

물성치의 불확실성을 고려한 단일 겹치기 이음의 응력해석

Stress Analysis of Single-Lap Adhesive Joints Considering Uncertain Material Properties

김 태 욱†

Tae-Uk Kim

(논문접수일 : 2003년 6월 23일 ; 심사종료일 : 2003년 12월 9일)

요 지

접착제와 피착재의 물성치는 고정된 값을 가지기보다 항상 어느 정도의 불확실성을 내포하고 있으며, 이는 결합부의 성능에 영향을 미치게 된다. 본 논문에서는 컨벡스 모델링을 이용하여 불확실한 물성치를 갖는 단일 겹치기 이음의 응력해석을 수행하였다. 불확실성을 고려한 수치해석 결과, 결합부에 작용하는 전단 및 수직 응력은 증가하였으며 이는 결합부의 강도 해석에 불확실성이 반드시 고려되어야 함을 보여준다. 또한 컨벡스 모델링의 신뢰성과 효율성을 입증하기 위해 몬테카를로 기법에 의한 응력 해석 결과와 비교하였으며, 두 방법에 의한 결과는 잘 일치함을 알 수 있었다.

핵심용어 : 단일 겹치기 이음, 컨벡스 모델링, 몬테카를로 모사

Abstract

This paper deals with stress analysis of single-lap adhesive joints which have uncertain material properties. Basically, material properties have a certain amount of scatter and such uncertainties can affect the performance of joints. In this paper, the convex modeling is introduced to consider such uncertainties in calculating peel and shear stress of adhesive joints and the results are compared with those from the Monte Carlo simulation. Numerical results show that stresses increase when uncertainties considered, which indicates that such uncertainties should not be ignored for estimation of structural safety. Also, the results obtained by the convex modeling and the Monte Carlo simulation show good agreement, which demonstrates the effectiveness of convex modeling.

Keywords : single-lap adhesive joint, convex modeling, monte carlo simulation

1. 서 론

접착제를 사용하는 접착 이음은 시공이 간편하고, 구조 중량을 줄일 수 있어 항공 산업 등에 널리 이용되는 방법이다. 이러한 접착 이음의 종류는 피착재(adherend)의 조합과 접합부의 형상 및 이에 가해지는 하중의 형태에 따라 여러 가지로 분류되는데, 특히 단일 겹치기 이음(single-lap adhesive joint)은 사용이 간편하여 널리 적용되는 체결 방법이다. 통상적으로 접착부의 양단에서는 전단 및 수직 응력이 급격히 증가하는 응력 집중현상을 보이게 되며, 이

는 접합부 파손의 주원인이 된다고 알려져 있다. 따라서 접합부의 구조 안전성을 평가하기 위해서는 이의 정확한 응력분포 해석이 필수적이며, 다양한 모델링 및 해석 기법이 제시되었다.^{1)~4)}

단일 겹치기 이음에 관해서도 많은 해석 결과가 발표되었으나, 현재까지 대부분의 연구는 물성치가 고정된 값을 가진다는 가정하에 이루어 졌다. 그러나 현실적으로 재료의 물성치는 고정된 값을 가진다기보다 항상 어느 정도의 불확실성 또는 편차를 보이기 마련이다. 이러한 불확실성은 생산 공정상의 결함, 사용 환경, 측정 오차 등 다양한

† 책임저자, 정회원 · 한국항공우주연구원 선임연구원
전화: 042-860-2025; Fax: 042-860-2009
E-mail: tukim@kari.re.kr

• 이 논문에 대한 토론을 2004년 3월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2004년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

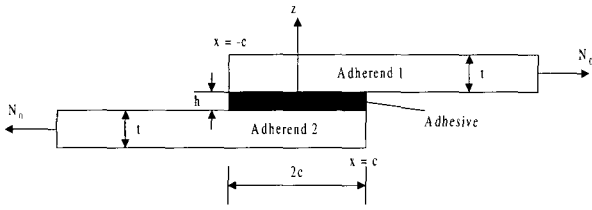


그림 1 단순인장 상태에 있는 겹치기 이음

요인에서 비롯될 수 있으며, 재료의 강성이나 강도에 반드시 영향을 미치게 된다. 따라서 접착부 설계 및 해석의 신뢰성을 확보하기 위해서는 이러한 재료 물성치의 편차를 반드시 고려해야 할 것이다.

