한국정밀공학회지 제20권 제7호 (2003년 7월)
Journal of the Korean Society of Precision Engineering Vol. 20, No. 7, July 2003.

유사등방성 이종재 접합계면 균열의 에너지 해방률에 관한 연구

이원욱*, 김진광*, 조상봉#

A Study on Energy Release Rate for Interface Cracks in Pseudo-isotropic Dissimilar Materials

Won-Wook Lee*, Jin-Kwang Kim* and Sang-Bong Cho#

ABSTRACT

The energy release rate for an interface crack in pseudo-isotropic dissimilar materials was obtained by the eigenfunction expansion method using the two-term William's type complex stress function. The complex stress function for pseudo-isotropic materials must be different from that for anisotropic materials. The energy release rate for an interface crack in pseudo-isotropic dissimilar materials was analyzed numerically by RWCIM. The results obtained were verified by comparing the other worker's results and discussed.

Key Words : Pseudo-isotropic material(유사등방성 재료), Eigenfunction expansion method(고유함수 전개법), Stress intensity factor (응력강도계수), Energy release rate (에너지 해방률), RWCIM (상반일 경로 적분법)

1. 서론

접합기술의 발달로 인해 서로 다른 성질의 재료를 접합한 이종재료가 여러 산업 분야에서 많이 이용되고 있다. 이러한 이종접합재료가 파괴되는 원인은 여러 가지가 있을 수 있으나, 가장 큰 원인으로는 접합계면 균열에 의해 파괴되는 경우라 하겠다. 따라서 이종접합재료를 사용하는 구조물에 있어서 접합부분에 대한 파괴역학적 강도평가법의 확립은 구조물의 안전이나 수명에 있어서 매우 중요한 연구과제라 하겠다.

등방성 이종재 접합계면 균열에 대한 연구는 Williams[1] 이후 많은 연구가 이루어져 왔으며, 접합계면의 V-노치 균열문제에 대한 연구는 Bogy[2]를 시작으로 중요성이 부각되면서 Hein과 Erdogan[3] 등이 멜린변환법을 이용하여 응력특이성에 관한 연구를 수행한 바 있다. Carpenter와 Byers[4]는 고유함수 전개법에 2항 윌리엄 형태(two-term William's type)의 복소함수를 사용하여 상반일 경로 적분법(Reciprocal Work Contour Integral Method)으로 응력강도계수를 수치해석하였다.

이방성 이종재 접합계면 균열에 대해서 Wang과 Choi[5]는 Lekhnitskii[6]의 형식을 이용하여 접합계면균열을 해석하였다. Ting과 Chou[7], Ting[8] 등은 1항

접수일: 2003년 1월 8일; 게재승인일: 2003년 4월 21일
* 경남대학교 대학원
# 교신저자: 경남대학교 기계자동화공학부
Email: sbcho@kyungnam.ac.kr, Tel: (055) 249-2620

윌리엄 형태(one-term William's type)의 복소응력함수를 사용하여 연구한 바 있다.

이방성 재료의 특수한 경우에 해당하는 유사등방성 재료의 이종재 접합계면 균열에 대해 2항 윌리엄 형태의 복소응력함수를 사용하여 연구하고자 한다. 유사등방성 재료는 특성방정식의 근에 의해 분류되는 특수한 재료이며, 특성근은 다음과 같이 3가지 형태로 분류할 수 있다.[6] 첫째는 특성근이 실수 부와 허수 부로 구성되어있고 서로 다른 경우, 둘째는 특성근이 순 허수이며 서로 다른 경우, 셋째는 순 허수이며 특성근이 같은 경우이다. 각각을 이방성재료와 직교이방성재료 및 유사등방성재료로 구분하고 있다. 3 종류의 특성근 중에서 특히 순 허수이면서 중근인 유사등방성재료의 경우에는 이방성 및 직교이방성재료에서 사용한 복소응력함수를 그대로 사용할 경우 특이성이 나타나기 때문에 이 경우에 대한 복소응력함수 형태를 이방성재료와 직교이방성재료의 경우와는 달리 가정하여야 한다.

