredge, Freeman, & Gilbert(1995), Hallel & Peled(2001)의 연구와 같이 유추적 전이의 측면에서 수업 시간에 구조를 파악한 뒤 동치인 구조를 갖는 문제를 학생들이 직접 만들어 보도록 하는 연구이다. 이 같은 연구가 시사하는 바는 크지만, 우리나라 학생들이 단순한 방정식 문제 풀이보다 더 복잡하다고 여기며 풀기 어려워하는 대수 문장제를 해결하는 능력을 향상시키기 위해서는 문제 해결과정에 대해 다양한 측면에서 조사할 필요가 있다.

따라서, 본 연구에서는 중학생들이 연립일차방정식을 활용한 문장제를 문제의 구조를 파악하여 표현함으로써 해결하는 과정을 중점적으로 탐구하려고 한다. 문장제 해결 과정을 설명할 때 주로 수학 교육에서 사용되는 모형은 Polya의 문제의 이해, 계획 수립, 계획의 실행, 반성의 4단계 모형을 들 수 있다. 이 때, 문제의 이해 단계에서는 문제의 주요 부분이나 조건에 주목하여 조망해 보거나 그림을 그리고 적절한 기호를 붙이기와 같은 사고 전략을 사용하며, 계획의 작성 단계에서는 관련된 지식

2) Reed(1987)는 문제를 동치(equivalent)문제, 유사(similar)문제, 동형(isomorphic)문제로 분류하였다. 유사문제는 이야기 맥락은 같지만 해결 절차는 약간의 수정이 필요한 문제이다.
3) 동치문제는 해결절차와 이야기 맥락이 모두 같은 문제이다.
4) 동형문제는 해결절차는 같으나 이야기 맥락은 상이한 문제이다.

을 동원하기, 유용한 패턴 찾아보기, 관련된 문제나 정리를 알아보기, 결론이 같거나 유사한 문제를 생각해보기 등의 사고 전략을 사용한다. 문제의 이해와 계획 수립의 단계에서 사용되는 이러한 전략들은 구조 습득을 강조한 학습과 무관하지는 않다. 그런데, 본 연구는 문장제 해결과정 중 특히 문제의 구조를 파악하고 도식으로 표현해보면서 문제에 적합한 모델이 될 때까지 계속 수정·보완해 가는 이해과정을 면밀히 분석하여 구조-표현을 강조한 학습의 교수학적 효과 검증에 중점을 두고 있기 때문에, Polya의 문제의 이해, 계획 수립, 실행, 반성의 4단계 문제해결 과정과 유사하나, 문제의 이해와 계획 수립 단계에서보다 문제의 구조를 강조하고 세분화하여 인지과학의 정보처리적 단계를 반영한 Bransford & Stein(1984)의 IDEAL 문제해결 학습[5](김영채, 1995, 재인용)의 단계에 따라 학생들에게 문장제를 풀도록 하였다.

본 연구에서는 구조-표현을 강조한 교수-학습을 실제 수업에 적용할 때, 중학생들의 연립일차방정식에 관한 문장제 해결 능력의 향상 여부뿐만 아니라, 학생들이 문제를 읽고 이해하여 문제 풀이 계획을 세우는 과정을 상세히 분석하여 그 교수학적 효과를 검증할 것이다. 또한 학생들이 구조-표현을 강조한 학습 후, 주어진 문제의 구조를 근거로 이전에 해결한 문제와 비교하여 유사문제, 동치문제, 동형문제를 구별하는데 유의적인 차이가 있는지를 조사하고자 한다. 이와 같은 문장제의 구조를 식별하는 일은 문장제의 성공적 해결을 위해 학생 스스로 문제의 수학적 구조에 알맞은 구조-표현을 할 때 근거가 되기 때문에 조사해 볼 가치가 있다. 본 연구의 연구문제는 다음과 같다.

1. 중학생들이 연립일차방정식에 관한 문장제를 해결할 때 "구조-표현"을 강조한 학습을 실제로 수업에 적용한 결과, 학생들의 문장제 해결 능력에서 유의적인 차이가 있는가? 또한 이 과정에서 학생들이 범하는 오류를 분석했을 때, 그 교수학적 효과는 어떠한가?
2. 학생들이 문장제 해결에 구조-표현 방법을 활용할 때, 해결 계획을 수립하기 위해 문제의 확인 단계(I)와 문제의 정의 단계(D)에서 어떤 과정을 행하는가?
3. 학생들이 구조-표현 방법을 강조한 문장제 해결 학습이후 주어진 문제의 구조를 파악하여 이전에 학습한 문장제와 비교하여 유사문제, 동치문제, 동형문제를 구별하는 능력은 유의적인 차이가 있는가? 또한 유사문제, 동형문제, 동치문제를 구별할 때 구조-표현 학습의 영향이 서로 다른 차이를 보이는가?

II. 이론적 배경

1. 문장제에서의 구조에 대한 연구

최근 수학 교육에서는 학생들이 문제 해결을 위해 필요한 수학적 아이디어가 연결되도록 하는 지식구성과정에 능동적으로 참여하는 학습을 강조하고 있다. 이러한 맥락에서 English & Halford(1995)는 학생들이 새로운 아이디어 사이의 적당한 연결을 하려고 할 때, 피상적이고 표면적인 상세한 내용이 아니라 아이디어 사이의 유사성에 근거한 구조적인 관계를 구성해야 한다고 하였다.

문장제에서의 구조에 대한 연구는 주로 덧셈과 뺄셈을 포함하는 계산 문장제(Riley & Greeno, 1988, Riley, Greeno & Heller, 1983, Kintch & Greeno, 1985, Stern 1993)와 곱셈과 나눗셈을 포함하고 있는 문장제(Kouba, 1989,

5) IDEAL 문제 해결 학습 단계는 II.이론적 배경의 '2. 문장제의 문제 해결'에서 설명된다.

Kouba & Franklin, 1993, Nesher, 1992)에서 아동들의 능력에 대한 실제적인 연구들이 많다(English, 1997b, 재인용). 계산 문장제에 대한 연구 결과, 수학 학습에서 도움이 되는 것은 관계적인 구조로, 특별한 용어를 이해하고 서술된 상황을 해석하여 적당한 연산을 찾아내고 답을 계산하는 능력이 있어야 한다는 것이다. 예를 들어, 아동의 수에 대한 이해는 아동이 적어도 주어진 문장제를 해결하는 동안 사용되는 개념들과 수에 대한 모든 본질적인 관계를 알고 있어야 한다. 특히, Kintch(1986)는 문제의 내용에 기초하여 식을 구성하는 것을 언급하였는데, Kintch의 텍스트 기반은 학생들이 문제를 읽고 이해하는 과정에서 구성하는 내용(원문)에 대한 정신 표상으로, 주로 주어진 문제의 언어적 형식화의 초기 분석으로부터 구성된다. 또한 Nesher(1992)는 문제 구조와 내용이 상호 의존적이기 때문에, 문제의 논리적 조건뿐만 아니라 의미론적 관계를 파악하여 수학적 모델로 변형하여 수학적 연산을 행하여 해를 구하는 것을 강조하였다(English, 1997b, 재인용).

이 과정에서, 많은 학생들은 문장제의 내용과 구조 사이의 관계를 이해하기 위해 구문론적 실마리나 키워드를 사용하여 문제 내용을 식으로 변형한다. 학생들은 문장제에서 "모두"는 덧셈을 사용해야 함을 암시하는 것으로, "덜"은 뺄셈을 사용해야 함을 암시하는 것으로, 또는 "배"는 나눗셈보다는 곱셈을 암시하는 것으로 인식한다. 그러나, 이 과정에서 오류를 범하기도 한다. 예를 들어 여행을 갈 때 학생들을 태우기 위해 필요한 버스의 수를 구하는 문제에서 해를 1.37대로 구하는 것과 같은 의미없는 답을 생각하게 된다(Silver, 1993; English, 1997b, 재인용). 이는 Cummins(1991)가 문장제 해결에서의 주된 어려움은 문제 유형에 대한 의미론적 관점을 중시하는 입장에서 언어적 발달 관점(linguistic development view)으로 문장제 해결을 살펴야 한다고 주장한 것과 유사하다. Cummins는 학생들이 문제의 의미론적 구조에 대한 암묵적인 이해를 해야 문제를 해결할 수 있지만 문장제에서 사용되는 언어적 형식에 대한 무경험으로 인하여 이러한 암묵적 이해와 대응되지 않아 문장제 해결을 어려워한다고 주장한다. 이는 문장제 해결을 위해 문제를 구조로 표현할 때, 명확한 용어로 간결하게 사용하는 것이 문제 해결에서 성취력 향상에 영향을 줄 수 있음을 시사한다. 그리고, Gholsen et al.(1997)은 구조-사상[6] 이론에 근거하여, 학습자가 문제를 해결하기 위해서 공통의 관계에서가 아니라 공통의 대상이나 대상 속성에 근거한 사상을 수행한다는 것을 발견했다. 이는 대상과 관계가 갈등상황이 될 때, 아동은 대상의 유사성에 근거하여 사상한다는 것을 보여주며, 문장제를 풀 때 학생들에게 대상의 유사성과 관계의 유사성이 갈등을 일으키지 않는 상황을 제공해야 함을 시사하는 것이다.