이러한 불확실성을 고려하기 위한 방법으로는 먼저 확률론적인 기법이 있다. 그러나 이 방법은 불확실성을 갖는 물성치의 확률 모델을 만들기 위한 충분한 자료가 있어야 하며, 자료가 불충분 또는 부정확할 경우 해석 오차가 커질 수 있는 단점을 가진다. 이에 대한 대안의 하나로서 컨벡스 모델링(convex modeling)^{5)~8)} 기법을 들 수 있다. 이 방법은 확률 분포를 구하기 위한 충분한 자료가 없어 확률론적인 접근이 어려울 때도 변동 특성을 갖는 물성치의 분포 범위만 알면 해석이 가능한 장점이 있다.

본 논문에서는 단일 겹치기 이음의 응력 해석에 컨벡스 모델링 기법을 도입하여 물성치의 불확실성을 고려하고, 불확실성이 응력분포에 미치는 영향을 수치예제를 통해 보이고자 하였다. 또한 불확실한 물성치의 처리에 몬테카를로 기법(Monte Carlo simulation)을 적용하여 응력 해석을 수행하고, 컨벡스 모델링에 의한 해와 비교하여 논문에서 제시한 기법의 타당성을 검증하였다.

2. 기본 이론

2.1 단일 겹치기 이음의 모델링

그림 1과 같은 단일 겹치기 이음의 응력해석에는 다양한 모델링 및 해석 기법이 제시되었다. 본 논문에서는 Ojalvo와 Eidinoff¹⁾가 제안한 이론에 따라 단일 겹치기 접합부를 모델링하고 응력분포를 계산하였다. 다음은 지배 방정식과 접착제 내의 전단 및 수직 응력분포를 구하는 과정을 간략히 나타낸 것이다. 지배 방정식의 유도에는 다음의 기본 가정이 적용된다.

- 각 피착제는 평면 응력(plane stress)상태이며, 고전 판이론(CLT)이 적용된다.
- 접착제 내의 길이 방향 수직응력은 무시한다.
- 접착제의 x, z 방향 변위는 두께 방향으로 선형적 분포를

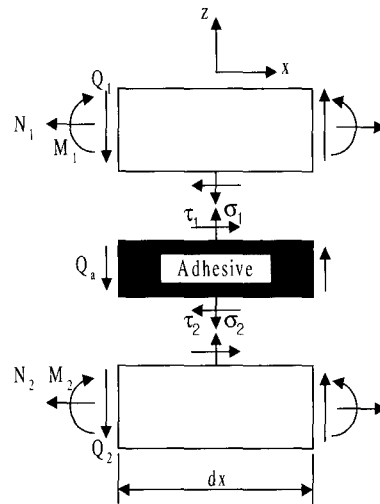


그림 2 접합부 요소와 작용 응력

가진다.

그림 2는 임의의 접착부 요소에 작용하는 응력 상태를 나타낸 것이다. 이 때 접착제에 작용하는 응력은 기본 가정에 따라 식(1), (2)와 같이 정의할 수 있다.

$$\tau_0 = \frac{1}{2} (\tau_1 + \tau_2) \quad (1)$$

$$\sigma_a = \sigma_1 = \sigma_2 \quad (2)$$

여기서 τ_1, τ_2 는 각각 접합면의 상, 하단에 작용하는 전단응력이며, σ_a 는 수직응력성분으로 두께 방향으로 일정한 값을 가진다. τ_0 와 σ_a 를 구하기 위한 지배 방정식은 접착제와 피착제의 평형 및 구성 방정식으로부터 유도할 수 있는데, Ojalvo와 Eidinoff가 제시한 각 응력 성분의 최종적인 형태는 식(3), (4)와 같다.