이방성 이종재 접합계면 균열의 에너지 해방률에 관한 연구[9]에 이어 본 연구에서는 복소응력함수를 2항 윌리엄 형태로 가정하여 유사등방성 이종재 접합계면 균열에 대한 응력강도계수와 에너지 해방률 및 관계를 고유함수 전개법으로 유도하고 상반일 경로 적분법(RWCIM)[9]을 이용하여 수치해석하고 비교 검토하고자 한다.

2. 유사등방성 재료의 특성방정식

체적력이 없는 경우의 평형방정식을 만족하는 에어리(Airy)의 응력함수 $U(x,y)$는 다음과 같다.

$$\sigma_{xx}=\frac{\partial^2 U}{\partial y^2},\ \sigma_{yy}=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2},\ \tau_{xy}=-\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y} \tag{1}$$

이방성 재료에 대한 평면응력상태의 일반화된 후크의 법칙(Hooke's law)은 다음과 같다.[6]

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \varepsilon_{zz}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{16}\\ a_{21} & a_{22} & a_{26}\\ a_{61} & a_{62} & a_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix} \tag{2}$$

여기서 a_{ij}는 재료의 물성치를 나타내는 상수이다. 평면변형률에 대한 경우의 a_{ij}^*는 다음과 같이 주어진다.

$$a_{ij}^*=a_{ij}-(a_{i3}a_{j3}/a_{33}) \tag{3}$$

또한 변위의 연속조건을 나타내는 적합방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{yy}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_{xx}}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y} \tag{4}$$

식 (1)과 식 (2)를 적합방정식인 식 (4)에 대입하여 정리하여 지배미분방정식을 얻고, 2차원 탄성문제의 유사등방성 이종재 계면균열에 대한 복소응력함수를 2항 윌리엄형태로 가정하여 지배미분방정식에 대입하면 다음과 같은 특성방정식을 얻는다.

$$a_{11}\mu^4-2a_{16}\mu^3+(2a_{12}+a_{66})\mu^2-2a_{26}\mu+a_{22}=0 \tag{5}$$

위의 특성방정식을 만족하는 근은 복소수만을 가지며 다음과 같다.

$$\mu_1=\alpha_1+i\beta_1,\ \mu_2=\alpha_2+i\beta_2,\ \mu_3=\overline{\mu_1},\ \mu_4=\overline{\mu_2} \tag{6}$$

식 (6)에서 α_i와 β_i $(i=1,2)$는 실수이고 근 μ_i는 복소변수 $z_i=x+\mu_i y$의 관계를 가지고 있다. 직교이방성재료의 경우 식 (6)은 다음과 같이 표현된다.

$$a_{11}\mu^4+(2a_{12}+a_{66})\mu^2+a_{22}=0 \tag{7}$$

직교이방성재료의 특수한 경우에 해당하는 유사등방성재료(pseudo-isotropic material)는 특성방정식의 근이 중복근으로 $\mu_1=\mu_2$이고 순허근 $(\alpha_i=0)$이 되는 경우이다. 따라서 중복근이 되기 위해서 유사등방성재료의 전단탄성계수는 다음의 관계가 있어야 한다.[10]

$$G_{12}=\frac{E_{11}}{\{2(\nu_{12}+\sqrt{E_{11}/E_{22}})\}} \tag{8}$$

유사등방성재료는 특성방정식의 근이 순허수인

중근이고 더욱이 $\beta_1=\beta_2=1$이면 등방성재료(isotropic material)가 된다. 특성방정식 (7)의 근이 중복근이므로 복소응력함수의 형태를 다음과 같이 가정해야 한다.[10]

$$U(z)=2Re\{F_1(z_1)+\overline{z_1}F_2(z_1)\} \tag{9}$$

여기서

$$F_1(z_1)=A_1\,z_1^{\lambda+1}+B_1\,z_1^{\overline{\lambda}+1} \tag{10}$$

$$F_2(z_1)=A_2\,z_1^{\lambda}+B_2\,z_1^{\overline{\lambda}} \tag{11}$$

이다.

