

두꺼운 축대칭 쌍곡형 쉘의 3차원 진동해석

Vibration Analysis of Thick Hyperboloidal Shells of Revolution from a Three-Dimensional Analysis

심 현 주*

Shim, Hyun-Ju

강 재 훈†

Kang, Jae-Hoon

(논문접수일 : 2003년 7월 11일 ; 심사종료일 : 2003년 11월 14일)

요 지

두꺼운 축대칭 쌍곡형 쉘의 고유진동수를 결정하는 3차원 해석법이 제시되었다. 수학적으로 2차원적인 전통적인 쉘 이론과는 달리, 본 연구의 해석법은 3차원적인 동탄성방정식을 근간으로 하였다. 반경방향, 원주방향, 축방향으로의 변위성분인 u_r , u_θ , u_z 를 시간에 대해서는 정현적으로, θ 에 대해서는 주기적으로, r 과 z 방향으로는 대수 다항식으로 표현하였다. 쌍곡형 쉘의 위치(변형률)에너지와 운동에너지를 정식화하고 리츠법을 사용하여 고유치문제를 해결하였으며, 진동수의 최소화과정을 통해 고유진동수를 엄밀해의 상위경계치로 구하였다. 대수 다항식의 차수가 증가하면 진동수는 엄밀해에 수렴하게 된다. 축대칭 쌍곡형 쉘의 하위 5개의 진동수에 대해서 유효숫자 4자리까지의 수렴성 연구가 이루어졌다. 쌍곡형 쉘의 서로 다른 2개의 두께 비, 3개의 축비(axis ratio), 3개의 높이 비를 가진 총 18개의 형상을 지닌 자유 경계의 축대칭 쌍곡형 쉘의 수치결과를 도표화하였다. 프와송 비(ν)는 0.3으로 고정하였다. 본 연구의 해석법은 매우 두꺼운 쉘 뿐만 아니라 얇은 쉘에도 적용이 가능하다.

핵심용어 : 3차원 해석, 축대칭 쌍곡형 쉘, 두꺼운 쉘, 진동, 리츠법

Abstract

A three-dimensional (3-D) method of analysis is presented for determining the free vibration frequencies of thick, hyperboloidal shells of revolution. Unlike conventional shell theories, which are mathematically two-dimensional (2-D), the present method is based upon the 3-D dynamic equations of elasticity. Displacement components u_r , u_θ , and u_z in the radial, circumferential, and axial directions, respectively, are taken to be sinusoidal in time, periodic in θ , and algebraic polynomials in the r and z directions. Potential(strain) and kinetic energies of the hyperboloidal shells are formulated, and the Ritz method is used to solve the eigenvalue problem, thus yielding upper bound values of the frequencies by minimizing the frequencies. As the degree of the polynomials is increased, frequencies converge to the exact values. Convergence to four-digit exactitude is demonstrated for the first five frequencies of the hyperboloidal shells of revolution. Numerical results are tabulated for eighteen configurations of completely free hyperboloidal shells of revolution having two different shell thickness ratios, three variant axis ratios, and three types of shell height ratios. Poisson's ratio (ν) is fixed at 0.3. Comparisons are made among the frequencies for these hyperboloidal shells and ones which are cylindrical or nearly cylindrical (small meridional curvature.) The method is applicable to thin hyperboloidal shells, as well as thick and very thick ones.

Keywords : three-dimensional analysis, hyperboloidal shell of revolution, thick shell, vibration, Ritz method

1. 서 론

구조요소의 3차원적 해석은 구조공학도의 오랜 목표가

되어왔다. 그 동안 3차원적 해석이 용이하지 못하여, 현 (string), 봉(bar), 보(beam)와 같은 구조요소는 수학적으로 1차원적인 모델로, 막(membrane), 판(plate), 쉘

† 책임저자, 정회원·중앙대학교(서울캠퍼스) 공과대학 건축공학과 조교수
전화: 02-820-5342; Fax: 02-812-4150

E-mail: jhkang@cau.ac.kr

* 중앙대학교(서울캠퍼스) 공과대학 건축공학과 박사과정생

• 이 논문에 대한 토론을 2004년 3월 31일까지 본 학회에 보내주
시면 2004년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

(shell)과 같은 구조요소는 2차원적인 모델로 개발하여 연구해 왔으나, 이러한 모델은 극히 제한적인 가정과 부정확성을 내포하고 있다.

수학적으로 2차원적인 전통적 쉘 이론은 쉘의 두께방향 변위의 변분과 관련된 지극히 제한되고 단순한 운동학적 가정을 근간으로 하고 있으며, 전단변형과 회전관성 효과가 고려되지 않아 두꺼운 쉘에 적용하기에는 적절하지 않다. 이러한 효과가 고려된 고계(higher order)의 쉘 이론이라 하더라도 이 역시 수학적으로는 2차원 이론이며, 보통의 두께를 가진 쉘의 하위 진동수에 대해서는 비교적 정확하지만, 상위 진동수와 매우 두꺼운 쉘에 대해서는 그 정확성을 보장할 수 없다.

공기역학, 강도, 안정의 측면에서 최적의 조건을 제공하는 쌍곡형 쉘 구조물은 냉각탑, 수탑(water tower), TV 탑, 전력선의 지지대, RC 물탱크, 공장의 굴뚝 등과 같은 산업용 건물과 공공건물에서 널리 사용된다.

쉘의 자유진동에 관한 방대한 양의 문헌이 존재한다. Leissa¹⁾의 모노그래프에서는 1960년대 까지 전 세계에서 발표된 약 1000여 개의 문헌이 요약되었으며, 이들 중 대부분은 원통형 쉘, 원추형 쉘, 구형 쉘과 같은 축대칭 회전 쉘에 관한 것이다. 이 중 단 3개의 문헌^{2)~4)}만이 축대칭 쌍곡형 쉘을 다룬 것이다.¹⁾ 최근에 Krivoshapko⁵⁾는 1975~2000년 사이에 발표된 축대칭 쌍곡형 쉘의 자유진동에 관한 문헌을 조사하였다.

그러나 이러한 해석^{2)~4), 6)~22)}은 모두 수학적으로 2차원적인 전통적 쉘 이론에 의한 것으로서 쉘의 두께가 얇을 때, 중앙면의 법선은 진동 변형 중에도 중앙면에 수직을 이루며, 그 길이가 변하지 않는다는 Kirchhoff의 가정을 그 근간으로 한 것이다. 이 쉘 이론에 의하면 8개의 운동미분 방정식이 만들어 지는데, 이 쌍곡형 쉘의 운동방정식은 변계수를 포함하고 있어서 방정식의 해를 구하기가 매우 어렵다.

더구나 이 전통적인 쉘 이론은 두께가 얇은 쉘에만 적용이 가능하다. 고계의 쉘 이론은 비교적 두꺼운 쉘의 하위 진동수를 구할 때 유용하지만, 쌍곡형 쉘에 대한 이 방정식은 더욱 복잡해진다.

축대칭 회전쉘은 원주방향(θ)으로 단혀 있는 쉘 ($0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$)의 특별한 경우로 원주방향으로의 주기성이 보장되어 본 연구의 3차원 해석은 보다 단순화될 수 있는 해석상의 효율성을 가진다.