$$\tau^* = A \cosh(\lambda \sqrt{2+6(1+\beta)^2} x^*) + B \quad (3)$$

$$\sigma^* = C \sinh(\alpha_1 x^*) \sin(\alpha_2 x^*) + D \cosh(\alpha_1 x^*) \cos(\alpha_2 x^*) \quad (4)$$

계수 A, B, C, D는 경계조건으로부터 결정할 수 있으며, 모든 변수는 다음과 같이 무차원화된 값이다.

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{x}{c} & \tau^* &= \frac{2\tau_0 c}{N_0} & \sigma^* &= \frac{2\sigma_a c}{N_0} \\ \beta &= h/t & \lambda^2 &= \frac{G_a c^2}{E t h} & \rho^2 &= \frac{2AE_a c^4}{E h t^3} \\ \alpha_1^2 &= \frac{3\beta\lambda^2}{2} + \frac{\rho}{2} & \alpha_2^2 &= -\frac{3\beta\lambda^2}{2} + \frac{\rho}{2} \end{aligned} \quad (5)$$

여기서, E_a 와 G_a 는 각각 접착제의 탄성 계수(Young's modulus)와 전단 탄성계수(Shear modulus)를 나타낸다. 또한 접합면 상, 하단의 전단응력 τ_1 과 τ_2 는 다음의 관계식으로 구할 수 있다.

$$\tau_1^* = \tau^* + \Delta\tau^* \tag{6}$$

$$\tau_2^* = \tau^* - \Delta\tau^* \tag{7}$$

여기서 $\Delta\tau^*$ 는 식(8)에 의해 구할 수 있으며, $\gamma = \frac{t}{2c}$ 로 정의된다.

$$\Delta\tau^* = \frac{6\beta\lambda^2}{\rho^2\gamma} \sigma^* \tag{8}$$

2.2 물성치의 컨벡스 모델링

본 논문에서는 접합부의 응력 해석에 물성치의 불확실성을 고려하게 된다. 이때, 접착제와 피착재의 물성치는 편차를 가지며 분포하나, 정확한 분포함수에 대한 정보를 모르고 단지 분포 범위만을 안다고 가정한다. 이와 같은 상황에서 확률론적인 방법은 물성치의 확률분포함수를 가정해야 하는 어려움이 있으나, 컨벡스 모델링 기법은 분포 범위에 대한 정보만으로도 불확실성을 고려할 수 있게 된다.

다음에서 접합부의 응력을 계산할 때 물성치의 불확실성을 도입하는 과정에 대해 기술하기로 한다. 먼저 불확실성을 가지는 물성치 E , E_a , G_a 가 공칭값(nominal value)을 중심으로 일정 범위안에 분포한다고 가정한다. 이때 식(3)과 (4)의 응력성분은 다음과 같이 이들 물성치의 함수로 나타낼 수 있다.

$$\sigma = \sigma(E_1, E_2, E_3) \tag{9}$$

여기서 $E_1 = E$, $E_2 = E_a$, $E_3 = G_a$ 를 나타낸다. 또한 각 물성치의 공칭값을 E_i^0 라 하면, $E_i = E_i^0 + \delta_i$ 로 나타낼 수 있다. 이때 임의의 E_i 에서 함수값 $\sigma(E_i)$ 는 δ_i 의 일차항까지를 고려한 Taylor 전개를 이용하여 다음과 같이 선형화할 수 있다.

$$\sigma(E_i^0 + \delta_i) = \sigma(E_i^0) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \sigma(E_i^0)}{\partial E_i} \delta_i \tag{10}$$

한편, 다음과 같은 행렬을 정의한다.