또한, 이해한 구조에 대한 여러 가지 표현은 지식의 표현뿐만 아니라 지식의 습득 절차와 산물에 대한 전반적인 측면에서 구문론적 구조의 이해와 의미론적 이해를 나타내는 것으로 볼 수 있다. Johnson(1983)은 학생들이 문장제를 다시 써보거나 그림으로 나타내어보도록 하는 것은 키워드와 관계에 초점을 맞추도록 할 수 있다고 보고하였다. Kliman & Richards(1992), Silverman, Winograd, & Strohauer(1992), Hodgin(1987), Stempien & Borasi(1985)의 연구 결과에 의하면 Johnson과 같은 구조 표현이 문장제 해결에 효과가 있다고 하였다(Rudnitsky et al.,

6) 구조-사상이라는 것은 학생들이 대상간의 공통 속성, 구조에 근거하여 사상을 한다는 것으로, 사상은 mapping을 뜻한다. 본 연구에서 사용된 '사상'이라는 용어는 모두 mapping을 말한다.

1995, 재인용). 그리고 Halford & English(1995)는 학생들이 문장제의 피상적이고 표면적인 내용이 아니라, 구조적인 성질을 추상화하는 것이 중요하다고 하였다. 이와 관련하여 English(1999)는 문장제 해결을 위한 학습에서 다음의 두 가지를 고려해야 한다고 하였다. 첫째, 학생들에게 구체적이거나 그림의 유추를 제시하기 전에 이것이 의도된 수학적 아이디어를 분명하게 묘사하고 있는지, 관계적인 명료성이 부족하지는 않은 지를 고려해야 한다. 둘째, 학습자가 문제의 구조를 알아내도록 격려해야 한다. 표면적인 특징 때문에 학습자는 중요한 관계적 아이디어를 알아내기 위해 표면적인 것 이상을 보지 못할 수 있다는 것이다. 그래서 학생들에게 문제 분류 활동을 하도록 하는 것이 도움이 된다고 하였다. 특히, 같은 종류의 문제라고 분류한 이유를 정당화하도록 하거나, 주어진 문제를 해결할 때 도움이 되는 이전에 배웠던 문제를 찾아보도록 하는 것이 도움이 된다고 하였다.

이상에서 살펴본 결과, 학생들이 문장제를 잘 해결하기 위해서는 문제의 구조를 명백하게 이해하고 분명하게 표현해야 한다. 이는 학생들이 일상 경험을 특성화한 복잡하고 다양한 연산이 혼합된 문장제를 잘 이해하고 해결할 수 있도록 수학 교수 학습에서 언어적 그리고 수학적 지식을 습득하도록 도와야 함을 의미한다. 또한, 이해한 내용을 압축하여 문제를 다시 써보거나 도식화하는 등의 표현은 학생들이 그 문제 속의 구조를 파악해야만 가능하다는 가정을 내포하고 있다. 다음 절에서는 문장제 해결을 위해 필요한 구조를 도식으로 표현하고 유사한 문제에서 공통의 구조를 찾아내며, 이러한 구조적 공통성을 바탕으로 문제를 해결하는 선행 연구를 살펴보려고 한다.

2. 문장제에서의 문제 해결

문장제에서 방정식을 만들어 푸는 문제 해결은 대수로 이르는 경로가 되며, 대수 학습의 중요한 방식 중 하나라고 할 수 있다. Bell (1996)는 대수 학습에서의 문제 해결은 두 가지 관점에서 협의의 문제 해결과 광의의 문제 해결로 분류하였다. 협의의 문제 해결은 방정식을 만들어 푸는 문제 해결과정이며, 광의의 문제 해결은 하나이상의 답을 구하고 좀 더 일반적인 해결책을 찾기 위해 문제를 확장시키고 발전시키는 것과 같은 열린 방식으로 문제를 탐구하는 것이다. 이 두 가지 관점에서 공통적으로 강조하는 점은 문장제의 구조를 파악하여 대수 기호로 표현하고 이를 정확하게 조작하며 일반화시킬 수 있어야 한다는 것이다. 이러한 문제 해결의 관점에서, 구조에 초점을 둔 문장제 해결 학습 지도에 대한 선행연구를 보다 자세히 살펴보려고 한다.

Mershall(1989)은 학생들에게 문장제 풀이에서 답 대신 구조에 초점을 맞추도록 하기 위해서 학생들에게 주어진 여러 문제들을 해결할 때 같은 방법으로 해결할 수 있는 문제와 다른 방법으로 해결할 수 있는 문제들을 구별하도록 했다. 이러한 교수 전략은 학생들이 해답 대신 문제의 구조에 집중하도록 강조하였으며, 이러한 구조의 교수는 학생들이 문제를 해결하도록 돕는 성공적인 방법으로 보고하였다. 또한, Rudnitsky, Etheredge, Freeman, & Gilbert(1995)는 10주 동안 401명의 10-11세의 아동을 대상으로 산술 문장제를 문제 만들기(problem posing)전략을 활용하여 구조를 파악한 뒤 문제를 만들어 써보도록 하는 구조-쓰기 교수 방법을 실시한 결과, 학생들의 문장제 해결 능력이 향상되었으며, 이 구조-쓰기 방법이 전통적인 발견술적

접근과 실제 기반 접근보다 기억 효과가 크다고 보고하였다. 이보다 앞서, Greeno(1982)는 학생들의 식을 간단히 하는 과정과 관련된 구조적 지식을 조사하고, 문제를 푸는 과정은 그 문제에서 관계들의 구조를 이해하는 것이라고 하면서, 학생들의 문장제 해결 절차에서 대수에 대한 구조적 특징들에 대한 지식의 결여로 인한 오류들이 나타난다고 하였다(Kieran, 1988, 재인용). 그리고 Freudenthal(1991)은 문장제를 풀 때, 문맥 안에서 수학적인 구조를 파악하고 적용할 수 있는 지를 판단하고 이를 활용하여 문제를 해결하는 전략을 학생들에게 가르치는 것은 수학자들의 문화에 적응시키는 좋은 방법이라고 하였다(Greer, 1993, 재인용). 또한, Hallel & Peled(2001)은 8학년과 11학년을 대상으로 문장제를 수업할 때 문제 사상, 도식 추상화, 유추 문제 구성의 순으로 조직하였다. 즉, 문제 도식의 추상화를 촉진시키기 위하여 문제 쌍에 있는 요소들을 비교해서 사상시켜 보고 문제 요소들을 일반화한 뒤 학생들 스스로 유추 문제를 만들도록 하였다. 그 결과, 학생들은 동형 문제들을 잘 식별할 수 있었으며 문제를 분류하는데 내용의 영향을 덜 받는 것으로 나타났다.

또한, Filloy & Rubio(1993)는 문장제 해결을 위한 MC(Method of Cartesian), MAIS[7], MAES[8]의 세 가지 방법의 활용 효과를 실험한 결과, MC가 논리적이고 정신적인 표상의 복잡성을 분석하여 구조를 파악할 때 보다 적합하다고 하였다. MC는 문장 속에 있는 몇 개의 요소들을 논리적으로 분석하여 미지수로 나타내고 이들 사이의 관계를 대수언어로 표현하여 방정식을 세우고 등식의 성질과 같은 대수적 방법을 이용하여 해석함으로써 해를 구하는 방법이다. Bendarz & Janvier(1996)에 의하면, MAES 방법은 문장제를 풀 때 학생들이 출발점 행동으로 문제에서 알려진 조건을 살피고 가공의 수를 사용하거나 문제 내의 산술적인 관계를 변형하여 풀어내는 산술적 추론 방법과 유사하다고 한다. 이처럼, 문장제를 해결하려면 산술적 문제 해결 방법에서 대수적 문제 해결 방법으로의 전이가 중요하기 때문에, Bendarz & Janvier(1996)는 학생들이 문제의 전체 구조를 빨리 감지하여 문제를 구체적으로 인식하도록 교수할 필요가 있다고 하였다. 또한, Rojano(1996)도 문장제를 풀 때 계산 과정에서 미지수를 사용하여 그 구조를 모형화 시키기 위해, 미지수를 기지의 수치로부터 문자로 표현하도록 이동하는 전-대수적 과정을 Spreedsheet를 사용하여 교수하면 문제 해결력을 향상시킬 수 있다고 하였다.

이밖에도 학생들의 문장제 해결과정에서 나타나는 오류에 대한 연구를 살펴보면, 주익한과 김영욱(1997)은 고등학교 학생들의 문장제에서의 실패 유형을 Polya의 문제 해결 과정과 Bloom의 교육 목표를 적용하여 분석한 결과, 학생들은 문제 해결 계획 단계에서는 지식 영역의 실패가 가장 많았으며, 실행의 단계에서는 지식, 이해, 적용 모두 비슷한 실패를 나타냈었고, 검토 단계에서는 지식 영역에서 실패

7) MAIS(Method of Successive Analytical Inferences)는 산술적 방법만을 사용하여 방정식 세우기의 여부와 관계없이 해를 구하기 위해 역연산으로 문제를 풀어내는 방법이다.

8) MAES(Analytical Method of Successive Explorationa)는 문장제의 해를 찾기 위한 가설적 상황을 설정하고 해일 것으로 예측되는 수치를 대입하여 나온 각각의 여러 상황과 그 때 수행된 연산을 비교하고 이를 토대로 주어진 문제에 대한 방정식을 세워 해를 구하는 방법이다.

가 많았다고 한다. 그리고, 이정은과 김원경 (1999)는 중학교 교과서에 제시된 일차방정식에 관한 문장제 해결 과정에서 구문에 대한 이해 부족, 적절하지 않은 식 세우기, 잘못된 예상과 확인, 계산 오류, 선행 지식의 부족의 5가지 오류를 분석하고, 문장제 해결 전략을 식 세우기, 예상과 확인, 그림 그리기, 표 만들기 전략으로 구분하였다. Threadgill-Sowder & Sowder(1982)도 그림으로 제시된 문장제가 언어로만 제시된 문장제보다 학생들의 오류 발생을 예방하는 데 효과적이라고 하였다.

