

균열이 있는 선형 점탄성체의 변형에너지 방출률 $G(t)$ 에 대한 경계요소 해석

박명규[†] · 이상순* · 서창민**
(2003년 5월 23일 접수, 2003년 11월 10일 심사완료)

Boundary Element Analysis of Strain Energy Release Rate $G(t)$ for Cracked Viscoelastic Solids

Myung-Kyu Park, Sang-Soon Lee and Chang-Min Suh

Key Words: Boundary Element Analysis(경계요소해석), Cracked Viscoelastic Solids(균열이 있는 this 점탄성체), Viscoelastic Potential Energy(점탄성포텐셜에너지), Viscoelastic Strain Energy Release Rate(점탄성 변형에너지 방출률)

Abstract

In this paper, the boundary element analysis of viscoelastic strain energy release rate $G(t)$ for the cracked linear viscoelastic solids has been attempted. This study proposes the $G(t)$ equation and the calculating method of $G(t)$ by time-domain boundary element analysis for the viscoelastic solids. The $G(t)$ is defined as the derivative of the viscoelastic potential energy $\Pi(t)$ with respect to crack length a . Two example problems are presented to show the applicability of the proposed method to the analysis of the cracked linear viscoelastic solids. Numerical results of example problems show the accuracy and effectiveness of the proposed method.

1. 서론

고등공학 구조물, 즉 사용후 핵연료 저장조나 반도체 패키징등의 제작에 엔지니어링 플라스틱과 같은 고분자 재료들의 사용이 증가하면서 이러한 재료들의 파괴거동을 해석할 수 있는 방법들에 대한 관심이 늘고 있다. 고분자 재료들은 상온에서 탄성거동을 하지만, 주변온도가 높아지거나 수분흡수가 증가하면 점탄성 거동을 하게

된다. 점탄성체의 파괴거동에 관한 연구는 오래 전부터 진행되어 왔다.^(1~4) 일반적으로, 점탄성체의 정적균열에 대한 응력 분포는 똑같은 기하학적 형상을 지닌 탄성체의 정적균열에 대한 응력 분포식에 탄성-점탄성 대응원리(elastic-viscoelastic correspondence principle)를 적용하여 쉽게 구할 수 있다. 외부하중의 크기가 일정한 경우, 점탄성체의 균열선단에서의 응력분포는 시간의 경과에 상관없이 일정한 값을 유지하게 되고, 따라서 응력 확대계수 K 도 시간의 경과에 상관없이 일정한 값을 유지하게 된다. 그러나, 다른 점탄성 물질들, 즉 이완계수(relaxation moduli)들처럼 점탄성체의 파괴인성도 시간의 함수로 나타나야 한다. 그러므로, 점탄성체의 균열 진전에 대한 특성인자는 응력확대계수 K 값이 아니라 $G(t)$ 나 $J(t)$ 적분 값들이 사용되고 있다. 여기서, t 는 시간을 나타내고, $G(t)$ 와 $J(t)$ 들은 각각 선형 탄성파괴역학에서 유도된 변형에너지 방출률 G 와 J 적분에 대

[†] 책임저자, 회원, 문경대학 자동차기계열

E-mail : mkpark@mkc.ac.kr

TEL : (054) 559-1283 FAX : (054)554-1280

* 회원, 한국기술교육대학교 메카트로닉스공학부

** 회원, 경북대학교 기계공학과

응하는 함수들이다.

점탄성체의 파괴해석에 대한 이론적이고 수학적 연구는 많이 이루어진 반면,⁽¹⁻⁴⁾ 경계요소법(BEM)에 의한 해석은 많이 진행되어 있지 않다. 경계요소법에 의한 많은 연구들은 라플라스 변환 공간(Laplace transform space)에서의 해석을 시도하였다.^(5,6) 이러한 방법은 탄성 파괴역학적인 해석방법으로 점탄성체의 균열을 해석한 후에 수치적인 방법을 통하여 실제 시간 공간(real time space)으로 해석결과를 역 변환하는 절차를 택하고 있다. 그러나, 이러한 방법들은 해석결과를 시간공간으로 역 변환하는 과정에서 여러 가지 어려움을 야기 시키고 있으며, 변환인자들의 선택에 따라서 해석결과가 달라질 수 있는 문제점도 포함하고 있다. 이러한 문제점을 해결하기 위해서는, 점탄성체에 대한 파괴해석을 처음부터 실제 시간공간에서 시도하는 접근법이 바람직하다.