$$\{f\}^T = \left[\frac{\partial \sigma(E_i^0)}{\partial E_1}, \frac{\partial \sigma(E_i^0)}{\partial E_2}, \frac{\partial \sigma(E_i^0)}{\partial E_3} \right] \tag{11}$$

$$\{\delta\}^T = [\delta_1, \delta_2, \delta_3] \tag{12}$$

따라서 Taylor 전개식(10)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sigma(E_i^0 + \delta_i) = \sigma(E_i^0) + \{f\}^T \{\delta\} \tag{13}$$

응력 해석에 물성치의 불확실성을 고려하는 것은 식(13)을 최대, 최소로 만드는 δ_i 를 찾고 이때의 함수값을 구하는 것이 된다. 따라서 만약 δ_i 가 컨벡스 집합을 이룬다면 식(13)은 δ_i 의 선형 함수이므로 최대, 최소를 집합의 경계에서 가지게 되어 문제 해결이 한결 간단해 진다. 따라서 해석의 다음 단계로 이들 편차(δ_i)로 이루어지는 컨벡스 집합을 만들어야 한다. 이를 위해 먼저 편차를 가지는 물성치의 분포 범위가 $E_i^L \leq E_i \leq E_i^U$ 일 때, 공칭값과 최대 편차를 식(14)와 같이 정의한다.

$$E_i^0 = \frac{1}{2}(E_i^U + E_i^L), \quad \Delta_i = \frac{1}{2}(E_i^U - E_i^L) \tag{14}$$

따라서, E_i 는 식(15)로 나타낼 수 있다.

$$E_i = E_i^0 + \delta_i, \quad |\delta_i| \leq \Delta_i \tag{15}$$

컨벡스 집합을 만들기 위해서 $|\delta_i| \leq \Delta_i$ 에 의해 만들어지는 상자(box) 형태의 영역을 포함하는 타원체(ellipsoid) 모양의 집합을 가정한다.

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\delta_i^2}{e_i^2} \leq 1 \tag{16}$$

식(16)의 타원체는 $V = e_1 e_2 e_3$ 의 체적을 가지는데, 식(15)에 의한 영역을 최소로 포함해야 한다. 왜냐하면 타원체의 체적이 커질수록 해의 정밀도가 낮아질 것이기 때문이다. 이를 위해서는 식(15)에 의한 영역의 모서리 점들($\delta_i = \pm \Delta_i$)이 타원체의 경계에 존재해야 한다. 이상의 조건으로부터 다음과 같은 Lagrangian을 만들 수 있으며, 이를 최소화함으로써 식(16)의 e_i 를 구할 수 있다.

$$L = C e_1 e_2 e_3 + \lambda \left(\frac{\Delta_1^2}{e_1^2} + \frac{\Delta_2^2}{e_2^2} + \frac{\Delta_3^2}{e_3^2} - 1 \right) \tag{17}$$

$\frac{\partial L}{\partial e_i} = 0, \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$ 의 조건을 대입하고 통상적인 계산을 통해 식(18)과 같이 e_i 를 구할 수 있다.

$$e_i = \sqrt{3}\Delta_i \quad (18)$$

따라서 불확실성을 가지는 물성치가 δ_i 의 편차를 가질 때, 응력의 최대값을 구하는 문제는 다음과 같이 기술할 수 있다.

$$\sigma_{\max} = \text{Max}_{\{\delta\} \in C(e)} (\sigma(E_i^0) + \{f\}^T \{\delta\}) \quad (19)$$

$$C(e) = \left\{ \delta : \sum_{i=1}^3 \frac{\delta_i^2}{e_i^2} = 1 \right\} \quad (20)$$

