

압축이득을 이용한 최적 웨이블릿 필터의 설계

이 임 건^{*}

요 약

본 논문에서는 압축 효율을 최적화 하는 웨이블릿 필터의 설계 알고리즘을 제안하였다. 제안한 알고리즘은 고정 양자화기를 이용하는 영상 부호화 응용에서 압축 방법에 상관없이 웨이블릿 변환 영역에서 각 대역의 에너지를 가장 불균등하게 압축하는 필터를 설계함으로써 전체적인 부호화 효율을 높일 수 있도록 하였다. 직교와 쌍직교 필터에서의 목적함수는 웨이블릿 변환 계층에 맞도록 확장시켜 각 계층별로 최적 필터 계수를 얻었으며 최적화 과정의 제한조건을 완화하여 압축이득을 최대화시킬 수 있도록 하였다. 제안한 방법으로 설계한 필터는 실험 결과 기존의 필터와 비교하여 에너지 압축이득이 향상되었음을 알 수 있었다.

Optimal Wavelet Filter Design Using Coding Gain

Imgeun Lee^{*}

ABSTRACT

In this paper, a new wavelet filter design algorithm is proposed which optimizes energy compaction of transformed coefficients. The filter, designed by the proposed algorithm enhances the coding gain of the system with fixed quantizer by most unevenly distributed energy in transform domain. The coding gain function was extended to obtain the optimal filter coefficients in each stage. The experiments showed that the filter designed by proposed method outperforms conventional filters in energy compaction rate.

Key words: 웨이블릿 필터, 압축율, 최적화

1. 서 론

공학 분야에서 웨이블릿 이론의 모태인 대역분할 압축 알고리즘에서는 분해와 복원 필터를 QMF (Quadrature Mirror Filter) बैं크 구조로 하여 인접 대역과의 간섭 신호(aliasing signal)를 제거시킨다. 대역분할 압축은 QMF를 바탕으로 거의 완벽하게 원신호를 복원시킬 수 있으며 이를 위한 QMF의 여러 설계 방법이 제안되었다[1]. 표준 QMF बैं크가 준 완전복원(Pseudo Perfect Reconstruction)을 만족시키기 위한 각 필터들간의 관계는 Esteban에 의해 정리되었으며, 유한 길이를 갖는 필터에 대해서 정지대역(stop band)의 감쇄를 최대화시키는 동시에 복원 오차를 최소화하는 최적 필터 설계 알고리즘도 개발

되었다[2]. 비록 Vaidyanathan이 완전복원을 만족시키는 FIR 필터는 실용성이 없는 Haar 기저를 제외하고는 존재하지 않는다는 것을 증명하였으나[3] QMF를 이용하면 수치적인 최적화 연산을 통해 선형 위상을 만족시키고 수학적으로 엄격한 의미에서의 완전복원은 아니지만 준 완전복원으로서 오차 한계를 수용할 정도의 필터는 설계 가능하다. 수학적으로 완벽한 의미의 완전복원은 연구를 거듭하여 Smith와 Barnwell은 반대역(half band) FIR 필터의 주파수 대역분할 방법을 이용하여 완벽하게 원신호를 복원해내는 CQF(Conjugate Quadrature Filter)의 설계 알고리즘을 제안하였다[4]. 직교 필터와 CQF는 모두 완전복원을 만족시키지만 설계된 필터가 선형 위상을 갖지 못하게 된다.

직교 기저의 최적화는 Akansu등에 의해 에너지 압축비를 최적화 하는 방법이 제안되었으나[5] 쌍직

접수일 : 2003년 2월 17일, 완료일 : 2003년 4월 15일

^{*} 정회원, 동의대학교 영화영상공학과 전임강사

교 필터인 경우 분해된 신호와 원신호의 에너지가 보존이 되지 않으므로 쌍직교 필터의 최적화 과정에 도입하는 것은 불가능하다. Jiro는 대역분할 부호화에 이용되는 필터를 최적화하기 위해 PCM(Pulse Code Modulation)에 대한 압축이득식을 제안하고 이를 최적화 시키는 알고리즘을 제안하였다[6].

웨이브렛 필터뱅크 구조는 분해와 복원의 과정에서 필터가 완전복원 조건을 만족하면 출력에서의 신호의 손실은 발생하지 않는다. 그러나 대부분의 실제 영상 압축 시스템은 신호의 양자화 과정을 포함하고 있으므로 출력 신호는 왜곡된다. 양자화 과정에서 발생하는 왜곡은 필터의 특성에 의해 영향을 받으므로 전체적인 시스템에서의 최적 필터를 구하는 것이 타당하다. Majani는 양자화 과정을 포함한 시스템에서 최적화 조건을 구하고 주파수 영역에서의 전달함수를 인수분해(frequency factorization)하여 필터 계수를 얻어내는 방법을 제안하였다[7]. Majani의 필터는 z 영역에서 제로의 갯수를 최대로 하는 필터이나 필터의 탭이 길어지면 전달함수의 인수분해가 어려워지고 다수의 필터 후보군에서 최적을 선택하는 과정이 따라야 하는 단점이 있다. Uzun은 필터 설계는 양자화 오차를 이득과 첨가 노이즈 모델(gain with additive noise model)로 설정하고 양자화된 신호에 보상 인자를 도입하여 최적화시키는 알고리즘을 제안하였다[8]. 이 방법은 양자화기가 포함된 2대역 분할 구조의 시스템에서 에러를 유발하는 성분들을 수식으로 도출하고 이를 최적화하여 필터계수를 구한다.