본 연구에서는, 경계요소법을 사용하여 균열이 있는 선형 점탄성체의 파괴해석을 실제 시간공간에서 시도하였다. 먼저, 외부 하중이 작용할 때 점탄성체에 나타나는 점탄성 포텐셜 에너지 $\Pi(t)$ 를 정의하고, 이러한 점탄성 함수를 균열길이에 대해 미분으로써 $G(t)$ 를 정의하였다. 다음에, 경계요소법을 적용하여 계산된 변위 값들을 이용하여 $G(t)$ 를 수치적으로 계산하였고, 계산된 결과를 정밀해와 비교하였다. 본 논문에서는 편의상 모드 I의 균열 문제에 국한하였고, 모드 I에 해당하는 아랫첨자 'I'를 생략하였다.

2. 점탄성체의 균열에 대한 $G(t)$ 공식화

선형 점탄성체에 대한 평형 방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\sigma_{ij,j}(\mathbf{x}, t) + f_i(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (1)$$

식 (1)에서 σ_{ij} 는 응력텐서를 나타내고, f_i 는 단위 체적당 체력(body force)을 나타낸다. 독립 변수 (\mathbf{x}, t) 는 함수들이 위치 벡터 \mathbf{x} 와 시간 t 에 의존함을 나타낸다.

선형 점탄성체에 대한 응력-변형률 관계식(constitutive relations)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) = & [2\mu(t)\epsilon_{ij}(\mathbf{x}, 0+) + \delta_{ij}\lambda(t)\epsilon_{kk}(\mathbf{x}, 0+)] \\ & + \delta_{ij} \int_{+0}^t \lambda(t-t') \frac{\partial \epsilon_{kk}(\mathbf{x}, t')}{\partial t'} dt' \\ & + 2 \int_{+0}^t \mu(t-t') \frac{\partial \epsilon_{ij}(\mathbf{x}, t')}{\partial t'} dt' \end{aligned} \quad (2)$$

식 (2)에서 ϵ_{ij} 는 변형률 텐서를 나타내고, δ_{ij} 는 크로네커 델타(Kronecker's delta)를 가리킨다. $\mu(t)$ 와 $\lambda(t)$ 는 탄성 이론의 Lamé 상수들과 대응되는 점탄성 함수들인데 시간의 함수이다. 선형 점탄성체에 대한 변형률 ϵ_{ij} 와 변위 u_i 사이에는 다음과 같은 관계가 있다.

$$\epsilon_{ij}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} \right] \quad (3)$$

경계면 S에서의 경계조건은 다음과 같이 주어진다.

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{on } S_u \quad (4)$$

$$t_i = \bar{t}_i = \sigma_{ij}n_j \quad \text{on } S_t \quad (5)$$

식 (4)와 (5)에서 $s = s_u \cup s_t$ 이고 t_i 는 표면력(traction) 벡터를 나타내고, n_j 는 경계면에서의 단위 외향법선 성분들을 나타낸다.

함수 Φ 에 대한 라플라스 변환을 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\Phi^*(\mathbf{x}, p) = \int_0^\infty e^{-pt} \Phi(\mathbf{x}, t) dt \quad (6)$$

식 (6)에서 p 는 라플라스(Laplas) 변환 매개변수를 나타낸다. 식 (1)에서 식 (5)까지에 대해 식 (6)으로 정의된 라플라스 변환을 실행하면 다음 식 (7), (8), (9)가 각각 얻어진다.