본 연구에서 구조-표현을 강조한 문장제 해결 학습은 Bransford & Stein(1984)의 IDEAL 문제해결 학습(김영채, 1995, 재인용)의 단계를 기초로 진행되었다. IDEAL 문제해결 학습 단계는 문제의 확인(Identifying problems), 문제의 정의(Defining problems), 대안의 탐색(Exploring alternative approach), 계획의 실행(Acting on a plan), 그리고 효과의 확인(Looking at the effects)의 단계를 말한다. 이를 자세히 살펴보면, 문제의 확인 단계(I)는 문제를 발견하고 찾아내어 이를 강하게 인식하는 단계로, 제시된 잘 다듬어진 문제에 대한 해결방법을 구하는 것을 강조하기에 앞서, 학생들이 제시된 문제를 읽고 필요한 정보를 추출한다.

문제의 정의 단계(D)에서는 문제의 구조를 파악함으로써 주어진 문제를 어떻게 이해하고 표현할 것인지를 결정하고 이에 따른 해결 방법을 결정한다. 이 때 사용된 '문제의 정의'는 수학적 의미에서의 용어의 정의(Define)가 아니라, Newell & Simon (1972)이 사용한 의미로, 시초의 상태(initial sta- te), 목표 상태, 操作因(operator), 조작인의 제한(operator restrictions)의 4가지 요소를 기준으로 문제에 대한 정보를 구조화 하는 것을 말한다.

대안의 탐색단계(E)에서 문제 해결을 위해 파악한 구조에 기초하여 그 관계들을 기호체계를 사용한 방정식을 세우고 이를 분석해보고 대안적인 방법 등을 탐색해 보며, 계획의 실행 단계(A)에서는 확정한 방법을 실제로 수행해 보고 효과의 확인 단계(L)에서는 이로 인하여 얻은 효과를 확인하고 분석하는 단계로 문제가 성공적으로 해결되지 않았다면 피드백 된다.

이상에서 살펴본 선행 연구에 의하면, 문장제를 학생들이 이해하고 대수적 방법으로 해결할 수 있도록 주어진 문제의 구조를 파악하고 다양한 전략을 시도해 보는 교수-학습 방법에 대한 연구가 필요하다.

특히, 연립일차방정식의 문장제를 해결하는 데 나타나는 산술적 방법과 대수적 방법의 격차를 줄이는 여러 방법 중 앞서 언급한 대수적 방법인 MC 등을 사용하여 문제를 해결하는 능력을 고취시킬 필요가 있다.

이를 위해 본 연구에서는 중학교 2학년을 대상으로 연립일차방정식에 대한 구조-표현을 강조한 문장제 해결학습 후 문제의 이해 과정과 문제 해결력 향상 여부 및 오류를 분석하여 그 교수학적 효과를 탐구하려고 한다.

또한, 학생들이 문제 풀이 계획을 세우기 위해 문장제를 읽고 이해하는 과정을 상세히 분석하고, 주어진 문장제가 보기로 제시한 문제와 동치문제, 유사문제, 동형문제인지를 식별할 수 있는 지를 조사할 것이다. 학생들이 문장제를 구조로 표현하여 해결하도록 하는 방법은 새로운 것이 아닐 수 있지만, 구조화된 학습 과정의 진행에 기초한 구조-표현 방법은 문장제를 유형별로 해결하기 위한 명확한 교수 방법이 될 수 있을 것이다.

III. 연구 방법

1. 연구 방법 및 절차

본 연구에서는 중학교 2학년 여학생 160명을 대상으로 연립일차방정식에 관한 문장제를 중심으로 문장제 해결 과정을 탐구하고자, "구조-표현"을 강조하여 실제 수업을 7일 동안 4차시에 걸쳐 실시하였다. 이를 위하여 구조-표현을 강조한 학습을 두 학급의 80명을 대상으로 3차시동안 교과서에 제시된 문장제를 IDEAL 문제해결 학습 단계에 따라 실시하였고, 다른 2학급의 80명도 3차시 동안 같은 문장제를 풀었지만, 구조-표현 학습을 적용하지 않았다. 이 집단의 학생들은 문장제를 해결하기 위해 교과서에 제시된 단계인 미지수 정하기, 연립일차방정식 세우기, 방정식 풀기, 검토하기의 단계를 따랐다. 중간고사에 대한 두 집단의 평균 성적은 각각 66.80점, 66.18점으로 비슷하였고, 중간고사 시험 범위가 연립일차방정식에 대한 문장제 단원 바로 이전까지였기 때문에 별도의 사전 검사를 실시하지는 않았다. 그리고, 두 집단의 동질성을 확인하고자 중간 고사 성적으로 유의 수준 0.05에서 두 독립 표본에 대한 t 검증을 실시한 결과, t값이 1.18로 두 집단의 수학 성취면에서는 차이가 없는 동질 집단으로 검증되었다.

또한, 학생들이특히, 연구 문제 2에서 학생들이 문제를 읽고 구조를 파악하고 표현하여 문제 모델을 형성하여 문제를 어떻게 해결할 것인가를 결정해 가는 이해과정을 탐구하기 위해, 중간고사에서 비슷한 성취를 보인 학생 8명을 대상으로 문장제에 대한 사전 지식을 고려하고자 교수 실험[9]의 회고적 분석[10]방법을 사용하였다. 8명의 학생들은 중간고사 점수가 100점, 92점, 84점, 76점, 68점, 56점, 48점, 40점인 학생들 중 각 1명을 무선표집 하였으며, 1학년 때 배운 일차 방정식 문장제 중 거리-시간-속력 문제를 푸는 과정에 대한 반-구조화된 인터뷰(semy-structured interview)[11]를 녹화하여 회고적 분석을 실시하였다.

문장제 해결에 구조-표현 방법을 활용했을 때도, 문제를 읽고 이해하는 과정을 살펴보기 위해 8명 학생들의 매 차시활동을 중점적으로 비디오테이프로 녹화 · 분석하였다. 이 때 문제해결을 위한 구조-표현 과정이 명확하게 나타나지 않을 경우에는 학생들을 개별적으로 인터뷰하였다.

연립일차방정식 단원의 문장제를 구조 표현을 강조하여 학습한 후 마지막 4차시에는 구조 표현을 강조했을 때 문장제 해결의 효과를 검증하기 위한 사후 검사를 두 집단에 실시하였다. 사후 검사는 문장제 해결 능력 검사(Part A)와 문제 구조식별 검사(Part B)로 구분[12]하여

9) Cobb & Steffe(1983), Steffe(1991)에 의하면 교수 실험(teaching experiment)은 Leslie Steff가 고안하고 발전시킨 질적 연구 방법으로 현재의 "학생들의 수학"이 어떠한가와 수학을 가르치는-여기에서 가르친다는 의미는 전통적인 의미와 다르다-환경 하에서 학생이 어떻게 수학을 구성해 나아가는가를 알기 위해 고안된 하나의 역동적인 연구 방법이다. 이 때, 어느 두 집단을 비교하기보다는 보통 어느 학생의 계속적인 지식의 구성과정의 단계와 상황에 초점을 맞추며, 교사는 연구가, 관찰자, 교사의 역할을 동시에 수행한다.

10) Steffe, Thompson, & Glasersfeld(2000)에 의하면, 회고적 분석(retrospective analysis)은 비디오로 녹화하여 교수 실험 후에 다시 세밀하게 보면서 분석하여 학생들이 구성한 수학적 행동에 대한 더 깊은 이해를 할 수 있도록 하는 실험 교수 방법의 한 과정이다.

11) Fontana & Frey(1998)에 의하면, 반구조화된 인터뷰는 구조화된 인터뷰와 구조화되지 않은 인터뷰의 중간 형태로 면담자에게 이전에 설계된 일련의 질문들을 묻고 반응을 기록하되, 연구자와 면담자 사이에 질문 또는 주제에 대한 상호작용을 허락하여 면담자의 행동을 이해하려고 시도하는 인터뷰이다.

12) 두 검사지는 부록에 제시하였다.

각각 20분 동안 실시하였으며, 문장제 해결 능력 검사지는 5개의 문항으로, 문제 구조식별 검사지는 10개의 문항으로 구성되었다. 이 때, 문장제 해결 능력 검사는 교과서에 제시된 예제 수준의 문항을 사용하였다. 동치문제, 유사문제, 동형문제로 구분하는 판단력을 검증하기 위한 문제 구조식별 검사에서 사용된 문항은 다른 교과서의 연립일차방정식 문장제를 제시하여 본 연구에서 사용한 사후 검사지의 문항과 비교·분석하게 하였다. 이 때, 구조-표현을 강조한 학급과 그렇지 않은 학급의 학생들 모두 사후 검사를 실시하기 전에 동치·동형·유사 문제의 용어를 학습하여 알고 있었다. 또한 교과서 문제를 선택한 이유는 구조-표현 학습 방법을 실시하지 않은 학급과 학습 자료로 제시된 문제가 동일하여 교수-학습 방법의 차이 외의 다른 변인을 통제하기 위함이며, 교과서의 문제는 교육부의 심의를 거친 문제로 교육과정상의 성취 목표에 부합되는 것으로 검증되었다고 생각하였기 때문이다.

평가 방법은 문장제 해결 능력 검사의 경우 각 문항 당 4점, 3점, 2점, 1점, 0점의 배점이며, 그 기준은 다음의 <표 Ⅲ-1>과 같다. 이 때, 모든 문항을 완벽하게 푼 학생들은 구조-표현 학습을 실시한 집단에서는 43명, 실시하지 않은 집단에서는 20명이었다. 문장제 구조식별 능력 검사의 경우는 각 문항 당 2점, 1점, 0점으로 평가하였으며, 그 기준은 다음의 <표 Ⅲ-2>와 같다. 모든 문항을 완벽하게 식별한 학생들은 구조-표현 학습을 실시한 집단에서는 41명, 실시하지 않은 집단에서는 18명이었다.