본 논문에서는 고정 양자화기의 사용을 가정하고 양자화 과정이 포함된 전체 시스템에서 압축이득을 최대화시키는 웨이브렛 필터를 설계하기 위한 목적함수(object function)를 제안한다. 이 목적함수는 기존의 2대역 분할 구조에 대한 에너지 압축 이득식을 웨이브렛 변환 구조에서의 다계층에 대해 확장시킨 것으로 Shor의 최적화 알고리즘을 통해 최적 필터계수를 구한다. 제안하는 압축이득식은 다계층의 직교 필터와 쌍직교 필터에 대해 공통적으로 최적화 목적함수로 사용될 수 있다. 또한 웨이브렛 필터의 정규성에 대한 제한 조건을 완화하고 최적화 과정에서의 자유도를 높여 압축이득을 최대화시키도록 한다. 제안하는 필터의 설계법은 주파수 대역의 인수분해를 하지 않고 대수적 방법을 이용한 완전복원 조건을 부가하여 최적화를 수행하므로 필터의 길이가 긴 경우도 비교적 간단히 설계가 가능하다.

본 논문에서 실험을 위해 설계하는 필터는 직교 필터와 필터의 길이가 짝수인 쌍직교 필터, 그리고 홀수의 길이를 갖는 쌍직교 필터이다. 실험 결과 설계한 모든 필터는 완전복원을 만족하며 기존의 필터와 비교해 전반적으로 우수한 에너지 압축율(energy packing)을 보였다.

2. 잡음 분석과 압축효율

2.1 직교 필터 뱅크에서의 압축이득

신호의 압축을 위해서 각 대역은 제한된 적은 수의 비트로 표현되어야 하고 이 과정에서 신호의 근사화가 이루어지므로 복원신호는 오차를 갖는다. 원 신호와 양자화기를 통한 복원 신호를 각각 $x[n]$ 과 $\hat{x}[n]$ 이라 하면 복원 오차 $r[n]$ 과 복원 오차의 분산 σ_r^2 은 각각 다음 식으로 주어진다.

$$r[n] = \hat{x}[n] - x[n] \quad (1)$$

$$\sigma_r^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sigma_{a_k}^2 \quad (2)$$

여기서 $q_k[\cdot]$ 는 변환된 대역 신호에 대한 양자화기의 첨가 잡음 신호이며 N 은 전체 대역의 갯수이다. 위의 식으로부터 직교 필터를 이용한 시스템의 복원 오차에 대한 분산은 각 대역별 양자화기에서 발생하는 잡음 신호의 분산에 대한 평균값임을 알 수 있다. 분해된 대역을 압축하는 알고리즘으로 PCM(Pulse Code Modulation)을 이용하는 경우 단일 양자화기의 잡음에 의한 복원 오차의 분산을 양자화기의 입력 신호의 분산에 의존한다고 가정하면 다음 식으로 표현된다. 이 식은 $R_k \gg 1$ 인 고비트율에서 유효하다[9].

$$\sigma_{a_k}^2 = \epsilon_s^2 2^{-2R_k} \sigma_{y_k}^2 \quad (3)$$

여기서 y_k 는 k 번째 대역의 신호, R_k 는 k 번째 대역에 사용된 비트량, 그리고 ϵ_s^2 은 양자화기의 성능 변수로서 각 대역의 확률 밀도 함수가 잡음신호의 분산에 영향을 주므로 각 밴드에 대해 변수 k 에 무관한 동일한 값으로 근사화 하였다. 이 식은 PCM의 잡음 레벨에 대한 근사화 식이며 고 비트율인 경우에 유효한 식으로 알려져 있다.

Lagrange multiplier 방법을 이용하여 k 번째 대역

의 양자화 오차의 분산을 최소화시키는 최적 비트량은 다음 식 (4)로 주어진다[9]. 여기서 R 은 평균 비트량이며 상수이다. 그러므로 R_k 비트의 제한된 비트량에서의 최적 오차의 분산은 식 (5)로 얻을 수 있다.

$$R_k = R + \frac{1}{2} \log_2 \frac{\sigma_{y_k}^2}{[\prod_{j=1}^N \sigma_{y_j}^2]^{\frac{1}{N}}}, \quad k = 1, \dots, N \quad (4)$$

$$\sigma_{q_k}^2 = \varepsilon_*^2 2^{-2R} [\prod_{j=1}^N \sigma_{y_j}^2]^{\frac{1}{N}} \quad (5)$$

위 식으로부터 각 대역에서의 최적화된 잡음의 분산은 특정 대역 k 에는 무관하게 되므로 전체 잡음 분산을 최적화하는 것의 의미는 각 대역별 잡음에는 무관하고 모든 대역의 잡음으로부터 동일한 영향을 받는다는 것을 알 수 있다. 식 (2)에서처럼 복원 오차는 평균 잡음의 분산과 같아지므로 최소 복원 오차는 식 (6)으로 간소화되고 PCM에 대한 대역분할 압축 알고리즘의 압축 효율은 식 (7)으로 정의된다.

$$\sigma_{r_{opt}}^2 = \sigma_{q_k}^2, \quad k = 1, \dots, N \quad (6)$$

$$G_{SBC} = \frac{\sigma_{r_{opt}}^2}{\sigma_{r_{rcu}}^2} = \frac{\sigma_x^2}{[\prod_{k=1}^N \sigma_{y_k}^2]^{\frac{1}{N}}} = \frac{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sigma_{y_k}^2}{[\prod_{k=1}^N \sigma_{y_k}^2]^{\frac{1}{N}}} \quad (7)$$

식 (7)로부터 직교 필터 시스템에서의 최적 필터의 설계는 압축 효율 G_{SBC} 를 최대로 하는 것으로 선택한다. 식 (7)은 각 대역들의 산술 평균과 기하 평균의 비로 해석할 수 있으며 압축효율을 높이기 위해서는 각 대역에서의 분산값들의 차이를 최대화시키도록 해야 한다.