$$\sigma_{ij,j}^*(\mathbf{x}, p) + f_i^*(\mathbf{x}, p) = 0 \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^*(\mathbf{x}, p) = & 2p\mu(p)\epsilon_{ij}^*(\mathbf{x}, p) \\ & + \delta_{ij}p\lambda(p)\epsilon_{kk}^*(\mathbf{x}, p) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\epsilon_{ij}^*(\mathbf{x}, p) = \frac{1}{2} [u_{i,j}^*(\mathbf{x}, p) + u_{j,i}^*(\mathbf{x}, p)] \quad (9)$$

$$u_i^* = \bar{u}_i^* \quad \text{on } S_u \quad (10)$$

$$t_i^* = \bar{t}_i^* = \sigma_{ij}^* n_j \quad \text{on } S_t \quad (11)$$

탄성이론의 포텐셜에너지에 대한 표현식에 대해서 탄성-점탄성대응원리(elastic-viscoelastic correspondence

principle)을 적용하면, 라플라스변환된 점탄성포텐셜에너지는 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \Pi^*(p) = & \int_V \frac{1}{2} p \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}^* dV - \int_V p f_i^* u_i^* dV \\ & - \int_{S_i} p \bar{t}_i^* u_i^* dS \end{aligned} \quad (12)$$

응력과 변형률, 그리고 변위가 시간에 관계없이 일정한 경우에 식 (12)는 탄성체에 대한 포텐셜에너지로 변환됨을 알 수 있다. 가우스 발산정리(divergence theorem)와 평행방정식을 적용하면, 식 (12)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Pi^*(p) = - \frac{1}{2} \int_{S_i} \bar{t}_i^* u_i^* dS \quad (13)$$

식 (13)을 시간 영역으로 역변환하면 다음과 같은 식이 얻어진다.

$$\Pi(t) = - \frac{1}{2} \int_{S_i} \left[\int_0^{t-} \bar{t}_i(\mathbf{y}; t-\tau) \frac{\partial u_i(\mathbf{y}; \tau)}{\partial \tau} d\tau \right] dS(\mathbf{y}) \quad (14)$$

식 (14)에서 \bar{t}_i 는 점탄성체의 경계면에 작용하는 표면력을 나타내고, u_i 는 경계면에서의 변위를 가리키며, S_i 는 경계면 S 중에서 표면력이 작용하는 부분을 나타낸다.

균열이 있는 선형 점탄성체에 대한 변형에너지 방출률 $G(t)$ 는 다음과 같이 정의될 수 있다.

$$G(t) = - \frac{d\Pi(t)}{da} \quad (15)$$

식 (15)에서 $d\Pi$ 는 균열길이 a 의 미소 변화 da 에 대한 점탄성 포텐셜 에너지의 변화를 나타내며, 이 식은 선형 탄성체의 식과 유사함을 알 수 있다. 식 (15)에 나타난 $\Pi(t)$ 의 미분은 차 공식(difference formula)을 이용하여 다음과 같은 근사적인 표현으로 고쳐 쓸 수 있다.

$$G(t) \approx - \frac{\Pi_2(t) - \Pi_1(t)}{a_2 - a_1} \quad (16)$$

식 (16)에서 Π_1 과 Π_2 는 각각 균열 길이가 a_1 과 a_2 일때의 $\Pi(t)$ 값을 가리킨다. 식 (16)를 이용

하여 정확한 $G(t)$ 값을 얻기 위해서는 균열 길이 a_1 과 a_2 의 차이가 매우 작아야 하며, 점탄성체의 응력과 변위 계산을 정확히 수행할 수 있는 방법이 사용되어야 한다.