2. 구조-표현을 강조한 학습 방법

본 연구에서 수업 전반에 걸쳐 문장제를 풀 때 "구조-표현"을 강조한 IDEAL 문제 해결 학습의 단계를 따른 학습 과정을 살펴보면 다음과 같다. 문제의 확인단계(I)에서, 학생들은 문제를 읽고 '이야기 맥락' 즉 내용 소재의 차원과 '해결 절차'라는 두 가지 차원에서 현재 제

<표 Ⅲ-1> 평가 척도와 평가 기준

평가 척도	평가 기준
4점	풀이 절차와 해를 모두 옳게 구한 경우
3점	해를 옳게 구했으나, 풀이 과정의 일부가 생략되거나 불완전한 경우
2점	x, y 중 하나의 해만 구했으나 풀이 절차가 옳은 경우
1점	방정식만 옳게 세운 경우
0점	풀이절차와 해를 모두 구하지 못한 경우

<표 Ⅲ-2> 평가 척도와 평가 기준

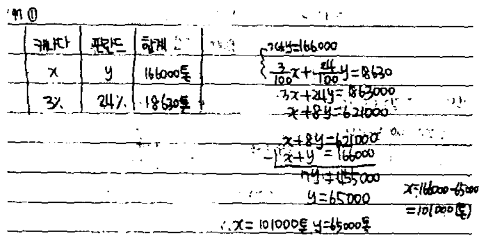
평가 척도	평가 기준
2점	구조식별을 옳게 하고 그 식별 근거를 옳게 서술한 경우
1점	구조식별은 옳게 행하였으나, 그 식별 근거가 생략되거나 불완전한 경우
0점	구조 식별과 식별 근거를 옳게 수행하지 못한 경우

시된 문제의 정보를 추출하여 문제를 확실하게 인식하였다. 문제의 정의단계(D)에서 학생들은 주어진 문제의 구조를 분석하는데, 학생들은 문제의 구조를 분석하기 위해 관계파악 및 해석, 수치 값들의 정보를 이용하여, 구해야 할 미지수를 설정하고 그 관계를 보기 위해 구조-표현 도식을 사용하였다.

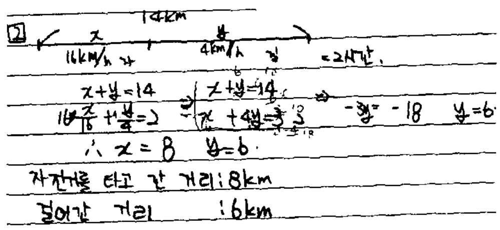
구조 표현 도식은 우선 문제를 읽고 그 문제의 유형을 분류한 후, 문제의 유형에 따라, 추출한 정보를 해석하여 관계나 값들을 간단한 수학적 기호로 표나 그림을 사용하여 도식으로 만드는 것이다. 구조-표현 학습을 강조한 수업 시간동안, 교사는 자석 색상 카드와 파워포인트 등의 시각적 자료를 사용하여 문제 속의 정보를 추출·배열하여 구조를 파악하여 방정식을 세워 문제를 풀게 하는 방법을 예제 문제를 풀 때 선보였고, 학생들은 노트에 구조-표현 도식을 만들어 문제의 구조를 파악하여 방정식을 세워 먼저 개별적으로 풀어본 다음, 같은 조의 다른 조원들과 담화를 통한 협동 학습을 하도록 하였다. 한 조의 인원은 4명으로 각 조는 중간 고사 성적을 바탕으로 상, 중, 하의 학생들이 고르게 분포하도록 조직되었다.

또한 수업시간에 교과서의 문제 외에도 다양한 문장제를 학습지로 제공하여 그 문제 유형을 분석하고 구조-표현 방법으로 해결하도록 하였다. 이 때 학생들은 문제의 유형을 파악하고자 문제를 읽으면서, 학생들은 구하려는 미지량을 형광펜으로 표시하여 나중에 미지수로 정해야 할 x, y의 구별을 쉽게 할 수 있도록 하였으며, 연립방정식으로 풀기 위해서 문맥에서 두 개로 구분되는 단어와 수치 정보 등에 밑줄을 긋도록 하였다. 상세하게 읽기가 끝난 뒤, 학생들은 구조-표현 도식을 만들어 최종적으로 문제의 구조를 정의하였다. 다음은 일차 방정식 문장제 중 비-계산 문제, 속도-거리 문제, 혼합물 문제의 각각에 대한 학생들이 수행한 구조 표현 도식의 한 예이다.

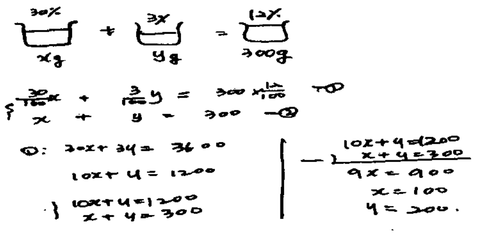
(문제) 1980년대 후반, 캐나다와 핀란드가 수출한 폐기물 중 유해 폐기물의 비율은 각각 3%와 24%이다. 두 나라에서 수출한 폐기물 전체의 양의 합이 166000톤이고 이 중 유해 폐기물의 양이 18630톤일 때, 캐나다와 핀란드가 수출한 폐기물의 양을 각각 구하여라.



(문제) 재진이가 집에서 유원지까지 자전거를 타고 가려고 출발하였다. 자전거를 타고 시속 16Km로 달리다가 도중에 자전거가 고장나서 시속 4Km로 걸어서 갔더니 집에서 유원지까지 14Km를 가는 데 모두 2시간이 걸렸다. 자전거를 타고 간 거리와 걸어서 간 거리는 각각 몇 Km인가?

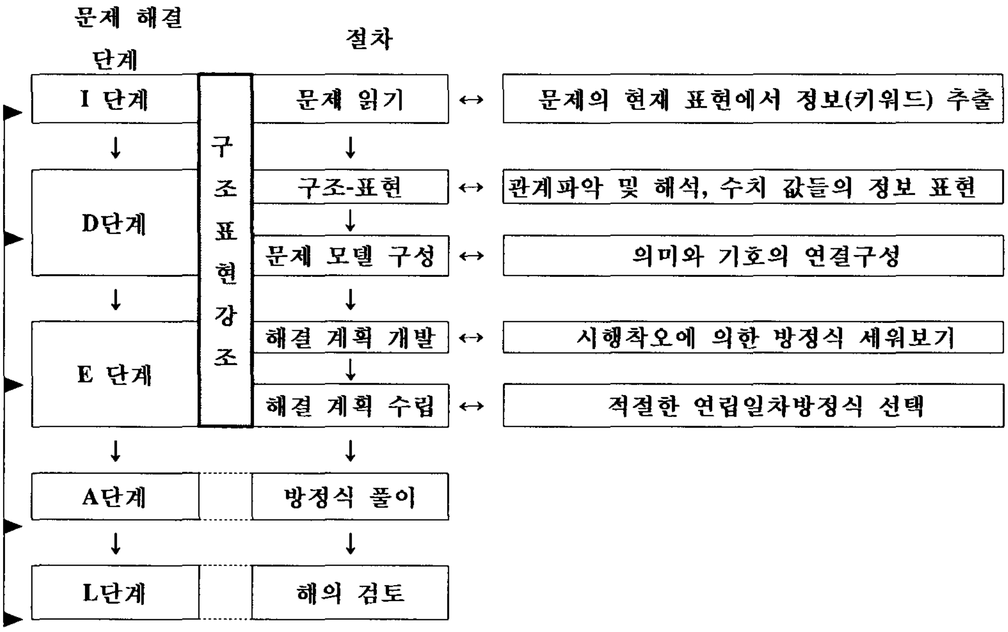


(문제)30%의 과산화수소수 용액과 3%의 과산화수소용액을 섞어서 12%의 과산화수소수 용액 300g을 만들려고 한다. 이 때, 각각의 과산화수소수 용액을 몇 g씩 섞어야 하는가?



대안의 탐색단계(E)에서는 학생들은 구조-표현 도식을 이용하여 명료해진 문제에 적절한 방정식을 세운다. 계획의 실행단계(A)에서는 세운 방정식을 풀어 해를 구하고, 효과의 확인단계(L)에서는 구한 해가 문제의 뜻에 적합한 지를 검토한다. 또한 학생들이 해결한 문제가 이전에 풀었던 예제와 비교하여 동치문제, 유사문제, 동형문제인지를 확인한다.

문제에 대한 구조-표현을 강조한 문제 해결 학습 모형은 다음과 같다.



[그림 Ⅲ-1] 문제에 대한 구조-표현을 강조한 문제 해결 모형

Ⅳ. 연구결과

1. 구조-표현 학습 방법의 효과

먼저, 연립일차방정식에 관한 문장제를 해결할 때 구조-표현을 강조한 학습을 실제 수업에 적용한 후, 학생들의 문장제 해결 능력에 차이가 있는지를 사후 검사(Part A)의 결과로 검증한 결과는 다음과 같다. 구조-표현 학습을 실시한 두 학급과 그렇지 않은 두 학급으로 양분된 두 집단에 대하여 SPSS/PC+ 프로그램을 사용하여 두 독립 표본에 대한 t 분포 검정을 유의수준 .05에서 실시한 결과는 <표 Ⅳ-1>과 같다.

<표 Ⅳ-1>에 의하면 유의 수준 .05에서 구조-표현 학습을 수행한 학급과 이를 수행하지 않은 학급은 유의적인 차이가 있으며, 이는 두 집단의 학업 성적의 평균을 근거로 할 때, 구조-표현을 강조한 학급의 학생들은 연립일차방정식에 대한 문장제 해결 능력이 향상되었다고 해석할 수 있다.