2.2 쌍직교 필터 뱅크에서의 압축이득

완전복원의 조건을 만족시키는 쌍직교 필터 뱅크는 일반적으로 대역들의 평균 분산은 입력 신호의 분산과 같다는 명제를 만족시키지 못한다. 쌍직교 필터는 입력신호의 에너지를 분해단으로 같은 값으로 전달하지 못하고 상수배 만큼의 스케일링이 일어난다. 그러므로 필터의 에너지 압축 상수 A_k 와 비직교성을 표현할 수 있는 상수 B_k 를 도입한다. 이들 상수는 필터의 계수값과 입력 신호의 통계적 특성 및 양자화 잡음의 영향을 받는다. 변환 영역에서의 각 대역별 신호의 분산과 복원 오차의 분산은 다음 식으로

주어진다.

$$\sigma_{y_k}^2 = A_k \sigma_x^2 \quad (8)$$

$$\sigma_r^2 = \sum_{k=1}^N B_k \sigma_{q_k}^2 \quad (9)$$

상수 A_k 는 분해단의 필터 계수 $h_k(\cdot)$ 와 자기상관 함수 $r_{xx}(\cdot)$ 로 표현되는 입력 신호의 통계적 특성에 의해 결정된다. 그리고 B_k 는 복원단의 필터 계수 $g_k(\cdot)$ 와 양자화 잡음의 상관 함수의 특성에 의존한다. 에너지 압축 상수 A_k 는 식 (10)으로 정의된다. 본 논문에서는 입력 신호의 통계적 특성을 분산이 1이고 평균이 0인 AR1 모델로 가정하였으며 자기상관 계수는 $\rho=0.95$ 로 두었다.

$$A_k = \frac{\sigma_{y_k}^2}{\sigma_x^2} = \frac{E[y_k[n]^2]}{\sigma_x^2} = \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N h_k[j] h_k[l] \rho^{|j-l|} \quad (10)$$

복원단에서의 비직교성 상수 B_k 를 결정하기 위해서는 양자화 잡음의 통계적 특성에 대한 가정을 해야한다. 직교 필터의 경우에는 복원 오차의 분산 σ_r^2 이 전체 대역의 양자화 잡음 신호에 대한 평균 분산과 같다는 것을 식 (2)에서 보였으므로 양자화 잡음의 통계적 특성에 대한 고려는 필요하지 않았다. 본 논문에서는 각 대역간의 양자화 잡음은 백색 잡음으로서 서로 상관 특성이 없다고 가정한다. 쌍직교 필터 시스템에서 복원 오차의 분산은 다음과 같이 주어진다.

$$\sigma_r^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sum_a r_{q_k, q_k}[a] \sum_j g_k[j] g_k[j+aM] \quad (11)$$

식 (11)를 더욱 단순화시키기 위해 식 (9)에서 B_k 가 k 대역에서의 양자화 오차의 자기상관 함수와 필터의 임펄스 응답에 영향을 받는다는 것을 이용하고 평균 비트량 $R \gg 1$ 인 경우 각 대역의 양자화 오차를 백색잡음이라 가정하면 식 (12)로 간단히 표현된다[9].

$$B_k \sigma_{q_k}^2 = \frac{1}{N} \sum_a r_{q_k, q_k}[a] \sum_j g_k[j] g_k[j+aM] = \frac{1}{N} \sigma_{q_k}^2 \sum_j g_k^2[j] \quad (12)$$

그러므로 B_k 는 다음 식으로부터 얻을 수 있다.

$$B_k = \frac{1}{N} \sum_j g_k^2[j] \quad (13)$$

적교 필터의 경우와 마찬가지로 Lagrange multiplier를 사용하여 k 번 째 대역에 대한 최적의 비트량을 계산하면 식 (14)가 되고 이 경우 양자화 오차의 분산은 식 (15)가 된다. 이 식들로 부터 구한 조건을 이용하여 얻은 최소복원 오차의 분산은 식 (16)으로 주어진다.

$$R_k = R + \frac{1}{2} \log_2 \frac{A_k B_k}{[\prod_{j=1}^N A_j B_j]^{\frac{1}{N}}}, \quad k=1, \dots, N, \quad (14)$$

$$\sigma_{a_k}^2 = \epsilon_s^2 2^{-2R} \frac{1}{B_k} [\prod_{j=1}^N A_j B_j]^{\frac{1}{N}} \sigma_x^2 \quad (15)$$

$$\sigma_{r_{tot}}^2 = \sum_{k=1}^N B_k \sigma_{a_k}^2 = N \epsilon_s^2 2^{-2R} [\prod_{j=1}^N A_j B_j]^{\frac{1}{N}} \sigma_x^2 \quad (16)$$

그러므로 쌍직교 필터를 이용한 시스템의 PCM에 대한 압축이득 G_{SBC} 는 식 (17)로 주어진다.

$$G_{SBC} = \frac{\sigma_{r_{PCM}}^2}{\sigma_{r_{tot}}^2} = \frac{1}{M [\prod_{k=1}^N A_k B_k]^{\frac{1}{N}}} \quad (17)$$

3. 웨이브렛 필터의 설계

3.1 다계층 분할 구조에서의 압축이득

웨이브렛 변환에서 각 대역의 필터는 기본적인 프로토타입 기저로부터 확장과 수축 그리고 이동으로 얻어지므로 다계층에서의 압축이득을 구한다. J 번 째 계층까지의 복원단의 웨이브렛 변환을 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$x[n] = \sum_{j=1}^J \sum_{k=2^j} X^{(j)}[2k+1] g_1^{(j)}[n-2^j k] + \sum_{k=2^j} X^{(j)}[2k] g_0^{(j)}[n-2^j k] \quad (18)$$

$$X^{(j)}[2k+1] = \langle h_1^{(j)} [2^j k - l], x[l] \rangle \quad j=1, \dots, J, \quad (19)$$

$$X^{(j)}[2k] = \langle h_0^{(j)} [2^j k - l], x[l] \rangle \quad (20)$$

따라서 복원단과 분해단의 임펄스 응답은 각각 다음 수식으로 주어진다.

$$g_0^{(j)}[n] = \sum_i g_0^{(j-1)}[i] g_0[n-2^{j-1} i] \quad (21)$$

$$g_1^{(j)}[n] = \sum_i g_0^{(j-1)}[i] g_1[n-2^{j-1} i] \quad j=1, \dots, J \quad (22)$$

$$h_0^{(j)}[n] = \sum_i h_0^{(j-1)}[i] h_0[n-2^{j-1} i] \quad (23)$$

$$h_1^{(j)}[n] = \sum_i h_0^{(j-1)}[i] h_1[n-2^{j-1} i] \quad j=1, \dots, J \quad (24)$$