3. 경계요소 공식

본 논문에서는, 식 (16)을 사용하여 $G(t)$ 값을 구하기 위해서 시간 영역 경계요소법을 적용한다. 점탄성체의 체적력(body force)를 무시할 수 있다고 가정하면, 선형 점탄성체에 대한 경계적분 방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.⁽⁷⁾

$$\begin{aligned} c_{ij}(\mathbf{y}) u_j(\mathbf{y}, t) + \int_S [u_j(\mathbf{y}', t) T_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{y}'; 0+) \\ + \int_{0+}^t u_j(\mathbf{y}', t-\tau) \frac{\partial T_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{y}'; \tau)}{\partial \tau} d\tau] dS(\mathbf{y}') \\ = \int_S [t_j(\mathbf{y}', t) U_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{y}'; 0+) \\ + \int_{0+}^t t_j(\mathbf{y}', t-\tau) \frac{\partial U_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{y}'; \tau)}{\partial \tau} d\tau] dS(\mathbf{y}') \end{aligned} \quad (17)$$

식 (17)에서, u_j 와 t_j 는 각각 경계면에서의 변위와 표면력 벡터를 나타내고, S 는 점탄성체의 경계면을 나타낸다.

T_{ij} 와 U_{ij} 는 점탄성 기본해(viscoelastic fundamental solutions)들이고, c_{ij} 는 경계면의 기하 형상에 의존하는 함수이다. 점탄성 기본해들은 탄성 이론의 켈빈 문제(Kelvin problem)에 대한 해에 탄성-점탄성 대응원리를 적용하여 구한다. 점탄성 기본해에 대한 표현은 참고문헌^(7~9)에 잘 나타나 있다.

식 (17)은 경계적분과 시간적분을 포함하고 있는데, 시간 적분은 사다리꼴 공식이나 심프슨 공식을 적용하면 효과적으로 풀 수 있다. 여기에서는 1/3 심프슨 공식과 3/8 심프슨 공식을 결합한 수정 심프슨 공식⁽⁷⁾을 적용하였다. 경계적분을 수행하기 위해서는, 경계요소를 만들고, 요소에 적합한 형상 함수(shape function)를 선택하면 되는데, 본 논문에서는 이차 선요소(quadratic line elements)⁽¹⁰⁾를 사용하였다. 이러한 과정을 거쳐서 식 (17)을 정리하면 다음과 같은 경계요소 방정식이 구해진다.

$$[A]\{u\} = [B]\{t\} + \{R\} \quad (18)$$

식 (18)에서 A와 B는 영향행렬을 나타내고, R은 점탄성 이력을 나타낸다. 식 (18)에 경계조건을 적용하면, 경계면 전체에서의 응력(표면력)과 변위가 구해진다.⁽⁷⁾

위와 같은 과정을 통해서 구해진 표면력과 변위 값들을 식 (14)와 식 (16)에 사용하면 $G(t)$ 를 구할 수 있는데, 수치 해석은 균열 길이 a_1 과 a_2 에 대해서 두 번 수행해야 한다. 앞에서 기술한 것처럼, 균열 길이 a_1 과 a_2 의 차이는 매우 작아야 정확한 $G(t)$ 를 얻을 수 있으므로, 실제 계산에서는 수치해석을 두 번 이상 수행하게 된다.

4. 수치해석 결과

2장과 3장에서 설명한 과정에 의해 계산되는 $G(t)$ 의 정확성을 조사하기 위하여, 2개의 예제가 선택되었고, 계산 결과는 정밀해와 비교하였다. 수치해석 과정에서, 평면 변형을 상태를 가정하였고, 선택된 문제들의 두께는 모두 단위 크기를 갖는다고 가정하였다. 정밀해는 탄성 해에 탄성-점탄성 대응원리를 적용하여 계산하였다. 사용된 예제들에 대한 점탄성 모델은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mu(t) &= \mu_o + \mu_1 e^{-\frac{t}{\alpha}} \\ k(t) &= k_o \end{aligned} \quad (19)$$

여기서, $\mu(t)$ 는 전단이완계수 (shear relaxation modulus)를 나타내고, $k(t)$ 는 체적 이완계수(bulk relaxation modulus)를 가리키며, α 는 재료의 점탄성 이완 시간(relaxation time)을 나타낸다. 여기에서는 체적 이완계수는 탄성거동을 한다고 가정하였고, 전단 이완계수는 선형 표준고체(linear standard solid)거동을 한다고 가정하였다. 또, 식 (19)로부터 다음과 같이 됨을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} \mu(0) &= \mu_o + \mu_1 \\ \mu(\infty) &= \mu_o \end{aligned} \quad (20)$$

수치해석을 위해서, $\mu(0) = 5000$, $\mu(\infty) = 1500$, $k_o = 10000$, 그리고 $\alpha = 2(\text{min.})$ 들이 사용되었다.