본 연구에서는 3차원적 방법으로 축대칭 쌍곡형 쉘을 해석하였다. 운동방정식의 해를 직접 구하지 않고, 에너지법이 사용되었다. 에너지법의 일종인 리츠법을 사용할 때, 세 변위 성분에 충분한 자유도를 주어 엄밀해에 상위경계치로 수렴된 진동수를 구한다. 반경방향(r)으로 두께가 일정한 자유경계의 축대칭 쌍곡형 쉘에 대한 수치결과를 얻었다. 본 연구의 3차원적 수치결과는 유한요소법, 유한차분법 등

과 같은 근사해법과 개량된 2차원 쉘 이론 등 타 방법에 의한 결과의 정확도를 검증하는데 이용될 수 있다.

2. 해 석

그림 1은 반경방향(r)으로 두께(h)가 일정하고, 쉘의 축방향(z) 높이가 $H(=H_t+H_b)$ 인 축대칭 쌍곡형 쉘의 단면을 보여 주고 있다. 여기서, H_t 와 H_b 는 r 축에서 쉘의 상단과 하단까지의 거리이다. 쌍곡형 쉘의 중앙면의 주축과 종축의 길이는 $2a$ 와 $2b$ 이며, 점근선의 기울기는 $\pm b/a$ 이다. 본 연구의 해석에서는 그림 1의 원주좌표계(r, θ, z)를 사용하였으며, 여기서, θ 는 원주각이다. 쌍곡형 쉘의 중앙면의 방정식은 $(r/a)^2 - (z/b)^2 = 1$ 이므로, 이 쉘의 정의역은 다음 식과 같다.

$$\frac{a}{b}\sqrt{z^2+b^2} - \frac{h}{2} \leq r \leq \frac{a}{b}\sqrt{z^2+b^2} + \frac{h}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad -H_t \leq z \leq H_b \quad (1)$$

텐서해석(tensor analysis)²³⁾을 통해 원주좌표(r, θ, z)로 된 운동방정식을 구하면 다음 식과 같다.

$$\sigma_{rr,r} + \sigma_{rz,z} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{r\theta,\theta}) = \rho \ddot{u}_r \quad (2a)$$

$$\sigma_{r\theta,r} + \sigma_{\theta z,z} + \frac{1}{r}(2\sigma_{r\theta} + \sigma_{\theta\theta,\theta}) = \rho \ddot{u}_\theta \quad (2b)$$

$$\sigma_{rz,r} + \sigma_{zz,z} + \frac{1}{r}(\sigma_{rz} + \sigma_{\theta z,\theta}) = \rho \ddot{u}_z \quad (2c)$$

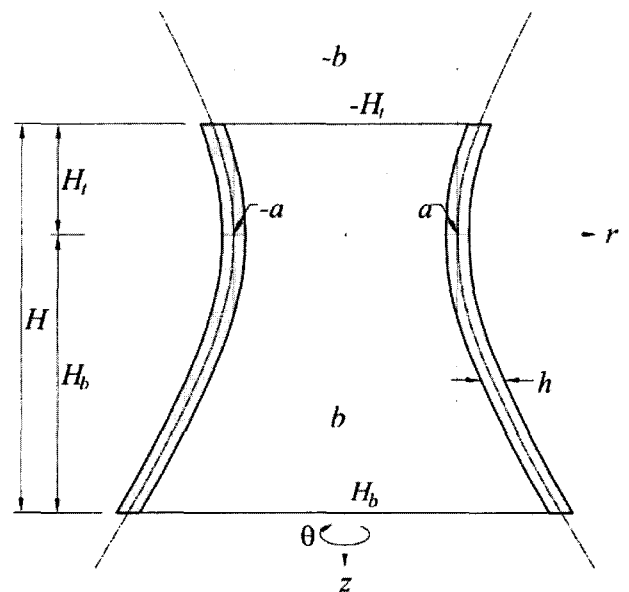


그림 1 A representative hyperboloidal shell of revolution with the cylindrical coordinate system(r, θ, z).

이 식에서 σ_{ij} =수직응력($i=j$)과 전단응력($i \neq j$)성분, $u_r, u_\theta, u_z = r, \theta, z$ 방향의 변위성분, ρ =단위 체적 당 질량, $\kappa(\cdot)$ =공간도함수, $\dot{\kappa}(\cdot)$ =시간도함수이다.

등방성 선형탄성재료에서 텐서형 응력(σ_{ij})과 변형률(ϵ_{ij})과의 관계식은 다음과 같다.

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon \delta_{ij} + 2G \epsilon_{ij} \quad (3)$$

이 식에서 λ 와 G 는 Lamé의 상수로서 등방성 재료에 대한 Lamé의 상수를 영계수(E)와 프와송비(ν)로 표현하면 다음 식과 같다.

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4)$$

또한 식(3)에서 $\epsilon \equiv \epsilon_{rr} + \epsilon_{\theta\theta} + \epsilon_{zz}$ 는 변형률 텐서의 대각합(trace)이며, δ_{ij} 는 크로넥커 델타(Kronecker's delta)이다.

3차원 변형률 텐서 ϵ_{ij} 와 변위성분 u_r, u_θ, u_z 와의 관계식²³⁾은 다음 식과 같다.

$$\epsilon_{rr} = u_{r,r}, \quad \epsilon_{\theta\theta} = \frac{u_{\theta,\theta} + u_r}{r}, \quad \epsilon_{zz} = u_{z,z} \quad (5a)$$

$$\epsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left[u_{\theta,r} + \frac{u_{r,\theta} - u_\theta}{r} \right], \quad \epsilon_{rz} = \frac{1}{2} (u_{r,z} + u_{z,r}),$$

$$\epsilon_{\theta z} = \frac{1}{2} \left[u_{\theta,z} + \frac{u_{z,\theta}}{r} \right] \quad (5b)$$

식(3)과 (5)를 식(2)에 대입하면 u_r, u_θ, u_z 의 자유진동을 지배하는 일련의 2계 편미분방정식(Navier's equations)이 생성된다. 그러나 쌍곡형 쉘의 경우 이 방정식에는 많은 항들이 변계수를 포함하고 있으므로 엄밀해를 구하는 것은 불가능하다. 따라서 본 연구에서는 에너지법의 일종인 리츠법으로 이 쉘을 해석한다.

구조체의 진동 변형 중 발생하는 변형률 에너지(V)는 다음 식과 같다.

$$V = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma_{rr}\epsilon_{rr} + \sigma_{\theta\theta}\epsilon_{\theta\theta} + \sigma_{zz}\epsilon_{zz} + 2\sigma_{r\theta}\epsilon_{r\theta} + 2\sigma_{rz}\epsilon_{rz} + 2\sigma_{\theta z}\epsilon_{\theta z}) r dr d\theta dz \quad (6)$$

이 식에서, Ω 는 식(1)에서 정의한 정의역이다.