3. 유사등방성 이종재 균열에 대한 응력과 변위

응력과 변위를 복소응력함수로 나타내기 위하여 복소응력함수 (9)를 식 (1)에 대입하여 응력을 구하고 구한 응력을 식 (2)에 대입하여 변위를 구하면 다음과 같다.[10]

$$\sigma_{jxx}=2Re\{\mu_{j1}^2F_{j1}''(z_{j1})-2\mu_{j1}^2F_{j2}'(z_{j1})+\mu_{j1}^2\overline{z_{j1}}F_{j2}''(z_{j1})\} \tag{12}$$

$$\sigma_{jyy}=2Re\{F_{j1}''(z_{j1})+2F_{j2}'(z_{j1})+\overline{z_{j1}}F_{j2}''(z_{j1})\} \tag{13}$$

$$\tau_{jxy}=-2Re\{\mu_{j1}F_{j1}''(z_{j1})+\mu_{j1}\overline{z_{j1}}F_{j2}''(z_{j1})\} \tag{14}$$

$$u_{jx}=2Re\{p_{j1}F_{j1}'(z_{j1})+p_{j1}\overline{z_{j1}}F_{j2}'(z_{j1})+p_{j2}F_{j2}(z_{j1})\}-\omega_{jo}y+u_{jox} \tag{15}$$

$$u_{jy}=2Re\{q_{j1}F_{j1}'(z_{j1})+q_{j1}\overline{z_{j1}}F_{j2}'(z_{j1})+q_{j2}F_{j2}(z_{j1})\}+\omega_{jo}x+u_{joy} \tag{16}$$

여기서

$$p_{j1}=a_{j11}\mu_{j1}^2+a_{j12} \tag{17}$$

$$p_{j2}=-3a_{j11}\mu_{j1}^2+a_{j12} \tag{18}$$

$$q_{j1}=a_{j21}\mu_{j1}+\frac{a_{j22}}{\mu_{j1}} \tag{19}$$

$$q_{j2}=-a_{j21}\mu_{j1}+\frac{3a_{j22}}{\mu_{j1}} \tag{20}$$

j는 재료1과 재료 2를, 위첨자 '은 1차 미분을 의미한다. 그리고 ω_{jo}, u_{jox}와 u_{joy}는 상수이며 강체변위를 표현하는 항이다. 본 연구에서는 강체변위가 없는 것으로 한다.

4. 응력강도계수

앞 절의 응력과 변위식을 극좌표계로 변환하여 접합계면 균열에서의 경계조건과 연속조건으로부터 다음과 같은 연립방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{Bmatrix}\overline{B_{11}}\\ \overline{B_{12}}\end{Bmatrix}=-e^{-i2\pi\lambda}[U_1]^{-1}[S_1]\begin{Bmatrix}A_{11}\\ A_{12}\end{Bmatrix} \tag{21}$$

$$\begin{Bmatrix}\overline{B_{21}}\\ \overline{B_{22}}\end{Bmatrix}=-e^{i2\pi\lambda}[U_2]^{-1}[S_2]\begin{Bmatrix}A_{21}\\ A_{22}\end{Bmatrix} \tag{22}$$

$$[S_1]\begin{Bmatrix}A_{11}\\ A_{12}\end{Bmatrix}+[U_1]\begin{Bmatrix}\overline{B_{11}}\\ \overline{B_{12}}\end{Bmatrix}=[S_2]\begin{Bmatrix}A_{21}\\ A_{22}\end{Bmatrix}+[U_2]\begin{Bmatrix}\overline{B_{21}}\\ \overline{B_{22}}\end{Bmatrix} \tag{23}$$

$$[R_1]\begin{Bmatrix}A_{11}\\ A_{12}\end{Bmatrix}+[T_1]\begin{Bmatrix}\overline{B_{11}}\\ \overline{B_{12}}\end{Bmatrix}=[R_2]\begin{Bmatrix}A_{21}\\ A_{22}\end{Bmatrix}+[T_2]\begin{Bmatrix}\overline{B_{21}}\\ \overline{B_{22}}\end{Bmatrix} \tag{24}$$