위에서 구한 각 대역의 필터를 식 (17)의 이득식에 대입하여 웨이브렛 변환으로 인한 압축이득을 구할 수 있다. 대역의 개수는 신호의 차원에 따라 1차원인 경우 $N=J+1$, 2차원 영상신호인 경우는 $N=3J+1$ 로 주어진다. 그러므로 1차원 웨이브렛 변환에서 이득식에서의 에너지 압축 상수 A_k 는 다음 식으로 표현된다.

$$A_k = \sum_{j=1}^{L_k} \sum_{l=1}^{L_k} h_1^{(k)}[j] h_1^{(k)}[l] \rho^{j-l} \quad k=1, \dots, J \quad (25)$$

$$A_J = \sum_{j=1}^{L_J} \sum_{l=1}^{L_J} h_0^{(J)}[j] h_0^{(J)}[l] \rho^{j-l} \quad (26)$$

여기서 L 이 프로토타입 기저함수의 필터 길이인 경우 각 대역의 필터 길이인 $L_k = (2^k - 1)(L - 1) + 1$ 이다. 복원단의 비직교성 상수는 다음으로 주어진다.

$$B_k = \frac{1}{N_k} \sum_{j=1}^{L_k} |g_1^{(k)}[j]|^2 \quad k=1, \dots, J \quad (27)$$

$$B_J = \frac{1}{N_J} \sum_{j=1}^{L_J} |g_0^{(J)}[j]|^2 \quad (28)$$

각 대역별 에너지를 정규화 시키기 위한 상수 N_k 는 1차원 신호에 대한 피라미드구조의 옥타브 대역 분할을 적용한 경우 $N_k = (1/2)^k$ 로 주어진다. 그러므로 다계층 웨이브렛 변환에서의 J 계층에서의 압축이득은 다음 식으로 표현된다.

$$G_J = \frac{1}{A_J B_J N_J \prod_{k=1}^J N_k [A_k B_k]^{\frac{1}{N_k}}} \quad (29)$$

본 논문에서는 위에서 구한 다계층 분할 구조에서의 웨이브렛 변환을 통한 압축이득 수식을 목적함수로 하고 완전복원 조건을 제한조건으로 한 최적화를 통해 필터를 설계한다. 목적함수의 최적화를 위해서는 Shor's r-알고리즘을 이용하였다. Shor's 알고리즘은 기울기 검색(gradient search)알고리즘의 일종으로 미분은 가능하지만 함수가 완만하지 않은 경우 좋은 결과를 내는 알고리즘 중의 하나이다[10]. 기울기를 이용한 최적화 알고리즘은 대부분 각 반복에서 스텝의 크기를 결정하기 위해 검색을 하며 이 검색은 선택된 방향으로의 목적함수를 최적화하는 쪽으로 수행된다.

3.2 직교 필터의 설계

직교 필터는 이산여현 변환이나 푸리에 변환의 기저와 마찬가지로 공간 영역에서의 에너지가 주파수 영역에서의 에너지와 같게 된다. 그러므로 유니터리 관계를 만족하는 필터인 경우 필터에 대한 변환은 다음 식을 만족하게 된다.

$$\begin{aligned} E[y^T y] &= E[(H^T x)^T (H^T x)] = E[x^T (H H^T) x] \\ &= E[x^T I_n x] = E[x^T x] \end{aligned} \tag{30}$$

위의 관계식은 복원단의 필터에 대해서도 동일하게 적용할 수 있으므로 분해단의 에너지 압축율을 최대로 만드는 필터를 설계하는 것으로 충분하다. 두 개의 대역으로 1계층만을 분할하는 간단한 시스템에서 입력 신호를 평균이 0이라 가정하고 σ_x^2 를 분산이라 하면 σ_x^2 와 변환 영역 계수들의 분산 σ_L^2 과 σ_H^2 와의 관계를 구할 수 있다. 신호의 평균을 0으로 가정하였으므로 상관 행렬(correlation matrix) R과 분산 행렬(covariance matrix) C는 같아지고 상관 행렬의 대각 성분은 그 신호의 에너지 혹은 분산을 의미한다.

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= \sigma_y^2 = E[yy^T] \\ &= \frac{1}{2} [E[(h_L^T x)(h_L^T x)^T] + E[(h_H^T x)(h_H^T x)^T]] \\ &= \frac{1}{2} (h_L^T R_{xx} h_L + h_H^T R_{xx} h_H) = \frac{1}{2} (\sigma_L^2 + \sigma_H^2) \end{aligned} \tag{31}$$

2장에서 대역분할 부호화의 압축이득은 각 대역 에너지의 산술평균과 기하평균의 비로 나타나므로 위 식에서는 압축 효율을 최대화시키기 위해서는 σ_L 과 σ_H 의 차이를 가장 크게 하는 필터가 가장 이상적이다. 그러므로 1계층 대역분할 시스템에서의 압축이득은 식 (32)가 되고 압축이득의 최대치는 σ_L 을 최대화하는 것으로 충분하다.

$$G = \frac{\sigma_x^2}{[\sigma_L^2 \sigma_H^2]^{1/2}} \tag{32}$$

그러나 계층이 1 이상인 경우 다계층으로 확장된 이득식을 이용해야 한다. 직교기저의 설계에서는 식 (29)의 비직교 상수를 이용할 필요가 없으며 직교 필터의 에너지는 1이라는 것을 이용하면 모든 계층에서의 비직교 상수는 1로 주어진다. 그러므로 J계층

에서의 이득식은 다음으로 주어진다.

$$G_J = \frac{1}{A_J N_J \prod_{k=1}^J N_k [A_k]^{1/N_k}} \tag{33}$$

위 식으로부터 직교 필터 बैं크에서 최적 필터 계수는 분해단의 필터들에 대해서만 최적화 알고리즘을 적용해서 얻을 수 있다. 직교 필터는 하나의 필터로부터 나머지 모든 필터를 유도해 낼 수 있으므로 본 논문에서는 분해단의 저주파 통과 필터를 기준으로 설계한다.