식(3)과 (5)를 식(6)에 대입하면 변형률 에너지가 다음 식(7)과 같이 변위성분으로 표현되는데, 변형률 텐서 ϵ_{ij} 는 식(5)에서 이미 변위성분으로 표현되었다.

$$V = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\lambda(\epsilon_{rr} + \epsilon_{\theta\theta} + \epsilon_{zz})^2 + 2G(\epsilon_{rr}^2 + \epsilon_{\theta\theta}^2 + \epsilon_{zz}^2 + 2(\epsilon_{r\theta}^2 + \epsilon_{rz}^2 + \epsilon_{\theta z}^2))] r dr d\theta dz \quad (7)$$

구조체의 진동 변형 중 발생하는 운동 에너지(T)는 다음 식과 같다.

$$T = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho(\dot{u}_r^2 + \dot{u}_\theta^2 + \dot{u}_z^2) r dr d\theta dz \quad (8)$$

해석의 편리성을 위해 반경방향(r)과 축방향(z) 좌표를 무차원화 시키면 $\psi \equiv r/h$ 과 $\zeta \equiv z/H$ 이다. 따라서 무차원 원주좌표(ψ, θ, ζ)로 표현되는 쉘의 영역은 다음 식과 같다.

$$\psi_1(\zeta) \leq \psi \leq \psi_2(\zeta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad -\frac{H_t}{H} \leq \zeta \leq \frac{H_b}{H} \quad (9)$$

이 식에서,

$$\psi_1(\zeta) \equiv \frac{\sqrt{(H^*\zeta)^2 + k^2}}{kh^*} - \frac{1}{2},$$

$$\psi_2(\zeta) \equiv \frac{\sqrt{(H^*\zeta)^2 + k^2}}{kh^*} + \frac{1}{2} \quad (10)$$

$H^*(\equiv H/a)$ =무차원 높이, $h^*(\equiv h/a)$ =무차원 두께, $k(\equiv b/a)$ =축비(axis ratio)이다.

비감쇠 자유진동에서 세 변위의 정현적 시간반응과 축대칭 쌍곡형 쉘의 원형 대칭성(circular symmetry)으로 인해 세 변위를 다음 식과 같이 표현할 수 있다.

$$u_r(\psi, \theta, \zeta, t) = U_r(\psi, \zeta) \cos n\theta \sin(\omega t + \alpha) \quad (11a)$$

$$u_\theta(\psi, \theta, \zeta, t) = U_\theta(\psi, \zeta) \sin n\theta \sin(\omega t + \alpha) \quad (11b)$$

$$u_z(\psi, \theta, \zeta, t) = U_z(\psi, \zeta) \cos n\theta \sin(\omega t + \alpha) \quad (11c)$$

이 식에서 $U_r, U_\theta, U_z = \psi$ 와 ζ 의 변위함수, ω =고유진동수, α =초기조건으로 결정되는 임의의 위상각이며, θ 방향으로의 주기성을 보장하기 위해 원주 파동수 n 을 정수로 취한다($n=0, 1, 2, 3, \dots, \infty$). 식(11)은 비틀림 진동형을 제외한 모든 진동형을 포함하고 있다. 식(11)에서 $\cos n\theta$ 과 $\sin n\theta$ 을 서로 교체해도 동일한 진동형을 구할 수 있다. 교체된 해에서 $n > 0$ 일 때는 식(11)과 동일한 진동형을 구할 수 있지만, 진동형의 대칭축이 회전된다. $n=0$ 일 때 교체된 해는 $u_r = u_z = 0, u_\theta = U_\theta^*(r, z) \sin(\omega t + \alpha)$ 이며 이는 비틀림 진동형에 해당한다. 이 세 변위성분은 원주 파동수 n 과는 상관(相關, coupled)되어 있지 않으며,

r 과 z 에 상관된다.

리츠법에서는 진동의 한 주기에서 발생하는 최대 위치에너지 (V_{\max})와 최대 운동에너지 (T_{\max}) 범함수를 이용한다. 이 범함수는 변위 (11)을 식(7)과 (8)에 대입한 후 $\sin^2(\omega t + a)$ 과 $\cos^2(\omega t + a)$ 을 1로 취하여 구할 수 있다. 이 범함수를 무차원 좌표 ψ 와 ζ 로 표현하면 다음 식과 같아진다.

$$V_{\max} = \frac{GH}{2} \int_{H_1/H}^{H_b/H} \int_{\psi_1}^{\psi_2} \left[\frac{\lambda}{G} (k_1 + k_2 + K_3)^2 + 2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) + k_4^2 \right] \Gamma_1 + (k_5^2 + k_6^2) \Gamma_2 \psi d\psi d\zeta \quad (12)$$

$$T_{\max} = \frac{\rho H h^2 \omega^2}{2} \int_{-H_1/H}^{H_b/H} \int_{\psi_1}^{\psi_2} [(U_r^2 + U_z^2) \Gamma_1 + U_\theta^2 \Gamma_2] \psi d\psi d\zeta \quad (13)$$

이 식에서,

$$k_1 \equiv \frac{U_r + nU_\theta}{\psi}, \quad k_2 \equiv \frac{h^*}{H^*} U_{z,\zeta}, \quad k_3 \equiv U_{r,\psi} \quad (14a)$$

$$k_4 \equiv \frac{h^*}{H^*} U_{r,\zeta} + U_{z,\psi}, \quad k_5 \equiv \frac{U_\theta + nU_r}{\psi} - U_{\theta,\psi},$$

$$k_6 \equiv \frac{nU_z}{\psi} - \frac{h^*}{H^*} U_{\theta,\zeta} \quad (14b)$$

이며, Γ_1 와 Γ_2 는 상수로서

$$\Gamma_1 \equiv \int_0^{2\pi} \cos^2 n\theta = \begin{cases} 2\pi & \text{if } n=0 \\ \pi & \text{if } n \geq 1 \end{cases}$$

$$\Gamma_2 \equiv \int_0^{2\pi} \sin^2 n\theta = \begin{cases} 0 & \text{if } n=0 \\ \pi & \text{if } n \geq 1 \end{cases} \quad (15)$$

이다. 식(4)를 이용하여 식(12)에 있는 무차원 상수 λ/G 을 ν 만으로 표현하면 다음 식과 같다.

$$\frac{\lambda}{G} = \frac{2\nu}{1-2\nu} \quad (16)$$

식(11)의 변위함수 U_r , U_θ , U_z 를 대수 다항식으로 표현하면 다음 식과 같다.

$$U_r(\psi, \zeta) = \eta_r(\psi, \zeta) \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J A_{ij} \psi^i \zeta^j \quad (17a)$$

$$U_\theta(\psi, \zeta) = \eta_\theta(\psi, \zeta) \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^L B_{kl} \psi^k \zeta^l \quad (17b)$$

$$U_z(\psi, \zeta) = \eta_z(\psi, \zeta) \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N C_{mn} \psi^m \zeta^n \quad (17c)$$

이 식에서 $i, j, k, l, m, n = \text{정수}$, $I, J, K, L, M, N = \text{다항식에서 취한 최고차수}$, $A_{ij}, B_{kl}, C_{mn} = \text{임의의 미정계수}$, $\eta = \text{기하학적 경계조건에 따라 결정되는 함수}$. η 의 예를 들면 다음과 같다.