식(19)의 최대값은 Lagrange multiplier를 도입하여 풀 수 있다. 이를 위해 먼저 식(20)을 행렬식의 형태로 바꾸는데 $\{\epsilon\}$ 을 $\epsilon_{ii} = \frac{1}{e_i^2}$ 인 대각 행렬이라 정의하면 식(20)은

$$\{\delta\}^T \{\epsilon\} \{\delta\} - 1 = 0 \quad (21)$$

과 같이 나타낼 수 있다. 따라서 응력의 최대값은 식(22)의 Lagrangian으로부터 구할 수 있으며, 최종적인 형태는 식(23)과 같다.

$$L(\delta) = \{f\}^T \{\delta\} + \lambda (\{\delta\}^T \{\epsilon\} \{\delta\} - 1) \quad (22)$$

$$\sigma_{\max} = \sigma(E_i^0) + \sqrt{\sum_{i=1}^3 \left(e_i \frac{\partial \sigma(E_i^0)}{\partial E_i} \right)^2} \quad (23)$$

식(23)의 최대값을 구하기 위해서는 각 물성치의 편차에 대한 응력 성분의 민감도(sensitivity)를 계산해야 한다. 이론적으로 식(3)과 (4)를 직접 편미분하여 민감도를 계산할 수 있으나, 물성치에 대한 초월함수(transcendental function)의 형태이므로 해석적인 방법으로 구하기가 매우 복잡해진다. 또한 많은 문제의 경우 해석해가 존재하지 않으므로 수치적으로 민감도를 구해야 할 때가 많다. 본 논문에서도 식(23)의 계산을 위해 수치적으로 민감도를 구하게 된다.

3. 수치해석

3.1 불확실성을 고려한 응력 해석

물성치의 변화가 응력 분포에 미치는 영향을 알아보기

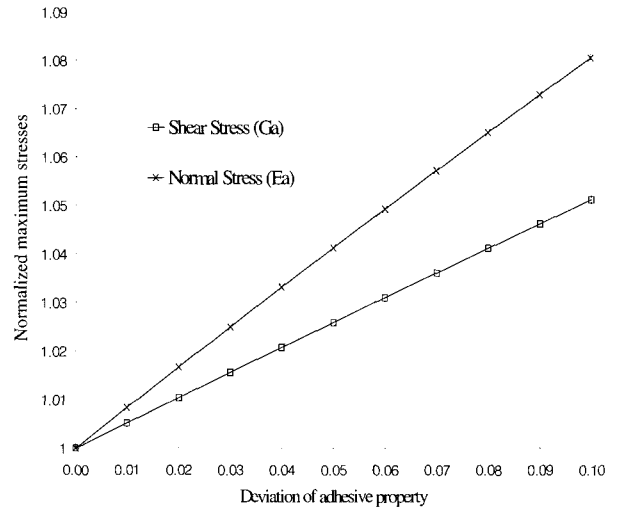


그림 3 물성치 변화에 따른 접합부 최대응력의 변화

위해, 접착제 물성치의 편차를 증가시키며 $x=c$ 에서 발생하는 최대 응력의 변화를 계산하였다. 그림 3은 G_a 에 따른 τ_1^*, E_a 에 따른 σ^* 의 증가를 나타낸 것인데, 응력 성분에 따라 물성치에 대한 민감도가 다를 수 있다.

컨벡스 모델링 기법에 사용하는 물성치 E_i 에 대한 응력의 민감도는 식(24)에 의해 수치적으로 구하게 된다.

$$\frac{\partial \sigma}{\partial E_i} \approx \frac{\sigma(E_i^0 + h) - \sigma(E_i^0 - h)}{2h} \quad (24)$$

이때, 오차의 정도는 $O(h^2)$ 이다. 식(24)를 식(23)에 적용하여 응력의 최대값을 구하는 과정은 다음과 같다. 계산의 편의를 위하여 모든 물성치는 공칭값으로부터 최대 $\pm 10\%$ 의 편차를 가진다고 가정한다. 이때 식(23)의 e_i 는

$$e_i = \sqrt{3}\Delta_i = \sqrt{3}/2(0.2 E_i^0) \quad (25)$$

가 된다. 한편 식(24)에서 $h = rE_i^0$ 라 둘 수 있으며, 본 논문에서는 $r=0.05$ 으로 계산하였다. 이상의 값들을 식(23)에 대입한 결과는 다음과 같다.