직교 필터의 최적화에 이용한 제한조건은 완전복원 조건과 필터의 에너지가 1로 정규화 된다는 조건 즉 직교성에 대한 제약 조건을 이용한다. FIR 직교 필터는 짝수의 길이만 가져야 하고 Haar 기저인 경우를 제외하고는 선형 위상을 만족시키지 못하므로 필터의 모양에 관한 제한은 두지 않았다. 또한 정규성을 만족시키기 위해 z-영역에서 필터의 전달함수가 $z=-1$ 에서 제로를 갖도록 하였다. 정규성의 조건은 다음 식으로 표현된다.

$$G_0(-1) = H_1(0) = 0 \tag{34}$$

식 (34)의 조건을 만족시킴으로서 입력의 DC 성분은 낮은 주파수 대역의 신호만을 전송하더라도 복원단에서 완벽히 재생된다. 그러므로 $h[\cdot]$ 를 필터 $h[\cdot]$ 의 자기상관 함수라고 할 때 직교 필터의 최적화 문제는 다음으로 간략화 시킬 수 있다.

$$\text{Minimize : } G_J = A_J N_J \prod_{k=1}^J N_k [A_k]^{1/N_k}$$

$$\text{Subject to : } h[0] = 1$$

$$h[2k] = 0, \quad k = 1, \dots, L/2 - 1$$

$$\sum_{n=0}^{L-1} (-1)^n h[n] = 0$$

3.3 쌍직교 필터의 설계

쌍직교 필터의 설계를 위해서는 우선 $h_0[\cdot]$ 와 $g_0[\cdot]$ 의 임펄스 응답을 최적화 변수들의 벡터로 설정하고 에너지 압축이득식을 이용하여 최적화를 수행한다. 쌍직교 필터를 이용한 시스템에서는 분해단의 저주파 통과 필터와 고주파 통과 필터를 모두 구해야 한다. 제안하는 알고리즘에서는 분해단의 저주파 통과 필터와 복원단의 저주파 통과 필터를 설계하

여 나머지 필터의 계수를 유도한다.

3.1절에서 제안한 다계층에서의 에너지 압축이득식을 최적화하는 경우 결과 계수가 극단적으로 큰 복원 필터의 계수와 극단적으로 작은 필터의 계수들로 발산하는 경우가 있다. 본 논문에서는 이러한 발산을 스케일 상수를 도입하여 해결한다. 스케일 상수는 에너지 압축이득식을 변화시키지 않고 부가된 제한조건에 위배되지 않도록 결정된다. 최적화 과정을 통해 얻어진 쌍직교 필터 계수를 $h_0'[n]$ 과 $g_0'[n]$ 이라 하면 스케일 상수는 식 (35)으로부터 구한다. 식 (35)의 스케일 상수를 $h_0[n]$ 와 $g_0[n]$ 에 곱하여 식 (36)과 식 (37)의 필터 계수를 얻는다

$$s_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{L_0-1} h_0'[k]}, \quad s_1 = \frac{1}{s_0} \quad (35)$$

$$h_0[n] = s_0 h_0'[n] = \frac{h_0'[n]}{\sum_{k=0}^{L_0-1} h_0'[k]} \quad (36)$$

$$g_0[n] = s_1 g_0'[n] = g_0' \sum_{k=0}^{L_0-1} h_0'[k] \quad (37)$$

스케일 과정을 거친 필터는 분해단 저주파 통과 필터의 계수들의 모든 합을 1로 하게 된다. 쌍직교 필터는 직교성에 대한 제한조건을 제거하여 선형 위상을 만족시키는 필터를 설계할 수 있으므로 설계하는 필터의 형태를 우대칭이나 기대칭형으로 한정한다. 완전복원을 만족시키기 위해 쌍직교 필터의 길이 L_0 와 L_1 은 모두 짝수 혹은 홀수로 두어야 하며 복원단과 분해단의 필터 길이의 차는 식 (38)과 식(39)의 조건을 만족 시켜야 한다.

$$\text{odd - odd filter: } |L_1 - L_0| = 2(2k - 1) \quad (38)$$

$$\text{even - even filter: } |L_1 - L_0| = 2(2k - 2) \quad (39)$$

쌍직교 필터에서 정규성을 분해단과 복원단에 모두 만족시키는 것은 자유도를 심하게 제약하게 되고 분해와 복원 필터 모두를 정규 필터(regular filter)로 설계하는 것은 어렵다. 영상신호 압축의 관점에서 볼 때 복원단의 필터는 상향 표본화된 샘플에 대한 보간의 의미를 갖게 되므로 분해단의 필터에서 보다 정규성이 더욱 필요하다. 즉 비정규적인 필터에 의한 분해단의 왜곡은 비정규적인 복원단의 왜곡보다 눈에 적게 감지된다.

따라서, 본 논문에서 쌍직교 필터의 정규성을 만

족시키기 위한 조건인 z -영역에서 필터의 전달함수가 $z=-1$ 에서 제로를 갖도록 하는 제한조건은 복원단의 $g_0[n]$ 에서만 만족시키도록 한다. 함수 $p[\cdot]$ 를 필터 $h_0[\cdot]$ 와 $g_0[\cdot]$ 의 컨볼루션이라 하면 쌍직교 필터의 최적화 문제는 다음으로 간략화시킬 수 있다.