다음으로, 문장제를 해결하는 과정에서 구조 - 표현 학습을 실시한 학급과 실시하지 않은 학급에서 나타난 학생들의 오류를 중심으로 구조-표현 방법을 사용하였을 때, 문제 해결 능력 향상에 대한 교수학적 효과를 보다 상세히 분석하였다. 이 때, 구조- 표현 학습을 실시한 학급과 실시하지 않은 학급에서 나타난 문장제해결에서의 오류를 문제의 조건에 주목하여 그림을 그리고 적절한 기호를 붙이거나 정의를 되짚어 보기, 유사한 문제의 풀이 방법을 활용하기, 핵심적인 개념의 사용 여부 점검하기, 다른 풀이 방법을 활용해보기, 예상과 확인하기 등과 같은 Polya의 문제 해결 단계에서 사용되는 전략을 기준으로 다섯 유형의 범주로 분류하였다.

첫째, 문맥에 대한 이해 및 불완전한 정보 추출오류는 문장제의 구조를 파악하기 이전에 문장의 구문을 잘못 이해하여 방정식 풀이에 필요한 정보를 완벽하게 추출하지 못하는 오류이다. 예를 들어, 거리-시간-속력 문제 중 'A가 60m를 달리는 동안 B는 40m를 달린다고 할 때'와 같은 문장에서 A와 B의 속력의 비율이 3 : 2로 이해하지 못하고 속력의 차이가 20이라고 이해하는 경우를 말한다.

둘째, 미지수간의 내적 관계에 대한 수학적 기호표현으로의 불완전한 전이 오류는 문제의 구조를 제대로 파악하지 못하여 문맥에서 구하려는 양을 미지수로 설정한 후 그들 사이의 내적 관계를 식을 세우기 전에 도식이나 그림을 사용하여 수학적 기호로 불완전하게 표현하는 오류이다. 예를 들어, '어느 음반 회사에서 새로 제작한 두 개의 음악 CD의 원가에 10%의 이익을 붙여 정가를 정하였더니 정가의 합이 24200원이었다. 두 음악 CD의 원가의 차이가 2000원일 때 각각의 원가를 구하여라'와 같은 문제에서 각 CD의 원가를 미지수 x, y로 설정한 뒤 정가가 원가의 10%만큼의 이익을 붙여 정한다는 것을 1.1x, 1.1y로 표현하지 못하고 0.9x, 0.9y로 표현하는 오류이다.

셋째, 적절하지 않은 방정식 생성 오류는 문

<표 Ⅳ-1> 구조-표현 학습 방법에 대한 t 분포 검정 결과

학급 \ 검사	사후검사 학급평균	**t 분포검정값**
구조-표현 학습을 실시한 학급(80명)	17.2점	**2.625**
구조-표현 학습을 실시하지 않은 학급(80명)	12.5점	

제를 풀기 위한 정확한 식을 세우지 못하는 것으로 구조를 파악하였다 하더라도 이를 수학적으로 정확하게 표현하지 못하는 경우와 문제 유형에 관계없이 연립방정식이 아닌 미지수 한 개의 일차방정식만을 고집하는 경우를 말한다.

앞서 예를 든 'A가 60m를 달리는 동안 B는 40m를 달린다고 할 때'에서 A와 B의 관계를 $B=\frac{60}{40}A$로 세우는 경우와 미지수를 x, y 두 개로 설정하는 것이 문제의 관계를 설정할 때 편리한데도 불구하고 음악 CD의 정가 문제에서 두 CD의 원가를 x, 2000-x로 한 개의 미지수만을 사용하여 정한 뒤 0.1x+0.1 (2000-x)=24200으로 잘못된 식을 세우는 경우가 이에 해당한다.

넷째, 계산 오류는 기술적인 오류로 문제 풀이 과정에서 산술적인 수행이나 등식의 성질을 잘못 사용하는 등의 계산상의 오류이다. 소금물의 농도나 거리-시간- 속력 문제에서 세운 방정식이 분수이거나 백분율로 환산한 방정식 또는 비율을 계산하여 식을 세울 때 수치가 소수로 표현될 때 계산 과정에서 실수를 하는 경우가 대부분이었다.

마지막으로, 선행 지식의 부족 오류는 필요한 수학적 사실을 잘 모르고 있는 경우로 문제 해결 시 잘못된 지식을 바탕으로 수행하는 오류이다. 예를 들어, 거리-속력-시간 문제를 풀 때 학생들은 시간$=\frac{거리}{속력}$이라는 공식과 여러 가지 동치인 식, 거리단위에 따라 시간의 단위가 변화한다는 것과 같은 사전 지식의 결여 또는 잘못 적용하는 경우를 말한다.

구조-표현 학습을 실시한 학급에서는 모든 문항을 완벽하게 푼 43명의 학생들을 제외한 37명의 학생들을 대상으로, 구조-표현 학습을 실시하지 않은 학급에서는 모든 문항을 완벽하게 푼 20명의 학생들을 제외한 후, 오류의 분포 양상은 다음과 같다. <표 Ⅳ-2>에서 구조-표현 학습을 실시한 학급과 실시하지 않은 학급에서의 문장제 해결에서의 오류 유형을 살펴

<표 Ⅳ-2> 문장제 유형에 따른 오류 유형 및 빈도 비율

유형 / 오류	길이-넓이 문제		혼합물 문제		거리-속력-시간 문제		자연수 문제		비 계산 문제	
	구조표현		구조표현		구조표현		구조표현		구조표현	
	실시 (37명)	미실시 (60명)	실시 (37명)	미실시 (60명)	실시 (37명)	미실시 (60명)	실시 (37명)	미실시 (60명)	실시 (37명)	미실시 (60명)
문맥에 대한 이해 및 불완전한 정보 추출	14% (5명)	20% (12명)	14% (5명)	20% (12명)	9% (3명)	15% (9명)	14% (5명)	15% (9명)	19% (7명)	17% (10명)
미지수간의 내적 관계에 대한 수학적 기호표현으로의 불완전한 전이	30% (11명)	45% (27명)	27% (10명)	40% (24명)	27% (10명)	33% (20명)	35% (13명)	47% (28명)	22% (8명)	28% (17명)
적절하지 않은 방정식 생성 오류	19% (7명)	28% (17명)	24% (9명)	23% (14명)	27% (10명)	35% (21명)	16% (6명)	28% (17명)	24% (9명)	45% (27명)
계산 오류	38% (14명)	7% (4명)	24% (9명)	7% (4명)	27% (10명)	7% (4명)	35% (13명)	10% (6명)	35% (13명)	10% (6명)
선행 지식의 부족	0%	0%	11% (4명)	10% (6명)	11% (4명)	10% (6명)	0%	0%	0%	0%

보면, 문맥에 대한 이해 및 불완전한 정보 추출 오류와 미지수간의 내적 관계에 대한 수학적 기호표현으로의 불완전한 전이 오류, 적절한 방정식을 생성하지 못하는 오류가 구조-표현 학습을 실시한 학급이 실시하지 않은 학급보다 적었다. 즉, 구조-표현 학습을 실시하지 않은 학급에서 학생들은 문맥을 이해하지 못하고 구조를 살피는 능력이 떨어져 문제를 풀기 시작한 처음부터 오류를 범하기 때문에 문제 해결 계획을 제대로 수립하지 못한다. 이로 인하여 문제 풀이 과정에서 일어나는 계산상의 오류의 백분율은 구조-표현 학습을 실시한 학급보다는 상대적으로 적었다. 반면에, 구조-표현 학습 방법을 활용한 학생들 중 오류를 범한 학생들은 미지수간의 내적 관계에 대한 수학적 기호표현으로의 불완전한 전이 오류와 적절한 방정식을 생성하지 못하는 오류가 다른 오류에 비해 상대적으로 큰 비중을 차지하기는 하였으나, 이를 실시하지 않은 학급에 비해서 구조 파악 능력은 높은 것으로 나타났고, 방정식을 세우는 과정과 계산상의 실수로 문제를 옳게 풀지 못하는 경우가 많았다. 이러한 사실은 학급 평균에서도 유의적인 차이가 나타난 것과 관련이 있을 것으로 생각된다.

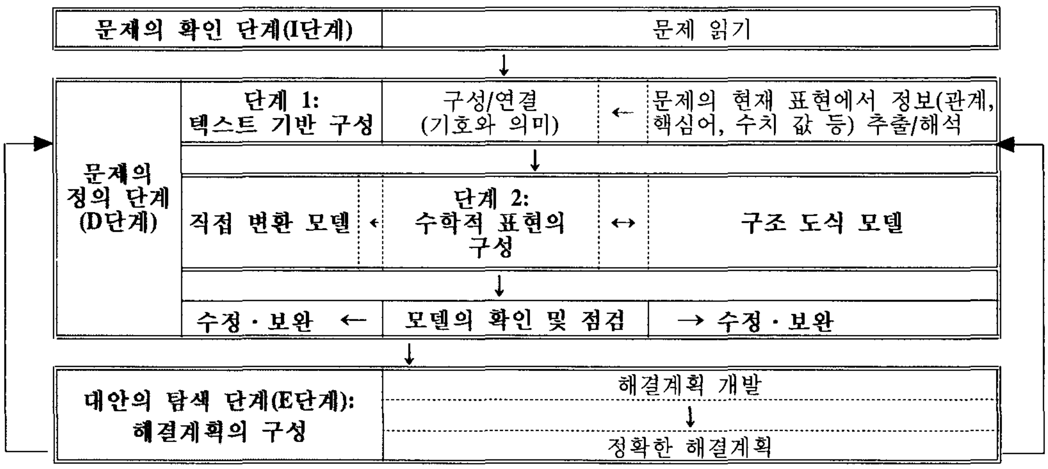
2. 문장제 이해 과정 분석

학생들이 문장제를 해결 계획을 수립하기 위해, 문제를 읽고 구조를 파악하여 표현하여 문제의 모델을 구성하여 문제를 어떻게 해결할 것인가를 결정하는 이해과정은 앞서 살펴 본 IDEAL 문제 해결 단계 중 문제의 확인 단계와 문제의 정의 단계와 관련이 된다. 구조-표현 방법을 활용했을 때, 문장제에 대한 수학적 표현을 구성하여 해결 계획을 수립해 가는 과정을 8명 학생들의 활동을 녹화한 비디오테이프를 분석한 결과를 중심으로 살펴보았다. 먼저 구조-표현을 강조한 학습을 실시하기 전에 학생들의 문장제에 대한 선행 지식을 알아보기 위해 실시한 반구조화된 인터뷰 결과, 100점인 학생은 문제를 읽자마자 식을 세워 풀려고 하였고, 84점, 92점을 맞은 학생들은 문장제를 풀 때 비교적 구조를 파악하여 그림을 그려보면서 식을 세워 해결하였으나, 시간이 비교적 오래 걸리며 교사의 도움이 필요하였다. 76점과 68점을 맞은 학생들은 문제의 의미를 파악하고 키워드를 찾아 식을 세우려고 하였지만 교사의 도움에도 불구하고 실패하였다. 56점이하의 학생들은 문제의 키워드를 제대로 파악하지 못하