4.1 모서리 균열 문제

Fig. 1은 길이가 a 인 모서리 균열을 갖는 평판을 나타낸다. 점탄성 평판의 양단에는 균일한 인장응력 $\sigma_o H(t)$ 가 작용하고 있다. 여기에서 $H(t)$ 는 Heaviside 단위계단 함수를 나타낸다. 평판의 기하학적 치수는 $W=10$, $b=30$, $a=3$ 이며, $\sigma_o = 100$ 으로 가정하였다. 대칭성을 고려하여 오직 2분의 1만 모델링하면 된다. 경계요소 해석에는 56개의 2차 선 요소가 사용되었다.

경계요소법과 식 (16)을 통해서 얻어진 결과들의 정확성을 조사하기 위해서 해당 균열문제에 대한 정밀(closed form)한 $G(t)$ 표현식을 구해야 한다. 탄성-점탄성 대응원리를 탄성 식에 적용하면 라플라스 변형공간에서의 점탄성 $G^*(p)$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$G^*(p) = (1 - \nu^*) \frac{K^2}{E^*} \quad (21)$$

식 (21)에서 E^* 와 ν^* 는 라플라스 변환된 인장이완계수와 점탄성 포와송 비를 나타낸다. 식 (19), (20)과 탄성-점탄성 대응원리를 식 (21)에 적

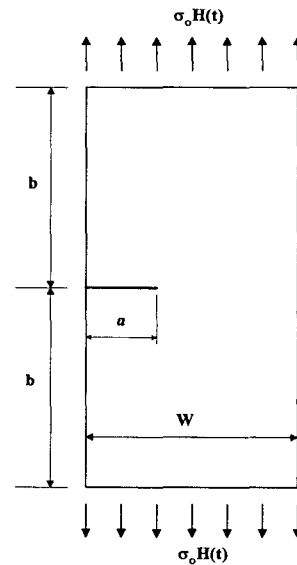


Fig. 1 Single edge cracked plate tension specimen

용한 후 라플라스 역변환을 실행하면 다음과 같은 정밀해가 구해진다.

$$G(t) = G_o [a_1 + a_2 e^{-\lambda_1 t} + a_3 e^{-\lambda_2 t}] H(t) \quad (22)$$

여기서,

$$G_o = \left[\sigma_o \sqrt{\pi a} F\left(\frac{a}{W}\right) \right]^2 \frac{3k_o + 4\mu(0)}{4\mu(0)[3k_o + \mu(0)]}$$

$$a_1 = \frac{\mu(0)[3k_o + 4\mu(\infty)][3k_o + \mu(0)]}{\mu(\infty)[3k_o + 4\mu(0)][3k_o + \mu(\infty)]}$$

$$a_2 = -\frac{[\mu(0) - \mu(\infty)][3k_o + \mu(0)]}{\mu(\infty)[3k_o + 4\mu(0)]} \quad (23)$$

$$a_3 = -\frac{3\mu(0)[\mu(0) - \mu(\infty)]}{[3k_o + \mu(\infty)][3k_o + 4\mu(0)]}$$

$$\lambda_1 = \frac{\mu(\infty)}{\mu(0)\alpha}, \quad \lambda_2 = \frac{3k_o + \mu(\infty)}{[3k_o + \mu(0)]\alpha}$$

$$F\left(\frac{a}{W}\right) = 1.12 - 0.231\left(\frac{a}{W}\right) + 10.55\left(\frac{a}{W}\right)^2 - 21.72\left(\frac{a}{W}\right)^3 + 30.39\left(\frac{a}{W}\right)^4 \quad (11)$$

$G(t)$ 의 값은 $\Delta a (= a_2 - a_1) = 0.03$ 에 대해서 식 (16)을 이용하여 계산하였다. Fig. 2는 수치해석 결과를 보여주고 있다. 시간 $t=50$ 분이 경과하는 동안 정밀해(Analytical Solution)와 경계요소해석 결과(BEM Results) 사이에 발생한 오차는 약 1%였다. 경계요소법과 식 (16)을 사용하여 계산된 결과를 정밀해와 비교할 때 본 논문에서 제시된 방법으로 계산된 결과는 매우 정확한 값을 나타내주고 있다.