$$\text{Minimize : } G_J = A_J B_J N_J \prod_{k=1}^J N_k [A_k B_k]^{1/N_k}$$

$$\text{Subject to : } p[0] = 1$$

$$p[2k] = 0, k = 1, \dots, \frac{(L_0 + L_1)}{2} - 1$$

$$\sum_{n=0}^{L_1-1} (-1)^n g_0[n] = 0$$

4. 실험 및 결과 고찰

4.1 직교 필터

실험을 위해 설계한 직교 필터는 4탭, 6탭, 8탭, 10 탭 필터이며 계층별로 최적화를 수행하였다. 제안한 6탭 필터를 예로 들면 정규성 상수 B 의 값은 Daubechies의 6탭 필터인 경우 $z=-1$ 에서 제로의 개수는 3개, $B=3.16228$ 이므로 $B=3.1622 \times 2^{(3-1)}$ 가 되어 정규성의 조건을 만족시킨다. 그러나 제안한 필터는 $z=-1$ 에서 제로의 개수가 하나이며 $B=6.67723$ 이므로 $B=6.67723 > 2^{(1-1)}$ 가 되어 완벽한 정규성을 만족시키지는 못한다. 필터가 정규성을 만족시키지 못하면 반복적인 컨볼루션을 수행할 경우 불연속인 함수로 발산하게 되어 웨이브렛 기저를 만족하지 못한다. 그러나 대부분의 실제 응용에서는 그렇게 많은 대역분할을 할 필요가 없으며 1차의 정규성만을 만족시켜도 공학적 응용에는 무리가 없다. (표 1)과 (표 2)에 제안한 알고리즘으로 구한 직교 6, 8탭 필터의 계수를 각각 보였다.

(표 3)에 각 계층별로 Daubechies 및 Uzun의 필터를 제안한 6탭, 8탭, 10탭에 대하여 압축이득을 비교하였다. 제안한 필터의 계층별 압축이득을 비교하기 위해 이용하는 필터의 계수는 3계층에 최적화된 필터를 사용한다.

(그림 1)는 신호를 6대역까지 분할을 하는 경우 제안한 필터와 Daubechies 및 Uzun의 직교 필터에 대한 압축이득을 dB로 나타낸 것이다. 압축이득은 필터의 길이가 길어질수록, 그리고 계층이 증가할수

표 1. 직교 6탭 필터 계수

n	$h_0[n]$		
	1 Layer	2 Layer	3 Layer
0	0.384590108	0.383175322	0.38271476
1	0.795989365	0.796429928	0.796054445
2	0.429613715	0.430335645	0.431331117
3	-0.140627575	-0.140515922	-0.14036019
4	-0.107097041	-0.106404186	-0.1069339096
5	0.051744991	0.051192775	0.051412527

표 2. 직교 8탭 필터 계수

n	$h_0[n]$		
	1 Layer	2 Layer	3 Layer
0	0.299542306	0.302135283	0.290962217
1	0.737353016	0.740707487	0.733332413
2	0.559049391	0.5548184	0.569238545
3	-0.042270777	-0.0479278101	-0.0374041484
4	-0.21484564	-0.210194676	-0.215323539
5	0.0377642034	0.0389430187	0.0358691614
6	0.0633607231	0.0603477744	0.0622295576
7	-0.0257396615	-0.0246159142	-0.0246906447

특 주 분해 대역이 많아질수록 높아지며 계층이 점점 증가함에 따라 일정 값으로 수렴함을 알 수 있다. 따라서 웨이블릿 필터를 실제 적용하는 경우 대역을 많이 분해하더라도 압축 이득은 그에 비례하여 선형적으로 증가하지는 않게 되므로 6계층 이상의 분해는 무의미한 일이 된다. 압축이득이 수렴하는 상한은 최적 변환인 KLT로 얻을 수 있는 압축이득이 된다. (그림 1)에서처럼 제안한 필터는 전 계층에 걸쳐 전반적으로 같은 길이의 Daubechies의 필터보다도 압축이득이 높으며 직교 8탭 필터는 Daubechies의

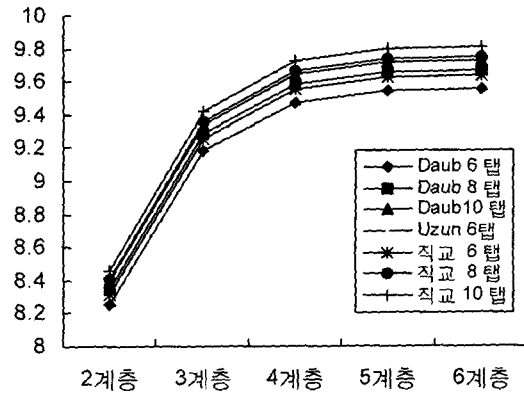


그림 1. 직교 필터의 압축이득 비교

10탭 필터보다도 에너지 압축이득이 뛰어난 것을 알 수 있다. Uzun의 6탭 필터와 제안한 6탭 필터의 압축이득은 거의 동일하다.

4.2 쌍직교 필터

실험을 위해 3장에서 제안한 알고리즘을 이용해 설계한 필터는 홀수의 탭으로 이루어진 우대칭 5-7 탭, 9-7 탭, 9-3 탭, 5-3 탭, 11-17 탭과 모두 짝수의 길이를 갖는 우대칭 4-4 탭, 6-6 탭, 8-8 탭이다. 모두 홀수의 길이를 갖는 우대칭 직교 필터는 선형위상을 만족하기 위해 계수들이 다음과 같은 형태를 갖는다.

$$\dots, d, c, b, a, b, c, d, \dots$$

제안한 알고리즘으로 구한 쌍직교 5-3, 5-7 탭 필터의 계수를 (표 4)와 (표 5)에 각각 보였다. 기존의 필터[11-14]와 3계층에서 최적화된 쌍직교 필터에 대한 압축이득을 (표 6)에 나타내었다. (표 6)으로부터 제안한 필터의 에너지 압축에 의한 이득은 기존의 필터와 비교하여 전반적으로 향상된 성능을 보임을 알 수 있다. 특히 Antonini의 5-7

표 3. 직교 필터의 계층별 압축이득

	1계층	2계층	3계층	4계층	5계층	6계층
Daub 6 탭	5.7504535	8.2555040	9.1800381	9.4715013	9.5433226	9.5551629
Daub 8 탭	5.8102721	8.3450681	9.2827737	9.5794581	9.6525459	9.6644288
Daub10 탭	5.8437578	8.3938560	9.3385901	9.6381435	9.7119434	9.7238422
Uzun 6 탭	5.7934101	8.3198528	9.2547187	9.5508263	9.6238235	9.6357057
직교 6 탭	5.7933988	8.3198294	9.2546913	9.5507983	9.6237950	9.6356768
직교 8 탭	5.8583881	8.4127977	9.3601238	9.6611020	9.7353122	9.7472161
직교 10 탭	5.8943606	8.4635955	9.4182558	9.7221576	9.7971003	9.8090053