여 교사가 도움을 주었지만 핵심 요소를 추출하지 못하였다. 구조-표현을 강조한 학습 후, 학생들이 문장제 해결 계획을 수립하기 위해 IDEAL 단계의 I와 D단계에서 수행한 구조 표현 과정을 보다 상세히 분석하면 다음과 같다.

문제 해결 단계는 우선 문제의 유형과 구조를 인식하여 문제를 수학적 기호로 써서 표현한다. 이 때, 이전에 풀어봤던 문제와 유사한지를 살펴 구조를 파악하는데 이는 유추와도 관련된다. 학생들이 문장제를 읽고 이해하는 과정을 분석하면 직접 변환 모델과 구조 도식 모델로 분류가 가능하였다. 직접 변환 모델은 학생들이 문제를 읽고 텍스트에 근거하여 바로 키워드나 핵심 정보를 추출하여 식을 세워 문제 해결 계획을 수립하는 모델이며, 구조 도식 모델은 문제에서 정보를 추출하고 해석하여 기호와 의미를 연결하여 그 구조를 표현 및 수정・보완하여 적합한 식을 세우는 다소 변형 가능한 모델이다. 대안의 탐색 단계는 해결 계획의 구성 단계로 결국 내적인 수학적 균형이 잡힌 표현으로 번역하고 이 내적 표현을 해석하여 관계를 완벽하게 파악한 과정을 말한다.

다음은 학생들이 문제 정의 단계에서 모델을 만드는 과정을 보다 자세히 단계별로 분석하여 설명한 것이다. 제 1단계는 텍스트 기반 구성 단계로 문제 속의 관계, 핵심어, 수치 값 등 정보들을 문제의 텍스트에서 구해서 기호와 의미의 연결 및 관계를 구성하는 단계로 문제 해결을 위한 정신 모델에 접근하는 단계이다. 제 2단계는 수학적 표현의 구성단계로 문제 해결에서의 목표를 안내하고 표현을 구성하는 단계로, 앞서 살펴 본 두 가지 모델이 성립할 수 있다. 학생 8명이 사용한 모델은 아래의 <표 Ⅳ-3>와 같다.



[그림 Ⅳ-1] 문장제의 이해 과정 분석

<표 Ⅳ-3>직접 변환 모델과 구조 도식 모델의 양상

중간고사점수		100(점)	92(점)	84(점)	76(점)	68(점)	56(점)	48(점)	40(점)
선택	직접 변환 모델	○					○	○	○
	구조 도식 모델		○	○	○	○			
사후검사 점수		20(점)	20(점)	20(점)	19(점)	18(점)	16(점)	12(점)	8(점)

이 때, 직접 변환 모델을 사용한 학생들은 성취도가 아주 높은 학생들 중 일부 학생들과 성취도가 56점이하의 중하위권 학생들로 분류가 가능하였다.

이중 비교적 성취도가 낮은 편인 학생들은 텍스트에 근거하여 문제에서 직접 수와 키워드를 뽑아 식을 세우기 때문에, 숨겨진 정보를 생략하거나 부족하게 얻을 수 있어 문맥에 대한 이해 및 불완전한 정보 추출오류, 미지수간의 내적 관계에 대한 수학적 기호표현으로의 불완전한 전이로 인한 오류가 구조 도식 모델을 사용한 학생들에 비해 많이 범하였다. 이 경우, 문제를 완전하게 이해하고 해결 계획을 정확하게 수립하기 위해서는 여러 번의 피드백, 즉 모형에서의 순환 루트가 필요하였다. 그리고 성취도가 높은 학생들은 구조-표현을 강조한 학습을 실시하기 전에 행한 인터뷰에서 교사의 도움이 필요했었던 점과 비교할 때 구조-표현을 강조한 학습을 통하여 구조를 파악하는 능력이 자동화되는 수준으로까지 향상되어 직접 식을 세워 문제를 해결하는 것으로 추측할 수 있다. 반면, 구조 도식 모델을 사용한 학생들은 문제에서 정보를 추출하고 해석하여 이해하는 단계에서 자신의 모델을 수정하거나 구성하려는 시도를 하기 때문에, 수학적 대상과 중심적인 수학적 표현간의 연결을 시도하여 주어진 문장제에 적합한 방정식을 더 빠르고 정확하게 세울 수 있었다.

다음의 예는 중간 정도의 학업 성취도를 보이는 학생 두 명이 같은 문제에 대하여 직접 변환 모델과 구조 도식 모델을 사용하여 해결하는 과정에 대한 인터뷰의 일부분이며, 밑줄이 쳐진 부분이 두 모델의 차이가 나타난 부분이다.

<표 Ⅳ-4> 직접 변환 모델과 구조 도식 모델의 예

문제	둘레의 길이가 400m인 트랙을 따라 주원이와 승원이는 각자 일정한 속력으로 자전거를 타고 있다. 승원이가 60m를 달리는 동안 주원이는 40m를 달린다고 할 때, 두 사람이 같은 지점에서 동시에 출발하여 서로 반대 방향으로 달리면 20초만에 다시 만난다고 한다. 두 사람은 자전거로 1초에 각각 몇 m를 달리는가?	
문제해결과정	**직접 변환 모델의 경우**	**구조 도식 모델의 경우**
	학생은 승원이의 속력을 x, 주원이의 속력을 y로 정한 후 20x+20y=400, x-y=20라고 식을 세웠다. T: 왜 이런 식을 세웠지? S: [20x+20y=400을 가리키면서 확신에 찬 목소리로] 이건 20초동안 서로 반대방향으로 돌다가 만나기 때문에 주원이, 승원이의 거리는 둘레랑 같아서요. T: 그리고? S: [x-y=20을 가리키면서] 승원이가 60이고 주원이가 40이니까 둘 사이의 차이가 20이라서요. T: 문제에서 속력이 60과 40이라는 힌트가 어디에 있는지 말해줄래? S: 음..네..여기요[문제의 "승원이가 60m를 달리는 동안 주원이는 40m를 달린다고 할 때," 부분을 가리키면서]	학생은 승원이의 속력을 x, 주원이의 속력을 y로 정하고 20x+20y=400, $x=\frac{60}{40}y$라고 식을 세웠다. T: 왜 이런 식을 세웠지? S: [20x+20y=400을 가리키면서] 첫 번째 식은 20초 동안 서로 반대방향으로 움직여 만나면 호수의 둘레와 같아지니까요. T: [$x=\frac{60}{40}y$의 식을 가리키면서] 이식은? S: 그건 좀 어려웠어요..처음에는 차이가 20인가했는데, 도식을 그려보니까 거리의 차이가 20이여 서 0 바꿨어요. 승원이가 속력 x로 일정 시간 달린 거리가 60이니까, x×시간=60이에요[종이 위에 이 식을 쓰면서]. 그리고 주원이는 속력 y로 승원이가 달린 시간하고 똑같은 시간만큼 가니까 y×시간이 40이에요 [역시 종이 위에 쓰면서] 맞죠? T:그래서? S:그러면 같은 시간동안의 거리가 60, 40이고 속력이 x, y니까 x: y= 60:40으로 해서 구했어요.

3. 동치 · 동형 · 유사문제의 식별

학생들이 구조-표현 방법을 강조한 문장제 해결 학습 이후, 학생들의 문제 구조 파악 능력에 차이가 있는지를 사후 검사 결과로 두 독립 표본에 대한 t 분포 검정을 유의 수준 .05에서 검증한 결과는 다음의 <표 Ⅳ-5>과 같다.

<표 Ⅳ-5>에 의하면, 유의 수준 .05에서 구조-표현 학습을 수행한 학급과 이를 행하지 않은 학급은 문제 구조식별 능력에 유의적인 차이가 있다고 해석될 수 있다. 또한, 문장제의 구조식별 능력의 변화를 살펴본 결과, 동치 문제, 동형 문제, 유사 문제의 구별의 정확도는 구조-표현 학습을 한 학급의 경우, 정답률이 상당히 높았다. 특히, 동형 문제를 식별할 때, 구조-표현 학습을 실시하지 않은 학급보다 그 식별 능력이 뛰어나 다양한 문장제에 대한 적용 능력이 뛰어났다. 이에 대한 자세한 양상은 다음의 <표 Ⅳ-6>과 같다.