- (1) 자유 경계일 때 : $\eta_r = \eta_\theta = \eta_z = 1$
- (2) 쉘 하단 ($z = H_b$)은 고정, 나머지 경계는 자유일 때 :
 $\eta_r = \eta_\theta = \eta_z = \zeta - H_b/H$
- (3) 쉘 상단 ($z = -H_t$)은 고정, 나머지 경계는 자유일 때 :
 $\eta_r = \eta_\theta = \eta_z = \zeta + H_t/H$
- (4) 쉘 양단이 고정일 때 :
 $\eta_r = \eta_\theta = \eta_z = (\zeta - H_b/H)(\zeta + H_t/H)$

함수 η 에는 변위와 경사각과 관련된 기하학적 구속만이 부과된다. 이 η 는 식(17)의 대수 다항식과 함께 수학적으로 완비(complete)되었다.²⁴⁾ 따라서 식(17)은 I, J, \dots, N 이 커질수록 해의 정확도가 증가하며, 그 어떤 3차원적 운동도 표현할 수 있게 된다. 충분한 수의 항을 취하면 내부의 모든 운동학적 구속이 사라지게 되어 함수 (17)은 엄밀해에 수렴하게 된다.

임의의 계수 A_{ij}, B_{kl}, C_{mn} 에 관해서 진동수를 최소화하는 과정을 통해 고유치 문제를 정식화할 수 있으며, 다항식의 항 수가 유한할 때 존재하게 되는 내부의 구속효과를 최소화할 수 있다. 이러한 과정을 식으로 나타내면 다음과 같다.²⁵⁾

$$\frac{\partial}{\partial A_{ij}} (V_{\max} - T_{\max}) = 0, \quad (i=0,1,2,\dots, I; j=0,1,2,\dots, J) \quad (18a)$$

$$\frac{\partial}{\partial B_{kl}} (V_{\max} - T_{\max}) = 0, \quad (k=0,1,2,\dots, K; l=0,1,2,\dots, L) \quad (18b)$$

$$\frac{\partial}{\partial C_{mn}} (V_{\max} - T_{\max}) = 0, \quad (m=0,1,2,\dots, M; n=0,1,2,\dots, N) \quad (18c)$$

식(18)은 미지수가 A_{ij}, B_{kl}, C_{mn} 인 $(I+1)(J+1) + (K+1)(L+1) + (M+1)(N+1)$ 개의 선형, 동차, 대수 방정식이다. 비자명해(nontrivial solution)를 구하기 위해 계수행렬의 행렬식을 영으로 취하면 진동수(고유치)를 구할 수 있다. 이렇게 구한 진동수는 엄밀해의 상위 경계치이다. 각 진동수에 해당하는 진동형(고유함수)은 각 ω 를 일련의 대수 방정식에 다시 대입하고 계수비를 구하여 얻을 수 있다.

3. 수렴성 연구

정확한 진동수를 산정하기 위해서는 식(17)의 멱급수에 서 요구되는 항의 수를 결정하는 수렴성 연구가 선행되어야 한다. 수렴성 연구는 수학적으로 완비된 식(17)을 사용할 때 리츠법에 의한 진동수는 상위 경계치로 엄밀해에 수렴한다는 사실을 기초로 한다. 가정된 변위의 선택이 잘못 되었거나, 최소로 완비된 다항식에서 어떤 함수가 누락되면, 결과치가 엄밀해에 수렴하지 않거나 그 수렴의 속도가

표 1 Convergence of frequencies in $\omega a \sqrt{\rho/G}$ of a completely free, hyperboloidal shell of revolution for the five lowest bending modes($n=2$) with $b/a=1$, $h/a=0.2$, $H_b/a=4$, and $H_t/H_b=0$ ($\nu=0.3$).

TR	TZ	DET	1	2	3	4	5
2	2	12	.06729	0.5756	0.8806	1.127	1.377
2	4	24	.03690	0.1621	0.4344	0.6912	0.9963
2	6	36	.03244	0.1452	0.3854	0.6346	0.7071
2	8	48	.03190	0.1430	0.3799	0.5744	0.6903
2	10	60	.03177	0.1428	0.3797	0.5675	0.6885
2	12	72	.03173	0.1428	0.3796	0.5672	0.6885
3	2	18	.05364	0.1980	0.6597	0.7940	1.040
3	4	36	.03158	0.1286	0.3558	0.5691	0.6934
3	6	54	.02932	0.1219	0.3323	0.4840	0.6787
3	8	72	.02892	0.1206	0.3310	0.4556	0.6236
3	10	90	.02880	0.1202	0.3307	0.4513	0.6059
3	12	108	.02877	0.1202	0.3306	0.4511	0.6023
4	2	24	.04458	0.1809	0.4750	0.6979	1.009
4	4	48	.03025	0.1239	0.3360	0.5263	0.6886
4	6	72	.02904	0.1209	0.3312	0.4568	0.6386
4	8	96	.02881	0.1202	0.3306	0.4513	0.6076
4	10	120	.02874	0.1201	0.3305	0.4506	0.6012
4	12	144	.02872	0.1200	0.3304	0.4506	0.6006
5	2	30	.04164	0.1623	0.4535	0.6951	0.8591
5	4	60	.02962	0.1226	0.3320	0.4752	0.6753
5	6	90	.02890	0.1205	0.3308	0.4523	0.6182
5	8	120	.02876	0.1201	0.3305	0.4508	0.6018
5	10	150	.02874	0.1201	0.3305	0.4506	0.6012
5	12	180	.02871	0.1200	0.3304	0.4505	0.6005
5	13	195	.02871	0.1200	0.3303	0.4505	0.6003
6	2	36	.04016	0.1572	0.4183	0.6649	0.7255
6	4	72	.02920	0.1215	0.3313	0.4590	0.6484
6	6	108	.02882	0.1203	0.3306	0.4510	0.6051
6	8	144	.02874	0.1201	0.3305	0.4506	0.6010
6	10	180	.02872	0.1200	0.3304	0.4506	0.6006
6	12	216	.02871	0.1200	0.3303	0.4505	0.6005
7	2	42	.03877	0.1560	0.4117	0.6497	0.7075
7	4	84	.02904	0.1209	0.3309	0.4534	0.6245
7	6	126	.02878	0.1201	0.3305	0.4508	0.6017
7	8	168	.02873	0.1200	0.3304	0.4506	0.6006
7	10	210	.02872	0.1200	0.3304	0.4505	0.6005

Notes:
TR = Total numbers of polynomial terms used in the r (or ϕ) direction
TZ = Total numbers of polynomial terms used in the z (or ξ) direction
DET = Frequency determinant order

느려진다.

표 1은 $b/a=1$, $H_b/a=4$, $H_t/H_b=0$, $h/a=0.2$ 인 자유 경계의 축대칭 쌍곡형 쉘의 수렴성 연구 결과를 보여주고 있다. 이 쉘의 형상은 그림 2의 첫번째 쉘에 해당한다. 이 표는 $\nu=0.3$ 일 때 $n=2$ 인 휨 모드 5개의 무차원 진동수 $\omega a \sqrt{\rho/G}$ 를 보여주고 있다.