4.2 3점 굽힘 모서리 균열 문제

Fig. 3은 길이가 a 인 모서리 균열을 갖는 시편을 나타낸다. 시편은 3점 굽힘(Three-point bending)상태에 있다. 시편의 상단 중앙 부분에는 집중하중 $PH(t)$ 가 작용하고 있다. 여기에서 $H(t)$ 는 Heaviside 단위계단 함수를 나타낸다. 시편의 기하학적 치수는 $W=6, a=3, b=12$ 이며, $P=200$ 으로 가정하였다. 대칭성을 고려하여 오직 2분의 1만 모델링하면 된다. 경계요소 해석에는 52개의 2차 선 요소가 사용되었다.

경계요소법과 식 (16)을 통해서 얻어진 결과들의 정확성을 조사하기 위해서 해당 균열문제에 대한 정밀해를 구해야 한다. 식 (19), (20)과 탄성-점탄성 대응원리를 식 (21)에 적용한 후 라플라스 역변환을 실행하면 다음과 같은 정밀해가 구해진다.

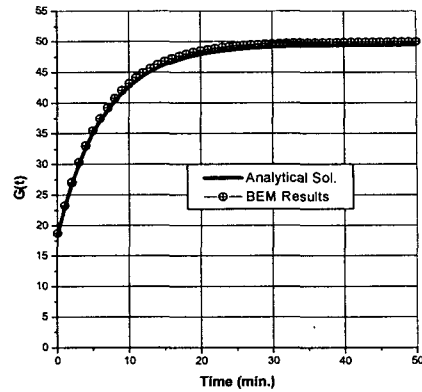


Fig. 2 $G(t)$ values of Single edge cracked plate tension specimen

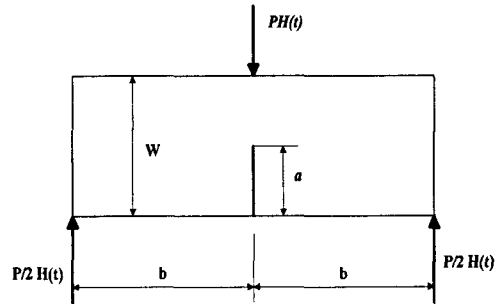


Fig. 3 Single edge cracked three point bending specimen

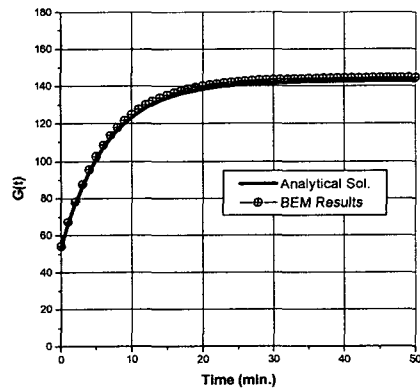


Fig. 4 $G(t)$ values of Single edge cracked three point bending specimen

$$G(t) = G_o [a_1 + a_2 e^{-\lambda_1 t} + a_3 e^{-\lambda_2 t}] H(t) \quad (24)$$

여기서,

$$G_o = \left[\frac{3Pb}{W^2} \sqrt{\pi a} F\left(\frac{a}{W}\right) \right]^2 \frac{3k_o + 4\mu(0)}{4\mu(0)[3k_o + \mu(0)]} \quad (25)$$

$$F\left(\frac{a}{W}\right) = 1.09 - 1.735\left(\frac{a}{W}\right) + 8.20\left(\frac{a}{W}\right)^2 - 14.18\left(\frac{a}{W}\right)^3 + 14.57\left(\frac{a}{W}\right)^4 \quad (26)$$