Ⅴ. 결론 및 제언

본 연구에서는 중학교 2학년 학생들을 대상으로 연립일차방정식에 관한 문장체 해결 능력의 향상을 위해 "구조-표현"을 강조한 학습의 교수학적 효과를 검증하고, 그 과정에서 학생들의 오류를 살펴보았으며 문제 해결 계획을 수립하기 위해 문제를 이해하는 과정을 상세히 분석하였다. 그리고, 학생들이 주어진 문장제가 보기로 제시한 문제와 동치문제, 유사문제, 동형문제인지를 식별할 수 있는 지를 조사하였다. 본 연구의 결과는 다음과 같다.

첫째, 학생들은 구조-표현 방법을 강조한 학습을 실시한 결과 구조-표현 학습을 행하지 않은 학급의 학생들보다 수월하게 문제를 해결하였으며 연립일차방정식을 활용한 문장제 해결 능력도 향상되었다. 그리고, 연립일차방정식에 관한 문장제 해결 과정에서 학생들에게서 빈번하게 나타나는 오류의 범주는 문맥에 대한 이

<표 Ⅳ-5> 문제의 구조식별 능력에 대한 t 분포 검정 결과

검사 / 학급	사후검사 학급평균	**t 분포검정값**
구조-표현 학습을 실시한 학급(80명)	15.8점	**2.862**
구조-표현 학습을 실시하지 않은 학급(80명)	11.2점	

<표 Ⅳ-6> 문제 유형 식별 비율

학습 유형 / **문제유형**		**동치문제**		**유사문제**		**동형문제**	
		옳은 식별	부정확한 식별	옳은 식별	부정확한 식별	옳은 식별	부정확한 식별
구조표현	**실시한 학급 (80명)**	88%	12%	66%	34%	**70%**	30%
	실시하지 않은 학급 (80명)	60%	40%	45%	55%	**32%**	68%

해 및 불완전한 정보 추출오류, 미지수간의 내적 관계에 대한 수학적 기호표현으로의 불완전한 전이 오류, 적절하지 않은 방정식 생성 오류, 계산 오류, 선행 지식의 부족 오류로 구분되었다. 이 때, 구조-표현 학습을 수행한 학급이 이를 실시하지 않은 학급보다 문맥에 대한 이해 및 불완전한 정보 추출오류, 미지수간의 내적 관계에 대한 수학적 기호표현으로의 불완전한 전이 오류, 적절하지 않은 방정식 생성 오류의 발생 빈도가 적었다. 이는 문제를 구조 도식 모델을 사용하여 정확한 식을 세워 해결하였기 때문으로 해석할 수 있다.

둘째, 학생들이 문장제 해결에서 구조-표현 방법을 강조한 수업을 했을 때, 문제를 이해하는 과정을 그림 2와 같이 세분화하여 분석한 결과, 학생들은 문제를 읽고 텍스트에 근거하여 바로 키워드나 핵심 정보를 추출하여 식을 세우는 직접 변환 모델과 문제에서 정보를 추출하고 해석하여 기호와 의미를 연결하여 그 구조를 표현하여 식을 세우는 구조 도식 모델을 사용하였다. 직접 변환 모델은 학생들이 문제를 읽고 텍스트에 근거하여 바로 키워드나 핵심 정보를 추출하여 식을 세워 문제 해결 계획을 수립하는 모델이며, 구조 도식 모델은 문제에서 정보를 추출하고 해석하여 기호와 의미를 연결하여 그 구조를 표현 및 수정 · 보완하면서 적합한 식을 세우는 다소 변형 가능한 모델이다.

셋째, 구조-표현 학습을 강조한 수업을 받은 학급의 학생들이 그렇지 않은 학급보다 동치 문제, 동형 문제, 유사 문제를 더 정확하게 구별하였다. 특히, 동형 문제를 식별할 때 구조-표현 학습을 수행한 학생들이 그렇지 않은 학급 학생들보다 문장제 구조의 파악 능력이 뛰어나기 때문에, 새롭고 다양한 문장제를 해결하려고 할 때 문제의 구조를 더 정확히 식별하여 이전에 비슷한 문제를 해결했던 방법을 유추하여 적용함으로써 문제를 해결하는 능력이 향상될 수 있을 것으로 기대된다.

최근의 TIMSS, PISA의 결과에서 우리나라 학생들은 수학의 지적 성취는 우수한 편이지만, 비정형 문제보다 단순한 문제에서 주로 점수를 획득했다(박정 외, 2002)는 사실에 비추어 볼 때, 비록 본 연구의 대상이 된 160명의 학생들이 우리나라 전체 학생을 대표했다고는 할 수 없지만, 대수 문장제에 대한 구조-표현을 강조한 학습의 교수학적 효과와 학생들의 문장제 이해 과정 모델에 대한 본 연구의 결과가 시사하는 바가 크다. 우리나라 학생들이 어려워하는 대수 문장제의 해결 능력을 향상시키기 위해서는 문제를 이해하고 해결 계획을 수립하는 단계에서 문제 내의 언어적 기능과 수학적 기능을 충분히 연습할 수 있도록 문제의 구조를 파악하고 이를 도식으로 표현하는 교수-학습 방법을 적극 활용하여야할 것이다. 또한, 교사는 문장제의 구조-표현 학습을 활용하여 학생들이 문제를 이해하고 통합할 수 있는 능력을 함양시키고, 문제 유형별로 유용한 전략을 많이 활용할 수 있도록 학생들을 안내하고 도우며 격려를 아끼지 말아야 할 것이다. 이 과정에서 교사가 문제의 유형별로 학생들이 빈번하게 행하는 오류를 파악하고 이를 극복할 수 있도록 돕는 노력이 선행되어야 할 것이다.

마지막으로 후속 연구를 위한 몇 가지 제안을 하려고 한다. 본 연구는 문장제를 해결할 때 구조를 파악하고 이를 표현하는 것을 강조함으로써 Polya의 문제 해결 단계의 문제 이해 단계와 계획 수립 단계를 보다 심층적으로 탐구하였지만, 풀이 결과와 논증 과정을 점검하고 다른 풀이 방법을 알아보거나 이를 활용할 수 있는 다른 문제를 찾아보는 것과 같은 전략을 행하는 반성의 단계에 대한 구체적인 후속

연구가 필요할 것이다. 또한, 구조-표현을 강조한 문장제 해결 능력을 향상하기 위한 방법 외에도 Polya가 강조한 발견적 사고 전략 중 거꾸로 연구하기, 단순화 해보기, 자료를 변형하여 보조 문제를 작성하여 문제를 부분적으로 해결해보기 등을 활용한 문제 해결 방법에 대한 구체적인 연구도 필요하다.

참고문헌

김영채(1995). **사고와 문제해결심리학**. 박영사.

박정 · 채선희 · 김명숙 · 최석진(2002). **우리나라 학생들의 국제적 학력 수준은 어떠한가.** 한국 교육과정 평가원 홍보자료.

이정은 · 김원경(1999). 중학생들의 일차 방정식에 관한 문장제 해결 전략 및 오류 분석. **수학교육 38**(1) 77-85.

이종희 · 김진화 · 김선희(2003). 중학생을 대상으로 한 대수 문장제 해결에서의 유추적 전이. **수학교육 42**(3), (In press).

주익한 · 김영욱(1997). 문장제 풀이의 실패 유형 분류와 그 경향의 연구. **수학교육 36**(2), 161-169.

Bell, A. (1996). Problem-solving approaches to algebra: Two aspects. In N. Bendarz et al (Eds.), *Approaches to Algebra*(pp.151-166). Kluwer Academic Publishers.

Bendarz, N. & Janvier (1996). Emergence and development of algebra as problem-solving tool: continuities and discontinuities with arithmetic. In N. Bendarz et al (Eds.), *Approaches to Algebra*(pp.115-136). Kluwer Academic Publishers.

Cobb, P. & Steffe, L. P. (1983). The constructivist researcher as teacher and model builder. *Journal for Research in Mathematics Education 14*(2), 83-94.

Cummins, D. D. (1991). Children's interpretations of arithmetic word problems. *Cognition and Instruction, 8,* 261-289.

English, L. D. (1997a). Analogies, metaphors, and images: Vehicle for mathematical reasoning. In L. D. English (Ed.), *Mathematical reasoning-analogies, metaphors, and images*(pp.3-18). Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

English, L. D. (1997b). Children's reasoning process in classifying and solving computational word problems. In L. D. English (Ed.), *Mathematical reasoning-analogies, metaphors, and images*(pp.3-18). Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

English, L. D. (1999). Reasoning by analogy: a fundamental process in children's mathematical learning. In L. V. Steef & F. R. Curcio (Eds.), *Developing mathematical reasoning in grades K-12. 1999 yearbook*(pp. 37-44). Reston, Virginia: NCTM.

Filloy, E., & Rubio, G. (1993). Didactic models, cognition, and competence in the solution of arithmetic and algebra word problems. *Proceedings of the 17th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 1.* 154-161.

Fontana, A. & Frey, J. H. (1998). Interviewing: The art of science. In Norman K. Denzin & Yvonna S. Lincoln (Eds.), *Collecting and Interpreting Qualitative Materials*(pp.47-78). SAGE publications, London.

Fuson, K. C., & Willis, G. B. (1989). Second graders' use of schematic drawings in solving addition and subtraction word problems. *Journal of educational Psycholoy, 81*, 514-520.

Gholson, B., Smither, D., Buhrman, A., Duncan, M. K., & Pierce, K. A .(1997). Children development of analogical problem-solving skill, In L. D. English (Ed.), *Mathematical reasoning-analogies, metaphors, and images*(pp.149-189). Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Greer, B. (1993). The mathematical modelling perspective on word problems. *Proceedings of the 17th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 3.* 138-145.