수렴성 연구의 단순화를 위해 r (또는 ϕ) 축과 z (또는 ξ) 축 방향으로 취한 다항식의 항 수를 동일하게 취하였다 (즉, $I=K=M$, $J=L=N$). 물론 어떤 쉘의 진동형에 대해서는 다항식의 항 수를 서로 달리 할 때 계산의 최적화를 이룰 수도 있다.

표의 **TR**과 **TZ**는 다항식에서 r (또는 ϕ)과 z (또는 ξ) 방향으로 사용된 항의 총수를 의미한다. 진동수 행렬식의 차수 **DET**와 **TR**, **TZ**와의 관계식은 다음과 같다.

$$DET = \begin{cases} TR \times TZ & \text{for torsional modes } (n=0) \\ 2 \times TR \times TZ & \text{for axisymmetric modes } (n=0) \\ 3 \times TR \times TZ & \text{for general modes } (n \geq 1) \end{cases} \quad (19)$$

표 1은 $TR(=I+1, K+1, M+1)$ 과 $TZ(=J+1, L+1, N+1)$ 가 증가함에 따라 5개의 진동수가 모두 단조 수렴함을 보여주고 있다. 예를 들면, (**TR**, **TZ**)=(5,12)=60항이 사용되어 **DET**=180일 때, 무차원 기본(최하위) 진동수 $\omega a \sqrt{\rho/G}$ 는 4자리 (0.02871)까지 수렴하게 된다. 또한 이러한 정확도를 얻기 위해서는 반경방향으로 최소한 5항 (**TR**=5)과 축방향으로 12항 (**TZ**=12)을 요구하고 있다. 표 1에서 밑줄이 그어진, 굵은 글씨체로 된 숫자는 가장 적은 크기의 행렬식으로 구한 가장 정확한 값(최소 상위 경계치)을 의미한다.

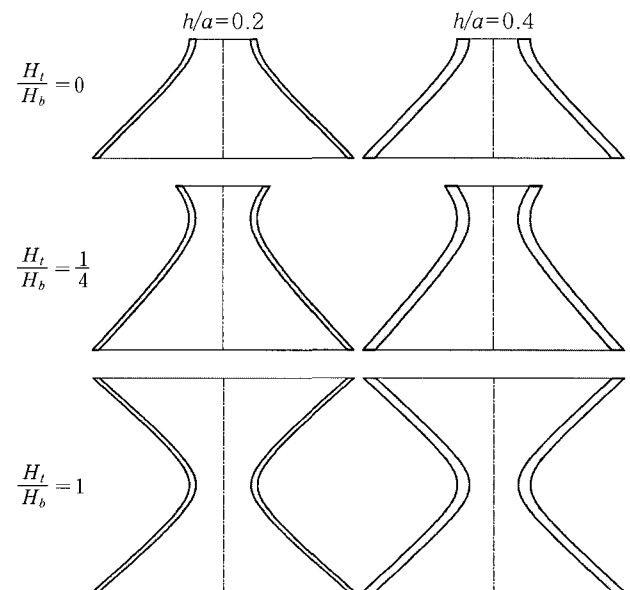


그림 2 Hyperboloidal shells of revolution for $b/a=1$ and $H_b/a=4$.

4. 수치결과와 토론

표 2~4는 $b/a=1$ (표 2), 2(표 3), 3(표 4)이고 $H_b/a=4$ 이며, 서로 다른 3개의 상하단 높이비 $H_t/H_b=0, 1/4, 1$ 과 서로 다른 2개의 두께 비 $h/a=0.2$ 와 0.4 를 가진 자유 경계의 축대칭 쌍곡형 쉘의 무차원 진동수 $\omega a \sqrt{\rho/G}$ 를 보여주고 있다. 프와송비(ν)는 0.3으로 고정하였으며, 표 2~4에 대응하는 쉘의 형상은 그림 2~4에서 보여지고 있다. 7개의 원주파동수($n=0^T, 0^A, 1, 2, 3, 4, 5$)에 대해서 각각 하위 5개의 모우드($s=1, 2, 3, 4, 5$)에 해당하는 총 35개의 진동수가 각 쉘의 형상에 대해서 주어졌다. 여기서, T 와 A 는 비틀림 모우드와 축대칭 모우드를 의미

한다. 하위 5개의 진동수는 굵은 글씨체로 찍어졌으며, 괄호 안의 숫자는 진동수의 순서를 의미한다. 진동수가 0인 강체 모우드는 이 표에서 생략하였다.

그림 2~4의 각 쉘의 형상에 해당하는 표 2~4의 결과를 요약하면 다음과 같다.

- (1) $n=2$ 인 휨 모우드가 가장 중요하며, 하위 5개의 진동수 중에서 기본 진동수를 포함하여 2개 또는 3개의 진동수가 $n=2$ 일 때 발생하는 반면, 축대칭 진동수(n

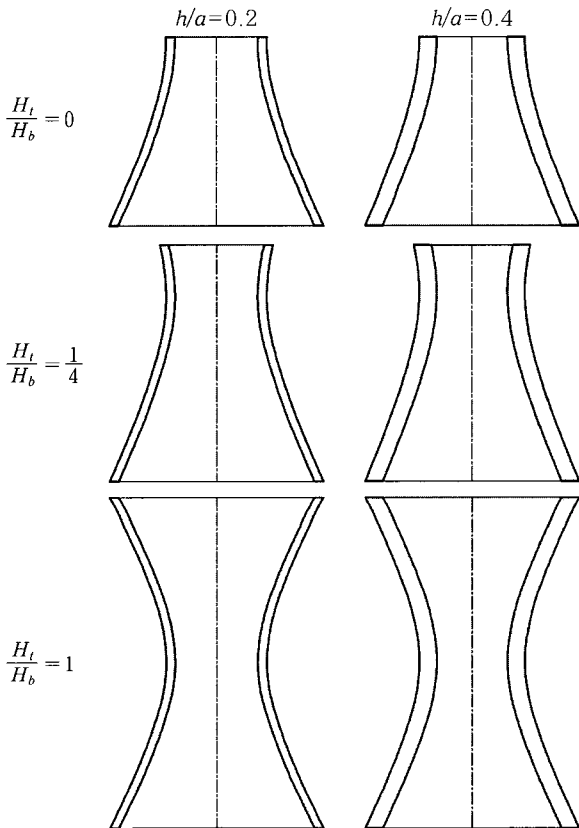


그림 3 Hyperboloidal shells of revolution for $b/a=2$ and $H_b/a=4$.

$=0^A$)는 모두 상위 모우드에서 발생한다.