나머지 수식들은 식 (23)에 표현된 것들과 동일하다. G(t)의 값은 Δa = (a₂ - a₁) = 0.03에 대해서 식 (16)을 이용하여 계산하였다. Fig. 4는 수치해석 결과를 보여주고 있다. 시간 t=50분이 경과하는 동안 정밀해(A analytical Solution)와 경계요소해석 결과(BEM Results)사이에서 발생한 오차는 약 1% 이하였다. 경계요소법과 식 (16)을 사용하여 계산된 결과를 정밀해와 비교할 때 본 논문에서 제시된 방법은 매우 정확한 값을 산출함을 알 수 있다.

5. 결 론

본 논문에서는, 점탄성 변형에너지 방출률 G(t)에 대한 표현식을 유도하였고 경계요소법을 사용하여 선형 점탄성체의 변형에너지 방출률, G(t)을 계산하는 방법을 제시하였다. 두 가지 예제에 대한 수치해석 결과를 정밀해와 비교했을 때 본 논문에서 제시된 방법은 매우 정확함을 보여주었다. 또 수치해석을 수행하는 과정에서 G(t)를 구하는 공식은 경계요소 프로그램의 후처리과정으로 쉽게 결합되기 때문에, G(t)를 계산과정에 소요되는 시간은 경계요소해석에 소요되는 시간에 비해 아주 작은 편이다. 따라서 본 논문의 방법은 선형 점탄성체의 신뢰성을 평가하는데 효율적으로 응용될 수 있다. 따라서 이러한 연구결과는 고분자 재료를 사용하는 모든 공학분야, 즉 반도체 산업분야, 항공산업 분야, 건축/토목 분야, 그리고 기계/구조분야등에서 널리 응용될 수 있다고 판단된다.

감사의 글

본 연구는 산업자원부의 지원에 의하여 기초 전력공학공동연구소(과제번호:02523)주관으로 수행되어진 것으로 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

참고문헌

- (1) McCartney, L. N., 1973, "Crack Growth Laws for a Variety of Viscoelastic Solids Using Energy and COD Fracture Criteria," *Int. J. Fracture*, Vol. 15, pp. 31~40.
- (2) Schapery, R. A., 1975, "A Theory of Crack Initiation and Growth in Viscoelastic Media-I. Theoretical Development," *Int. J. Fracture*, Vol. 11, pp. 141~159.
- (3) Cristensen, R. M. and Wu, E. M., 1981, "A Theory of Crack Growth in Viscoelastic Materials," *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 14, pp. 215~225.
- (4) Williams, J. G., 1985, *Fracture Mechanics of Polymers*, Ellis Horwood..
- (5) Sun, B. and Hsiao, C. C., 1988, "Viscoelastic Boundary Element Method for Analyzing Polymer Quasifracture," *Computers & Structures*, Vol. 30, pp. 963~966.
- (6) Sensale, B. and Greus, G. J., 1993, "Boundary Element Analysis of Viscoelastic Fracture," *Boundary Element XV*, eds.(Brebba C. A. and Rencis J. J.), *Elsevier Science Publishers*, pp. 291~301.
- (7) Lee, S. S. and Westmann, R. A., 1995, "Application of High Order Quadrature Rule to Time Domain Boundary Element Analysis of Viscoelasticity," *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, Vol. 38, pp. 607~629.
- (8) Lee, S. S., 1995, "Boundary Element Analysis of Linear Viscoelastic Problems Using Realistic Relaxation Functions," *Computers and Structures*, Vol.55, pp.1027~1036
- (9) Lee, S. S., 2001, "Boundary Element Analysis of the Singuary Hygrothermal Stresses in a Bonede Viscoelastic Thin Film," *Int. J. Solids and Structures*, Vol.38, pp.401~412

(10) Brebbia, C. A. and Dominguez J., 1989, Boundary Element-An Introductory Course, McGraw-Hill Book Co.

(11) Tada, H., Paris, P. C. and Irwin, G. R., 1973, The Stress Analysis of Cracks Handbook, Del Research Corporation, Hollertown, PA.