Hallel, E., & Peled, I.(2001). Composing analogical word problem to promote structure analysis in solving algebra word problem. In M. Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th conference of the international group for the psychology of mathematics education, 3*, 105-112

Halford, G. S., & English, L. D. (1995). *Mathematics Education*, Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Kieran, C. (1988). Learning the structure of algebraic expressions and equations. *Proceedings of the 12th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1*, 433-440.

Kintch, W. (1986). Learning from text. *Cognition and Instruction, 3*(2), 87-108.

Steffe, L. P., Thompson, P. W., & Glasersfeld, E. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In Anthony E. Kelly & Richard A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education*(pp.267-306), Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, New Jersey.

Mershall, S. (1989). Assessing problem solving: a short-term remedy and a long-term solution. in R. Charles & E. Silver (Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving*(pp.159- 177). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Reed, S. K. (1987). A structure-mapping model for word problems. *Journal of Educational Psychology: Learning, Memory, and Cognition, 13*, 124-139.

Rojano, T. (1996). Developing algebraic aspects of problem solving within a spreadsheet environment. In N. Bendarz et al (Eds.), *Approaches to Algebra*(pp.137-146). Kluwer Academic Publishers.

Rudnitsky, A., Etheredge, S., Freeman, S. J., & Gilbert, T. (1995). Learning to solve addition and subtraction word problems through a structure-plus-writing approach. *Journal for Research in Mathematics Education 26*(5), 467-486.

Steffe, L. P. (1991). The constructivist teaching experiment: Illustrations and implications. In E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education*(pp.177-194). Kluwer Academic Publishers.

Threadgill-Sowder, J. & Sowder, L. (1982). Drawn versus verbal formats for mathematical story problems, *Journal for Research in Mathematics Education 13*(5), 324-331.

Weaver, C. A., III, & Kintsch, W. (1992). Enhancing students's comprehension of the conceptual structure of algebra word problems. *Journal of Educational Psychology, 84*, 419-428.

Analysis of Effect of Learning to Solve Word Problems through a Structure-Representation Instruction.

Lee, Chong Hee (Ewha womans university)
Kim, Bu Mi (Guwal Girls' Middle School)

The purpose of this study was to investigate students' problem solving process based on the model of IDEAL if they learn to solve word problems of simultaneous linear equations through structure-representation instruction. The problem solving model of IDEAL is followed by stages; identifying problems(I), defining problems(D), exploring alternative approaches(E), acting on a plan(A). 160 second-grade students of middle schools participated in a study was classified into those of (a) a control group receiving no explicit instruction of structure-representation in word problem solving, and (b) a group receiving structure-representation instruction followed by IDEAL. As a result of this study, a structure-representation instruction improved word-problem solving performance and the students taught by the structure-representation approach discriminate more sharply equivalent problem, isomorphic problem and similar problem than the students of a control group. Also, students of the group instructed by structure-representation approach have less errors in understanding contexts and using data, in transferring mathematical symbol from internal learning relation of word problem and in setting up an equation than the students of a control group. Especially, this study shows that the model of direct transformation and the model of structure-schema in students' problem solving process of I and D stages.

*** key words : problem solving, mathematical structure, mathematical error, word problems, the problem solving model of IDEAL**

I. 부록

1. 사후 검사지

PART A. 문제 해결 능력 검사지

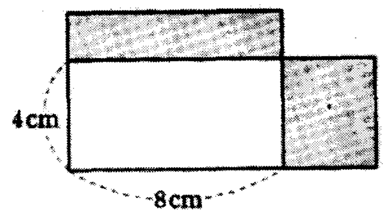
(문제 1) 유람선을 타는 요금은 대인, 소인으로 구별되어 있는데 수담이네 가족의 요금은 3100원, 시내네 가족의 요금은 5000원이었다. 수담이네 가족은 어른 2명, 어린이 1명, 시내네 가족은 어른 3명 어린이 2명이다. 대인 요금과 소인 요금이 얼마인가?

(문제 2) 폭이 1Km인 강을 수영을 하여 건너는데 분속 80m로 자유형을 하다가 분속 60m로 평영을 하여 15분이 걸렸다. 자유형으로 수영한 거리와 평영으로 수영한 거리는 몇 m인가?

(문제 3) 농도가 다른 두 소금물 A, B를 각각 30g과 20g을 섞었더니 6%의 소금물이 되었다. 또, 소금물 A, B를 각각 20g과 30g 섞었더니 8%인 소금물이 되었다. 이 때, 소금물 A, B의 농도를 각각 구하여라.

(문제 4) 두 자리의 자연수가 있다. 이 수는 각 자리의 숫자의 합의 4배이고, 십의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자를 서로 바꾸면 바꾼 수는 처음 수보다 27이 크다고 한다. 처음의 자연수를 구하여라.

(문제 5) 가로의 길이가 8cm, 세로의 길이가 4cm인 직사각형이 있다. 이 직사각형의 가로와 세로의 길이를 늘여서 왼쪽 그림과 같은 모양의 도형을 만들었다. 가로로 늘인 길이는 세로로 늘인 길이보다 2cm 더 길고, 새로 만든 도형의 넓이는 원래 직사각형의 넓이의 2배라고 한다. 가로와 세로의 길이는 각각 얼마나 늘였는가?



PART B. 문제 구조식별 능력 검사지

※ 다음의 문제들을 읽고, PART A에서 풀었던 문제들과 비교하여 동치 문제, 유사 문제, 동형문제 중 하나를 택하여 V표하고 선택 근거를 쓰시오.

(문제 1) 재진이가 집에서 유원지까지 자전거를 타고 가려고 출발하였다. 자전거를 타고 시속 16km로 달리다가 도중에 자전거가 고장나서 시속 4km로 걸어서 갔더니 집에서 유원지까지 14km를 가는데 모두 2시간이 걸렸다. 자전거를 타고 간 거리와 걸어간 거리를 구하여라.

PART A의 몇 번 문항과 비교하였는가?
동치 문제 유사 문제 동형 문제

선택 근거 :

(문제 2) 해변에서 비치파라솔을 빌려주는데 맑은 날에는 8000원, 흐리거나 비가 오는 날에는 3000원을 받는다고 한다. 비치파라솔 대여 업자가 한 주에 46000원을 벌었다면 그 주에는 맑은 날은 몇 일이었는지 구하여라.

PART A의 몇 번 문항과 비교하였는가?
동치 문제 유사 문제 동형 문제

선택 근거:

(문제 3) 6%의 매실 과즙과 15%의 매실 과즙을 섞어서 12%의 매실 과즙 1500g을 만들려고 한다. 이 때, 각각의 매실 과즙을 몇 g씩 섞어야 하는가?

PART A의 몇 번 문항과 비교하였는가?
동치 문제 유사 문제 동형 문제

선택 근거 :

(문제 4) 두 수의 합이 32인 두 정수가 있다. 큰 정수를 작은 정수로 나누면 몫이 5이고 나머지가 2일 때, 큰 정수를 구하여라.

PART A의 몇 번 문항과 비교하였는가?
동치 문제 유사 문제 동형 문제

선택 근거 :

(문제 5) 성빈이와 민규는 둘레의 길이가 1km인 호수를 동시에 같은 방향으로 돌면 10분 후에 만나고, 반대 방향으로 돌면 2분 후에 만난다고 한다. 성빈이의 속력이 민규의 속력보다 빠르다고 할 때, 성빈이와 민규의 속력을 각각 구하여라.

PART A의 몇 번 문항과 비교하였는가?
동치 문제 유사 문제 동형 문제

선택 근거 :

(문제 6) 작년에 어떤 학교의 전체 학생 수는 870명이었다. 올해에는 남학생이 5% 줄고, 여학생이 4% 줄어서 전체 학생 수는 830명이 되었다. 작년의 남학생 수와 여학생 수를 각각 구하여라.

PART A의 몇 번 문항과 비교하였는가?
동치 문제 유사 문제 동형 문제

선택 근거 :

(문제 7) 농도가 다른 두 소금물 A, B가 있다. A를 200g, B를 400g 섞으면 농도가 7%인 소금물이 되고, A를 400g, B를 200g 섞으면 농

도가 6%인 소금물이 될 때, 소금물 A와 B의 농도를 각각 구하여라.

PART A의 몇 번 문항과 비교하였는가?

동치 문제 유사 문제 동형 문제

선택 근거 :

(문제 8) 가로의 길이가 세로의 길이보다 10m 더 긴 직사각형 모양의 토지가 있다. 이 토지의 둘레의 길이가 180m일 때, 가로와 세로의 길이는 각각 몇 m인가?

PART A의 몇 번 문항과 비교하였는가?

동치 문제 유사 문제 동형 문제

선택 근거 :

(문제 9) 지영이는 지난 6월 한 달 동안 매일 우유 한 개씩을 배달시켜 마신 후 12800원을 지불하였다. 그런데 우유 한 개의 가격이 6월 초에는 400원이었는데 중간에 450원으로 올랐다고 한다. 우유 값이 오른 것은 며칠인가?

PART A의 몇 번 문항과 비교하였는가?

동치 문제 유사 문제 동형 문제

선택 근거 :

(문제 10) 종이와 유리가 재활용되는 비율의 자료를 구하다 보니 스위스는 그 비율의 합이 138%이고, 우리나라는 88%이었다. 또, 스위스의 종이, 유리 재활용 비율은 멕시코의 종이, 유리 재활용 비율의 각각 27배, 21배이고 우리나라의 종이, 유리 재활용 비율은 멕시코의 종이, 유리 재활용 비율의 각각 22배, 11배이었다. 우리나라의 종이, 유리의 재활용 비율을 각각 구하여라.

PART A의 몇 번 문항과 비교하였는가?

동치 문제 유사 문제 동형 문제

선택 근거 :