- (2) 쉘의 두께 비(h/a)가 커질수록, $H_t/H_b=0$ 일 때 첫번째 비틀림 모우드($n=0^T$)와 $H_t/H_b=1$ 일 때 두 번째 비틀림 모우드를 제외한 모든 진동수가 증가한다.
- (3) 곡률이 증가할수록(즉, b/a 가 작아질수록), 대부분의 진동수가 감소한다.
- (4) 곡률이 작아지고 쉘의 두께가 두꺼워질수록, 비틀림 모우드($n=0^T$)와 $n=1$ 인 휨 모우드의 중요도는 커진다.
- (5) 상충부가 없는 축대칭 쌍곡형 쉘($H_t/H_b=0$)과 약간의 상충부가 존재하는 쉘($H_t/H_b=1/4$)을 서로 비교했을 때, 상위의 원주 파동수($n \geq 2$)를 갖는 진동수의 차이는 거의 없지만, $n \leq 1$ 일 때 진동수 간의 차이는 커진다.
- (6) $n > 3$ 일 때 $H_t/H_b=1$ 인 쉘의 각 형상에서 제 1 진동수와 제 2 진동수는 거의 일치하며, 제 3 진동수와 제 4 진동수도 마찬가지로이다. $n=2$ 일 때 이러한 유사성의 정도가 약해지지만, n 이 증가할수록 이 유사성의 정도는 커진다.
- (7) 곡률이 커지고(즉, b/a 의 감소) 쉘의 두께가 감소할수록, n 진동수의 중요도는 점점 커진다.

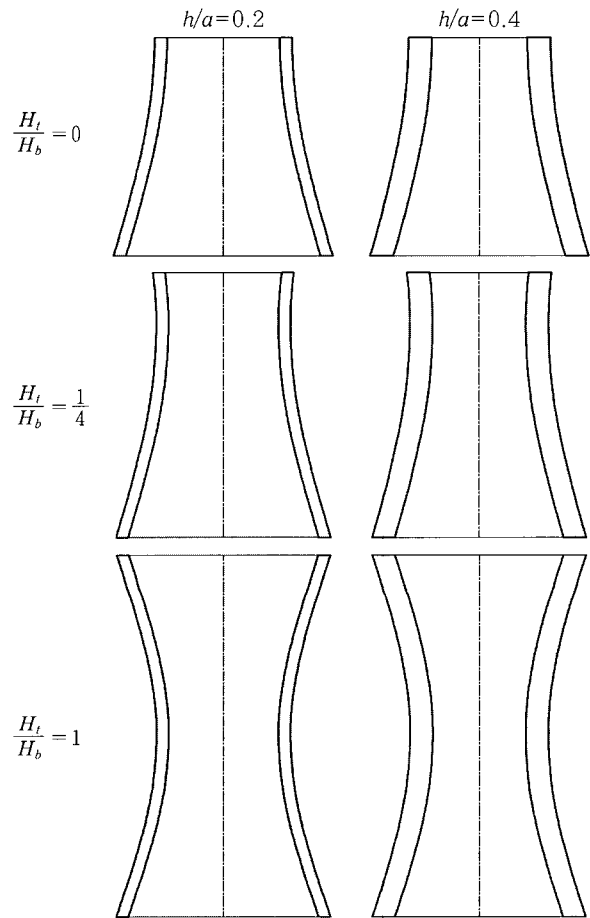


그림 4 Hyperboloidal shells of revolution for $b/a=3$ and $H_b/a=4$.

표 2 Frequencies in $\omega a \sqrt{\rho/G}$ of completely free, hyperboloidal shells of revolution with $b/a=1$ and $H_b/a=4$ for $\nu=0.3$.

n	s	$H_t/H_b=0$		$H_t/H_b=1/4$		$H_t/H_b=1$	
		$h/a=0.2$	$h/a=0.4$	$h/a=0.2$	$h/a=0.4$	$h/a=0.2$	$h/a=0.4$
0 ^T	1	0.7841	0.7835	0.5547	0.5561	0.1054	0.1067
	2	1.298	1.299	0.9701	0.9730	0.7841	0.7836
	3	1.872	1.875	1.507	1.511	0.9392	0.9408
	4	2.469	2.473	2.024	2.028	1.298	1.299
	5	3.074	3.077	2.527	2.532	1.555	1.558
0 ^A	1	0.3140	0.3255	0.3098	0.3193	0.2400	0.2416
	2	0.4207	0.4792	0.4087	0.4598	0.3140	0.3255
	3	0.5615	0.6950	0.5438	0.6708	0.3474	0.3779
	4	0.7183	0.8687	0.7008	0.8124	0.4207	0.4792
	5	0.8623	1.027	0.8076	0.9310	0.4814	0.5763
1	1	0.3285	0.3520	0.3126	0.3265	0.09520	0.09967(3)
	2	0.4450	0.5240	0.3966	0.4494	0.2779	0.2845
	3	0.5782	0.6053	0.5080	0.5448	0.3374	0.3706
	4	0.6111	0.7449	0.5515	0.6489	0.3629	0.3952
	5	0.7456	0.8966	0.6625	0.7332	0.4594	0.5256
2	1	0.02871(1)	0.04991(1)	0.03376(1)	0.05482(1)	0.03301(1)	0.05560(1)
	2	0.1200(4)	0.2016(4)	0.1383(5)	0.2168(4)	0.03695(2)	0.05589(2)
	3	0.3303	0.4294	0.3296	0.4432	0.1490	0.2184
	4	0.4505	0.6143	0.4130	0.5107	0.1986	0.2469
	5	0.6003	0.7106	0.4493	0.6512	0.3510	0.4623
3	1	0.05879(2)	0.1021(2)	0.05922(2)	0.1023(2)	0.05887(3)	0.1021(4)
	2	0.1924	0.3176	0.1971	0.3202	0.05973(4)	0.1024(5)
	3	0.3757	0.5937	0.3825	0.6014	0.1952	0.3190
	4	0.5333	0.8583	0.5300	0.8636	0.2000	0.3219
	5	0.7070	0.9123	0.6052	0.9014	0.3786	0.5973
4	1	0.09140(3)	0.1687(3)	0.09141(3)	0.1687(3)	0.09141(5)	0.1687
	2	0.2482	0.4379	0.2484	0.4380	0.09141	0.1687
	3	0.4443	0.7584	0.4454	0.7595	0.2484	0.4380
	4	0.6416	1.087	0.6455	1.090	0.2485	0.4381
	5	0.8654	1.130	0.8595	1.132	0.4452	0.7592
5	1	0.1339(5)	0.2524(5)	0.1339(4)	0.2524(5)	0.1339	0.2524
	2	0.3172	0.5768	0.3172	0.5769	0.1339	0.2524
	3	0.5315	0.9359	0.5317	0.9361	0.3172	0.5768
	4	0.7580	1.308	0.7586	1.309	0.3172	0.5769
	5	1.013	1.356	1.019	1.357	0.5316	0.9360

Notes :

T=Torsional mode; A=Axisymmetric mode.

Numbers in parentheses identify frequency sequence.