$$\sigma_{\max} = \sigma(E_i^0) + \sqrt{\sum_{i=1}^3 [\sqrt{3}\{\sigma(1.05E_i^0) - \sigma(0.95E_i^0)\}]^2} \quad (26)$$

수치해석에는 접착제와 피착재로 각각 Epoxy와 Aluminum을 사용하였으며, 물성치는 다음과 같다.

(Epoxy) $E_a = 3.068 \text{ GPa}, G_a = 1.138 \text{ GPa}$
 (Aluminum) $E = 68.95 \text{ GPa}$

그림 4와 5는 물성치의 불확실성을 고려한 결과와 공칭값을 이용해 계산한 결과를 비교한 것이다. 접합면의 양단에서 발생하는 응력의 최대값은 물성치의 불확실성을 고려할 경우 증가하였는데, 전단응력의 경우 12.8%, 수직응력의 경우 18.4% 정도의 증가량을 보였다. 또한 최대응력을 유발하는 경우의 각 물성치는 식(16)에 의해 만들어지는 컨벡스 집합의 경계에 존재하게 된다.

접합부의 파손은 양단에서 발생하는 응력집중 현상이 주 원인이 되므로, 이러한 응력의 증가는 구조 안전성에 크게 영향을 미친다. 따라서 접합부 설계 및 해석의 신뢰성과 안전성을 제고하기 위해서는 물성치의 불확실성을 고려하는 것이 필요함을 알 수 있다.

그림 6에서는 물성치가 가지는 편차(δ)의 최대값을 변화시키며 응력의 최대값을 구한 결과를 나타내었다. 즉 $\delta_{max} = 0, 0.025, 0.05, 0.075, 0.1$ 일 때 $x^* = 1$ 에서의 τ_1^* 과 σ^* 를 계산하고, 편차량과의 관계를 그래프로 나타낸 것이다. 각 응력은 δ 에 선형적으로 비례하여 증가하며, 수직응력이 편차의 증가에 더 민감하게 변화함을 보여준다.

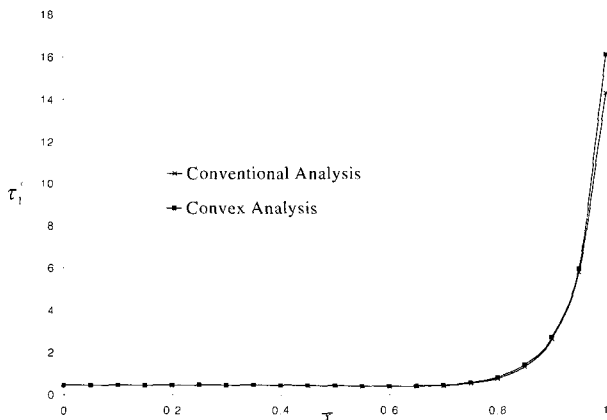


그림 4 전단응력의 비교

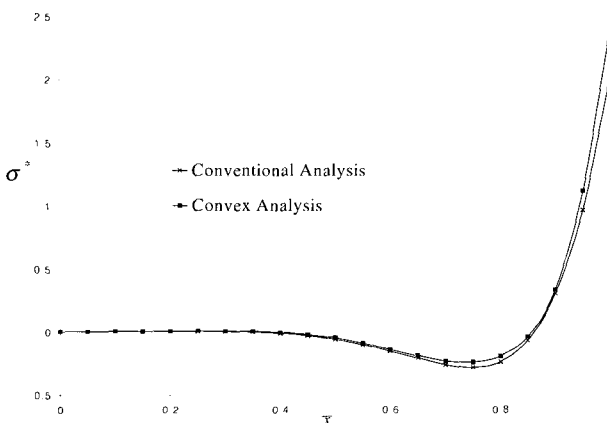


그림 5 수직응력의 비교

또한, 불확실성이 구조 안전성에 미치는 영향을 고려하기 위해서는 설계 과정에 충분한 안전율(safety factor)이 도입되어야 함을 알 수 있다.