표 4. 쌍직교 5-3탭 필터 계수

n	$h_0[n]$		
	1 Layer	2 Layer	3 Layer
0	0.709941449	0.710671957	0.714580218
± 1	0.276658446	0.273969599	0.271056894
± 2	-0.138329223	-0.136984799	-0.135528447
n	$g_0[n]$		
	1 Layer	2 Layer	3 Layer
0	1.01358211	1.01559801	1.01457219
± 1	0.506791053	0.507799003	0.507286094

표 5. 쌍직교 5-7탭 필터 계수

n	$h_0[n]$		
	1 Layer	2 Layer	3 Layer
0	0.640871901	0.606719179	0.607117477
± 1	0.21524232	0.234504577	0.233680725
± 2	-0.167921693	-0.115475342	-0.0976141613
n	$g_0[n]$		
	1 Layer	2 Layer	3 Layer
0	1.1917174	1.18876558	1.19183879
± 1	0.61431249	0.593108228	0.58005046
± 2	0.0839387936	-0.00251107159	-0.0272533083
± 3	0.0654850048	-0.0012365083	-0.0113843744

탭 필터에서는 압축이득의 차이가 상당히 크게 발생한다. 그러나 이미 최적에 가까운 Antonini의 9-3 탭 필터에 대해서는 계층에 따라 거의 같은 성능이거나 저하되는 부분도 있는데 이는 제안한 필터가 3계층에 최적인 필터이므로 다른 계층에서는 기존의 필터

표 6. 쌍직교 필터의 계층별 압축이득

	1계층	2계층	3계층	4계층	5계층	6계층
Anto 9-3탭	6.3054837	8.6194412	9.3791169	9.5836899	9.6158327	9.6116294
Anto 9-7탭	5.9163538	8.4687153	9.4591863	9.7865774	9.8703168	9.8834402
Anto 5-7탭	5.6098298	8.0766023	8.9973322	9.2909924	9.3655715	9.3789047
Jiro 9-3탭	6.3013007	8.6196024	9.3858878	9.5933120	9.6257538	9.6206443
Jiro 5-7탭	6.1990183	8.5836595	9.4041250	9.6394032	9.6840118	9.6830768
Majani 17-11탭	6.0358786	8.6005934	9.5504665	9.8500432	9.9224473	9.9327355
쌍직교 9-3탭	6.3045496	8.6242447	9.3898028	9.5968792	9.6295002	9.6247963
쌍직교 9-7탭	6.0490080	8.5465818	9.4802412	9.7762019	9.8457650	9.8533465
쌍직교 5-7탭	6.1639534	8.5702965	9.4072160	9.6514192	9.7005499	9.7018494
쌍직교 17-11탭	6.5012573	8.9412185	9.6942009	9.8885277	9.9218710	9.9222167

에 비해 최적이지 못하기 때문이다. 제안한 9-3 탭 필터는 3계층에서는 기존의 9-3 탭 필터보다는 약간의 성능 향상을 보인다. 마찬가지로 9-7 탭 필터인 경우 3계층까지는 제안한 필터의 성능이 앞서나 4계층 이후에서는 오히려 Antonini의 필터가 앞서게 됨을 알 수 있다. (그림 2)에 이들의 계층에 따른 압축이득을 나타내었다. 직교 필터에서와 마찬가지로 계층이 늘어날수록 그리고 필터의 길이가 길어질수록 압축이득은 높아지며 일정한 값으로 수렴해 간다.

모두 짝수의 길이를 갖는 우대칭 직교 필터는 계수들이 다음과 같은 형태를 갖는다.

$$\dots, d, c, b, a, a, b, c, d, \dots$$

즉, 필터의 형태로부터 $z = -1$ 에서 체로를 갖게 하는 정규성의 조건은 저절로 만족되어 지므로 최적화 과정에서 제한조건으로 부가할 필요가 없으며 기대치인 경우와 마찬가지로 제안한 목적함수를 최적화함으로써 계수를 얻을 수 있다.

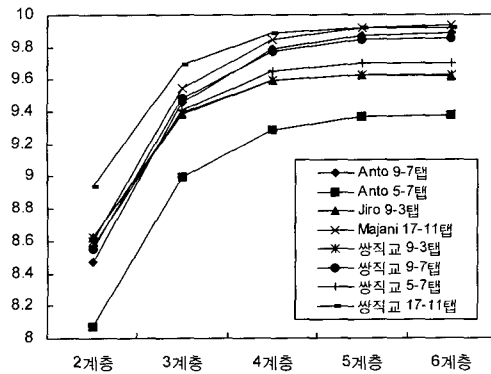


그림 2. 쌍직교 필터의 압축이득 비교

표 7. 실제영상에의 적용결과(LENA 512×512, 1bpp, 3계층)

필터 종류	Anto5-7탭	Anto9-7탭	Maja17-11탭	Anto9-3탭	Jiro 9-3탭	Uzun 6탭
PSNR	36.352	37.158	37.530	37.282	37.227	26.717
필터 종류	쌍직교5-7탭	쌍직교9-7탭	쌍직교17-11탭	쌍직교 9-3 탭		직교 6탭
PSNR	37.320	37.385	37.698	37.319		26.721

(표 7)에 제안한 필터와 기존의 필터를 실제 영상에 적용한 결과를 나타내었다. 실험은 512×512의 크기를 갖는 LENA 영상에 대해 3계층의 분해를 한 뒤 1bpp의 엔트로피로 양자화하고 복원한 결과영상과 원영상의 차이를 psnr로 나타내었다. 영상에 대한 실험 결과 Antonini의 9-3탭과 Uzun의 6탭 필터는 제안한 필터와 거의 비슷한 정도의 성능을 보이며 최적에 가까운 압축이득을 얻을 수 있다. 그러나 Antonini 9-7탭 필터, Jiro의 9-3탭, Majani 17-11탭 필터보다는 제안한 필터의 성능이 우수함을 알 수 있다. 특히 제안한 쌍직교 5-7탭 필터는 Antonini의 5-7탭 필터와 비교하여 약 1dB 정도의 화질을 향상시킨다.