표 3 Frequencies in $\omega a \sqrt{\rho/G}$ of completely free, hyperboloidal shells of revolution with $b/a=2$ and $H_b/a=4$ for $\nu=0.3$.

n	s	$H_t/H_b=0$		$H_t/H_b=1/4$		$H_t/H_b=1$	
		$h/a=0.2$	$h/a=0.4$	$h/a=0.2$	$h/a=0.4$	$h/a=0.2$	$h/a=0.4$
0'	1	0.7922	0.7915	0.5775	0.5776	0.2061(5)	0.2077(3)
	2	1.500	1.501	1.182	1.184	0.7922	0.7915
	3	2.241	2.243	1.795	1.796	1.124	1.125
	4	2.985	2.987	2.399	2.401	1.500	1.501
	5	3.730	3.731	3.002	3.004	1.869	1.872
0 ^A	1	0.6939	0.7060	0.6794	0.6876	0.4766	0.4776
	2	0.8641	0.9372	0.8289	0.8838	0.6939	0.7060
	3	1.094	1.252	1.025	1.106	0.7315	0.7570
	4	1.311	1.324	1.170	1.275	0.8641	0.9375
	5	1.330	1.528	1.315	1.503	0.9245	1.009
1	1	0.6570	0.6821	0.5154	0.5267(4)	0.2080	0.2126(4)
	2	0.7778	0.7930	0.7317	0.7410	0.4547	0.4640
	3	0.8816	1.007	0.7685	0.8391	0.6956	0.7332
	4	1.112	1.169	0.9765	1.130	0.7192	0.7402
	5	1.189	1.377	1.145	1.178	0.8077	0.8371
2	1	0.08463(1)	0.1531(1)	0.09176(1)	0.1584(1)	0.09133(1)	0.1576(1)
	2	0.2037(3)	0.3707(3)	0.2177(3)	0.3857(3)	0.1004(2)	0.1625(2)
	3	0.4774	0.6491(5)	0.3485(5)	0.5287(5)	0.2265	0.3844
	4	0.7565	1.007	0.5830	0.7906	0.2738	0.4162
	5	1.053	1.145	0.8378	1.142	0.4942	0.6773
3	1	0.1947(2)	0.3531(2)	0.1950(2)	0.3532(2)	0.1949(3)	0.3532(5)
	2	0.4269(5)	0.7404	0.4309	0.7427	0.1952(4)	0.3533
	3	0.6752	1.129	0.6852	1.145	0.4281	0.7416
	4	0.8507	1.365	0.7157	1.195	0.4351	0.7445
	5	1.135	1.545	0.9278	1.474	0.6937	1.143
4	1	0.3320(4)	0.6065(4)	0.3320(4)	0.6065	0.3320	0.6066
	2	0.6482	1.120	0.6484	1.121	0.3320	0.6066
	3	0.9778	1.618	0.9806	1.621	0.6484	1.121
	4	1.233	1.942	1.205	1.944	0.6486	1.121
	5	1.430	2.027	1.265	1.975	0.9797	1.623
5	1	0.5043	0.9047	0.5043	0.9048	0.5044	0.9048
	2	0.9012	1.528	0.9013	1.528	0.5044	0.9049
	3	1.287	2.090	1.287	2.090	0.9013	1.528
	4	1.639	2.371	1.642	2.371	0.9014	1.528
	5	1.927	2.606	1.817	2.610	1.287	2.091

Notes:
 T=Torsional mode; A=Axisymmetric mode.
 Numbers in parentheses identify frequency sequence.

표 4 Frequencies in $\omega a \sqrt{\rho/G}$ of completely free, hyperboloidal shells of revolution with $b/a=3$ and $H_b/a=4$ for $\nu=0.3$.

n	s	$H_t/H_b=0$		$H_t/H_b=1/4$		$H_t/H_b=1$	
		$h/a=0.2$	$h/a=0.4$	$h/a=0.2$	$h/a=0.4$	$h/a=0.2$	$h/a=0.4$
0 ^T	1	0.7689	0.7686(5)	0.5801	0.5803(5)	0.2697(5)	0.2712(4)
	2	1.540	1.540	1.222	1.222	0.7689	0.7686
	3	2.314	2.315	1.848	1.849	1.151	1.152
	4	3.088	3.088	2.471	2.472	1.540	1.540
	5	3.861	3.861	3.093	3.094	1.927	1.928
0 ^A	1	0.9515	0.9596	0.8895	0.8913	0.5525	0.5528
	2	1.096	1.142	1.023	1.049	0.9515	0.9596
	3	1.294	1.383	1.205	1.276	0.9858	1.003
	4	1.454	1.516	1.387	1.496	1.096	1.142
	5	1.523	1.606	1.522	1.577	1.167	1.238
1	1	0.7620	0.7842	0.5649(5)	0.5763(4)	0.2514(4)	0.2559(3)
	2	0.8613	0.8728	0.8054	0.8199	0.5206	0.5313
	3	1.072	1.191	0.9711	1.026	0.7996	0.8290
	4	1.305	1.392	1.146	1.262	0.8538	0.8637
	5	1.418	1.579	1.297	1.393	0.9678	0.9839
2	1	0.1320(1)	0.2443(1)	0.1373(1)	0.2482(1)	0.1358(1)	0.2471(1)
	2	0.2362(2)	0.4395(2)	0.2427(2)	0.4502(2)	0.1482(2)	0.2521(2)
	3	0.4981(4)	0.6899(4)	0.3647(4)	0.5604(3)	0.2395(3)	0.4443(5)
	4	0.8641	1.132	0.6599	0.8884	0.3361	0.5139
	5	1.227	1.435	0.9731	1.296	0.5447	0.7479
3	1	0.3246(3)	0.5907(3)	0.3248(3)	0.5908	0.3248	0.5908
	2	0.5654	0.9854	0.5690	0.9881	0.3249	0.5908
	3	0.7318	1.249	0.7003	1.220	0.5684	0.9879
	4	0.9606	1.508	0.8198	1.347	0.5711	0.9889
	5	1.315	1.925	1.066	1.654	0.7434	1.266
4	1	0.5734(5)	1.018	0.5734	1.018	0.5735	1.018
	2	0.9222	1.552	0.9225	1.552	0.5735	1.019
	3	1.203	1.971	1.211	1.979	0.9224	1.552
	4	1.359	2.187	1.271	2.086	0.9227	1.552
	5	1.632	2.458	1.454	2.295	1.208	1.976
5	1	0.8787	1.504	0.8788	1.504	0.8789	1.504
	2	1.327	2.147	1.327	2.147	0.8790	1.504
	3	1.690	2.647	1.691	2.648	1.327	2.147
	4	1.945	2.981	1.924	2.982	1.327	2.147
	5	2.127	3.102	1.991	3.011	1.692	2.649

Notes:

T=Torsional mode; A=Axisymmetric mode.

Numbers in parentheses identify frequency sequence.

5. 결 론

3차원 리츠해석으로 두꺼운 축대칭 쌍곡형 쉘의 진동수를 구하는 과정을 최초로 제시하였다. 본 해석에서는 등방성 재료에 대한 3차원적인 동탄성 방정식을 사용하였으며, '변형률이 작다'라는 가정 이외에 그 어떤 변위에 관한 다른 구속을 두지 않았다. 바로 이 점이 쉘의 두께방향 변위의 변분에 관한 매우 제한적 가정을 하는 기존의 전통적인 2차원 쉘 이론과 가장 큰 차이를 이룬다.