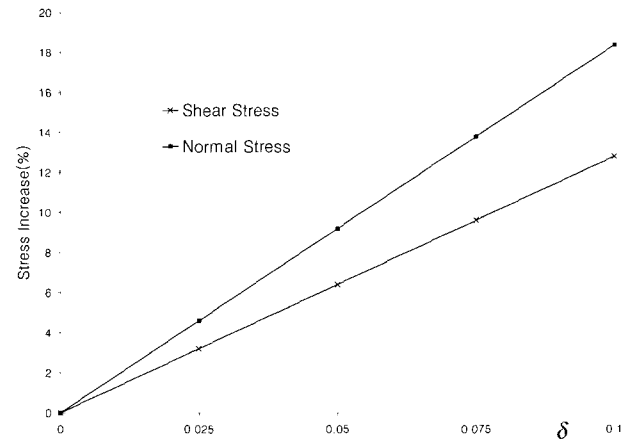


그림 6 δ 에 따른 응력 증가량

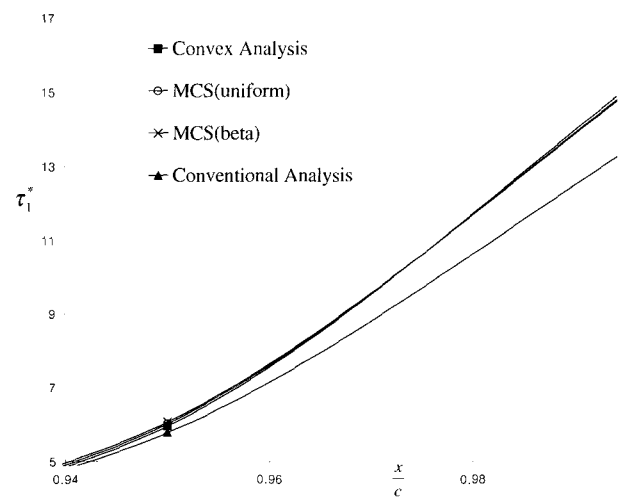


그림 7 몬테카를로 기법과의 비교 (τ_1^*)

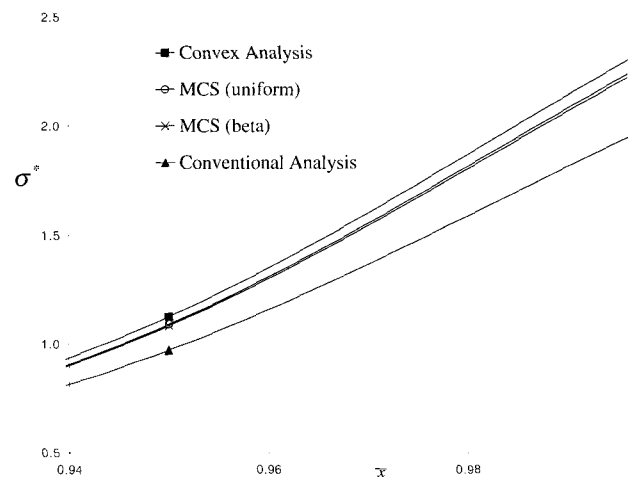


그림 8 몬테카를로 기법과의 비교 (σ^*)

3.2 몬테카를로 모사

몬테카를로 기법을 이용하여 응력 해석을 수행하고, 그 결과를 컨벡스 모델링에 의한 분포와 비교하였다. 불확실성을 갖는 물성치의 확률 분포로는 공칭값으로부터 최대 $\pm 10\%$ 의 편차를 갖는 범위 내에서 베타함수, $\beta(2,2)$ 와 균일(uniform) 분포를 가정하였다. 또한 각 물성치에 대해 8000개의 표본(sample points)을 사용하여 확률변수를 생성하였다.