위의 결과로부터 제안한 필터가 실제 압축을 하는 경우에도 같은 비트율에서 화질의 향상이 있음을 알 수 있다. 기존의 필터와의 성능 향상은 필터의 길이에 따라 많이 향상되는 경우도 있고 기존의 필터와 거의 같은 수준의 필터도 있지만 탭수에 따라 분류한 여러 필터들 사이에서 전반적으로 우수한 결과를 보인다.

5. 결 론

본 논문에서는 짝수 길이의 직교 웨이브렛 필터와 짝수 길이 및 홀수 길이를 갖는 쌍직교 웨이브렛 필터를 설계할 수 있는 알고리즘을 제안하였다. 분해단과 복원단만으로 이루어진 필터 뱅크에서의 완전복원을 만족시키는 기존의 필터 설계에 관한 연구와는 달리 양자화 과정이 포함된 전체 시스템에서의 최적화 과정을 수행하였으며 이를 위해 본 논문에서는 에너지의 압축효과를 바탕으로 하는 압축이득식을 웨이브렛 변환의 다계층 분할 구조에 대해 확장하고 이를 이용해 필터를 설계하였다. 또한 완전복원을 만족시키기 위해 각 필터에 부가해야 하는 제한조건을 완화하여 필터 설계시의 자유도를 증가시켰다.

본 논문에서 제안하는 필터는 복원단의 고주파 대

역 통과 필터에 대한 정규성의 조건을 부가하지 않으며 대신 에너지 압축 효율을 최대화하는 방향으로 필터를 구하므로 양자화 과정이 포함된 실제 영상 압축 시스템에 적용하여 효율을 높일 수 있는 필터의 설계가 가능하다. 본 논문에서 제안한 웨이브렛 필터의 설계 알고리즘은 공통적인 압축이득식을 이용하므로 일관된 방법으로 직교와 쌍직교 필터를 설계할 수 있다. 또한 주파수 영역에서의 방정식을 분해하는 과정이 필요치 않으므로 길이가 긴 필터를 디자인하기 쉬워진다. 그렇지만 필터의 길이가 늘어나면 계산량이 증가하게 되므로 최적해로의 수렴이 느려지게 되며 정확한 비선형 최적화 알고리즘을 필요로 하므로 국부 최소점을 피할 수 있는 적절한 최적화 알고리즘을 선택하는 것이 선행되어야 한다.

참 고 문 헌

- [1] P. P. Vaidyanathan, "Quadrature mirror filter banks, M-band extensions and perfect reconstruction technique," *IEEE ASSP Mag.*, vol. 4, pp. 4-20, Jul. 1987.
- [2] V. K. Jain and R. E. Crochiere, "A novel approach to the design of analysis/synthesis filter banks," *Proc. IEEE ICASSP*, Apr. 1983.
- [3] P. P. Vaidyanathan, *Multirate Systems and Filter Banks*, Prentice-Hall, New Jersey, 1993.
- [4] M. J. T. Smith and T. P. Barnwell III, "A procedure for designing exact reconstruction filter banks for tree structured subband coders," *Proc. IEEE ICASSP*, pp. 27.1.1-27.1.4, 1984.
- [5] A. N. Akansu and R. A. Haddad, *Multiresolution Signal Decomposition*, Academic Press, 1992.
- [6] J. Katto and Y. Yasuda, "Performance evaluation of subband coding and optimization of its filter coefficients," *SPIE Proceeding of*

Visual Communication and Image Processing, Vol. 1605, pp.95-106, Nov. 1991.

[7] E. Majani, "Biothogonal wavelets for image compression," in *Proc. SPIE VCIP'94*, pp. 478-488, Sept., 1994.

[8] N.Uzun and R. A. Haddad, "Cyclostationary modeling, analysis and optimal compensation of quantization errors in subband codecs," *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol. 43, pp. 2109-2119, Sept. 1995.

[9] N. S. Jayant and P. Noll, *Digital Coding of Waveforms*, Prentice-Hall, New Jersey, 1984.

[10] N. Z. Shor, *Minimization Methods for Non-Differentiable Functions*, Springer Series in Computational Mathematics, vol. 3, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

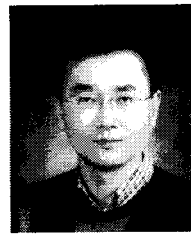
[11] O. Egger and W. Li, "Subband coding of images using asymmetrical filter banks," *IEEE Trans. Image Processing*, vol. 4, no. 4, pp. 478-485, Apr. 1995.

[12] M. Unser, A. Aldroubi and M. Eden, "Fast B-spline transforms for continuous image representation and interpolation," *IEEE Trans. Patt. Anal. Machine. Intell.*, vol. 13, pp. 277-

285, Mar. 1991.

[13] M. Antonini, M. Barlaud, P. Mathieu and I. Daubechies, "Image coding using wavelet transform," *IEEE Trans. Image Processing*, vol. 1, no. 2, pp. 205-220, Apr. 1992.

[14] D. L. Gall and A. Tabatabai, "Subband coding of digital images using symmetric short kernel filters and arithmetic coding techniques," *Proc. IEEE ICASSP*, pp.761-764, Apr. 1988.



이 임 건

1991년 연세대학교 전자공학과 졸업(학사)
 1993년 연세대학교 대학원 전자공학과 졸업(공학석사)
 1998년 연세대학교 대학원 전자공학과 졸업(공학박사)
 1998년~2001년 대우전자 디지털

TV 연구소 선임연구원
 2002년~현재 동의대학교 영화영상공학과 전임강사
 관심분야 : 영상처리, 컴퓨터 비전, 영상 복원 등
 E-mail : iglee@dongeui.ac.kr

교신저자

이 임 건 614-714 부산광역시 부산진구 가야동 산24
 동의대학교 영화영상공학과