McGee와 Leissa²⁶⁾의 연구에 의하면, 3차원 유한요소법으로도 3차원 리츠법으로 구한 진동수의 정확도에 상응하는 결과치를 구할 수는 있지만, 일반적으로 훨씬 더 많은 자유도가 요구되어(즉, 고유치 행렬식의 차수가 훨씬 크다), 리츠법은 수치계산의 효율성을 지닌다. 또한 리츠법에서는 수학적으로 완비된 변위함수를 사용할 때 엄밀한 진동수의 상위 경계 수렴치가 보장되는 특징을 가진다.

본 연구의 3차원적인 해석방법은 원주방향으로 닫힌 축대칭 회전쉘 뿐만이 아니라, 쉘축(z)에 대해서 360도 미만으로 모면(Generation Area)을 회전시킨 열린 쉘(open shell)에도 적용될 수 있다. 이 때 식(11)의 변위성분에서 방향으로의 주기성은 사라지게 되며, 식(17)의 변위함수는 와 뿐만이 아니라 의 다항식으로 표현된다.

본 연구에서 정식화된 장방정식(field equations)(2), (3), (5)와 에너지 범함수는 유한요소법, 유한차분법, Galerkin법, 에너지법 등을 이용하여 자유진동의 문제 뿐만이 아니라 강제진동, 파동의 전달, 정적·동적 변위와 응력을 계산하는 데 사용될 수 있다.

본 연구에서 정식화된 에너지 범함수는 균질한 재료로 된 쉘 뿐만이 아니라 이질재료로 된 쉘에서도 적용이 가능하다. 이 때 λ, G, E, ρ 는 상수가 아닌 함수로 표현된다.

감사의 글

심사자의 유익한 비평에 감사 드립니다.

이 논문은 2002년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었습니다(KRF-2002-003-D00405).

참 고 문 헌

1. Leissa, A. W., *Vibration of Shells*, U.S. Government Printing Office, Washington D.C., Reprinted by The Acoustical Society of America, 1973; 1993
2. Anon, *Report of the Committee of Inquiry into Collapse of Cooling Towers at Ferrybridge*, Monday 1 Nov., Central Electricity Generating Board, London, England, 1965
3. Neal, B. G., "Natural Frequencies of Cooling Towers", *J. Strain Analysis*, Vol.2, No.2, 1967, pp. 127~133
4. Carter, R. L., Robinson, A. R., and Schnobrich, W. C., "Free and Forced Vibrations of Hyperboloidal Shells of Revolution", *Civil Engineering Studies, Structural Research*, Univ. of Illinois, Vol.334, 1968
5. Krivoshapko, S. N., "Static, Vibration, and Buckling Analyses and Applications to One-Sheet Hyperboloidal Shells of Revolution", *Applied Mechanics Reviews*, Vol.55, No.3, 2002, pp.241~270,
6. Andronov, V. I., Boltuhov, A. A., and Povolotskiy, B. N., "Natural Vibrations of Cooling Tower Shells(in Russian)", *Stroit. meh. i raschet soor.*, Vol.4, 1966, pp.16~19
7. Stoneking, J. E., "Free Vibrations of Shells of Revolution with Variable Thickness", *Nuclear Engineering and Design*, Vol.24, 1973, pp.314~321
8. Sen Subir K. and Gould Phillip L., "Free Vibration of Shells of Revolution Using FEM", *L. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE*, Vol.100, No.2, 1974, pp.283~303
9. Tupikin, A. I., "A Free Vibration Investigation of a Cooling Tower Shell with the Help of a Finite Element Method(in Russian)", *Tr. Ts-NIISKa*, Vol.43, 1975, pp.28~46
10. Gould, P. L. and Basu, P. K., "Dynamische Untersuchung von Naturzugkhltrmen", *Konstr. Ingenieurbau. Ber.*, Vol.31, 1978, pp.82~83
11. Nelson, R. L and Thomas, D. L., "Free Vibration Analysis of Cooling Towers with Column Supports", *Journal of Sound and Vibration*, Vol.57, No.1, 1978, pp.149~153
12. Lyahina, L. I., "Natural Frequencies and Modes of a Hyperboloidal Cooling Tower Shell with Local Axisymmetrical Imperfections(in Russian)", *MKE raschotah zhelezob. plastin i obol.*, Frunze: FPI, 1979, pp.118~126
13. Delpak, R. and Hague, W. M., "An Experimental and Theoretical Investigation of the Frequencies and Mode Shapes of Axisymmetric Shell Models", *Journal of Sound and Vibration*, Vol.72, 1980, pp.235~249
14. Nelson, R., "Stresses in Shell structures", *Jo-*

- urnal of Sound and Vibration*, Vol.79, No.3, 1981, pp.397~414
15. Belikov, G. I. and Tarasov, A. A., "Free Vibration Optimization of Geometric Parameters of Cooling Tower Shells(in Russian)", *Stroit. mech. i raschet sooruzheniy*, Vol.4, 1982, pp.12~16
 16. Kustovskiy, V. D., "A Finite Element Solution of Free Vibration Problems for Thin Elastic Shells of Revolution Bounded by Parallels(in Russian)", *Nadezhnost sudov. mashin, Nikolaev: NKI*, 1983, pp.54~65
 17. Kolkunov, N. V. and Zveryaev, E. M., "Cooling Tower Shell Dynamics(in Russian)", *Teoriya i eksper. issled. prostranst. konstruktsiy. Primenenie obolochek v ing. soor.*: Intern. Congress, Moscow, Vol.3, 1985, pp.146~155
 18. Kosawada, T., Suzuki, K., and Takahashi, S., "Axisymmetric Free Vibrations of Shells of Revolution Having General Meridional Curvature(in Japanese)", *Trans. JSME*, C52, No. 473, 1986, pp.209~215
 19. Lin, A. N., Mozaffarian, H., and Helpingstine, M., "Measured Dynamic Response of Hyperbolic Shell", *Proc. 3rd US Nat. Conf. Earthquake Eng.*, Charleston, S.C., Vol.2.-El Cerrito, Calif., 1986, pp.1407~1418
 20. Wenda, L. and Shi-qiao, G., "The Effect of Local Geometric Imperfections of Rational Shell on Its Natural Frequencies and Modes", *Appl. Math. and Mech.*, Vol.8, No.11, 1987, pp.1013~1018
 21. Abramek, W., "Drgania wlasne hiperboloidalnej chlodni kominowej(in Polish)", *Inz. i bud.*, Vol.46, No.9, 1989
 22. Yangang, Z. and Jinren, J., "Dynamic Analysis of Hyperbolic Cooling Towers(in Chinese)", *Earthquake Eng. and Eng. Vibr.*, Vol.14, No.1, 1994, pp.61~71
 23. Sokolnikoff, I. S., *Mathematical Theory of Elasticity*, Second Edition, McGraw-Hill Book Co., New York, 1956
 24. Kantorovich, L. V. and Krylov, V. I., *Approximate Methods in Higher Analysis*, Noordhoff, Gronigen, The Netherlands, pp.266~268, 1958
 25. Ritz, W., "Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik", *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, Vol.135, 1909, pp.1~61
 26. McGee, O. G. and Leissa, A. W., "Three-Dimensional Free Vibrations of Thick Skewed Cantilever Plates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol.144, pp.305~322; Errata 149, 1991, pp.539~542