그림 7과 8은 각 방법에 의한 접합부 양단 근처에서의 응력분포를 나타낸 것이다. 컨벡스 모델링에 의한 결과와 몬테카를로 기법에 의한 결과는 비교적 잘 일치하고, 최대 응력은 컨벡스 모델링이 가장 보수적인 결과를 주고 있다. 이상으로부터 컨벡스 모델링을 통해 물성치의 분포범위에 대한 정보와 비교적 간단한 계산만으로도 만족할 만한 해석 결과를 얻을 수 있으며, 따라서 물성치의 불확실성을 고려하는 효율적이고 신뢰성 높은 방법임을 알 수 있다.

4. 결 론

본 논문에서는 물성치의 불확실성을 고려하여 단일 겹치기 이음의 응력 해석을 수행하였다. 불확실성을 고려할 경우 전단, 수직응력 모두 증가하였고, 이로부터 해석 및 설계의 신뢰성을 위해서는 이러한 불확실성을 반드시 고려해야 함을 알 수 있다. 또한 컨벡스 모델링에 의한 결과는 물성치의 분포함수를 가정하고 몬테카를로 기법을 적용한 결과와도 잘 일치하였다.

불확실성을 고려하기 위해 도입한 컨벡스 모델링 기법은 확률론적인 방법과 달리, 불확실성을 가지는 물성치의 분포 범위에 대한 정보만으로 이의 영향을 응력 해석에 반영할 수 있는 방법이다. 정확한 물성치의 확률 분포함수를 알 경우에는 확률론적인 방법에 비해 정확도가 떨어진다고 볼 수 있으나, 현실적으로 엄밀한 분포 함수를 구하기가 어려우므로 불확실성의 영향을 근사적으로 파악하는 방법으로 매우 적합하다 하겠다.

본 논문에서 제시한 기법은 보다 복잡한 형상이나 하중

조건하의 접합이음에 적용 가능하며, 유한요소법과의 연계를 통한 연구가 진행중이다.

참 고 문 헌

1. Ojalvo, I. U. and Eidinoff, H. L., Bond Thickness Effects upon Stresses in Single-Lap Adhesive Joints, *AIAA J.*, Vol.16, No.3, 1978, pp. 204~211
2. Chien-Chang Lin and Yee-Shown Lin, A Finite Element Model of Single-Lap Adhesive Joints, *Int. J. Solids. Struct.*, Vol.30, No.12, 1993, pp.1679~1692
3. Chihdar Yang and Su-Seng Pang, Stress-Strain Analysis of Single-Lap Composite Joints Under Tension, *J. Engineering Materials and Technology*, Vol.118, 1996, pp.247~255
4. Shiuh-Chuan Her, Stress Analysis of Adhesively-Bonded Lap Joints, *Compos. Struct.*, Vol.47, 1999, pp.673~678
5. Ben-Haim, Y. and Elishakoff, I., *Convex Models of Uncertainty in Applied Mechanics*, Elsevier, Amsterdam, 1990
6. Elishakoff, I. and Starns, J. H., A Deterministic Method to Predict the Effects of Unknown-but-Bounded Elastic Moduli on the Buckling of Composite Structures, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, Vol.111, 1994, pp.155~167
7. Lombardi, M., Optimization of Uncertain Structures Using Non-probabilistic Models, *Comput. Struct.*, Vol.67, 1998, pp.99~103
8. Kim, T. U., and Sin, H. C., Optimal Design of Composite Laminated Plates with the Discreteness in Ply Angles and Uncertainty in Material Properties Considered, *Comput. Struct.*, Vol.79, 2001, pp.2501~2509