여기서

$$[S_j]=\begin{bmatrix}(\lambda+1) & (\lambda+1)\\ \mu_{j1}(\lambda+1) & \mu_{j1}(\lambda-1)\end{bmatrix}$$

$$[U_j]=\begin{bmatrix}\frac{(\lambda+1)}{\mu_{j1}(\lambda+1)} & \frac{(\lambda+1)}{\mu_{j1}(\lambda-1)}\end{bmatrix}$$

$$[R_j]=\begin{bmatrix}p_{j1}(\lambda+1) & p_{j1}\lambda+p_{j2}\\ q_{j1}(\lambda+1) & q_{j1}\lambda+q_{j2}\end{bmatrix}$$

$$[T_j]=\begin{bmatrix}\overline{p_{j1}}(\lambda+1) & \overline{p_{j1}}\lambda+\overline{p_{j2}}\\ \overline{q_{j1}}(\lambda+1) & \overline{q_{j1}}\lambda+\overline{q_{j2}}\end{bmatrix}$$

이다.

식(21)과 식 (22)를 식 (23)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$(1-e^{-i2\pi\lambda})[S_1]\begin{Bmatrix}A_{11}\\ A_{12}\end{Bmatrix}=(1-e^{i2\pi\lambda})[S_2]\begin{Bmatrix}A_{21}\\ A_{22}\end{Bmatrix} \tag{25}$$

식 (25)가 성립하기 위한 경우로, 먼저 양변이 0가 되는 경우이다. 즉, $(1-e^{-i2\pi\lambda})$와 $(1-e^{i2\pi\lambda})$가 0가 되어야 한다. 따라서 $\lambda=-\infty,\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,\infty$가 된다. $\lambda=-\infty,\cdots,-2,-1$은 변위가 발산되므로 제외되어야 하고, 또한 $\lambda=0,1$의 경우는 강체의 병진운동과 회전운동을 나타내므로 제외되어야 한다.

그리고, $(1-e^{-2\pi\lambda})$와 $(1-e^{2\pi\lambda})$가 0이 아닌 경우에 식 (25)는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} A_{21} \\ A_{22} \end{Bmatrix} = \frac{(1-e^{-2\pi\lambda})}{(1-e^{2\pi\lambda})} [S_2]^{-1}[S_1] \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{12} \end{Bmatrix} \tag{26}$$

식 (26)을 식 (22)에 대입하면

$$\begin{Bmatrix} \overline{B_{21}} \\ \overline{B_{22}} \end{Bmatrix} = [U_2]^{-1}[S_1] \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{12} \end{Bmatrix} \tag{27}$$

식 (24)에 식 (21), (26) 과 (27)을 대입하여 계수 벡터 A_{11}, A_{12}에 대해서 정리하면,

$$[D(\lambda)][S_1] \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{28}$$

여기서

$$[D(\lambda)] = \begin{bmatrix} D_{11}(\lambda) & D_{12}(\lambda) \\ D_{21}(\lambda) & D_{22}(\lambda) \end{bmatrix} \tag{29}$$

이고,

$$D_{11}(\lambda) = (G_1 - G_2)(1 - e^{-2\pi\lambda})$$
$$D_{12}(\lambda) = (H_1 + H_2)(1 + e^{-2\pi\lambda})$$
$$D_{21}(\lambda) = (I_1 + I_2)(1 + e^{-2\pi\lambda})$$
$$D_{22}(\lambda) = (J_1 - J_2)(1 - e^{-2\pi\lambda})$$

또한

$$G_j = \frac{p_{j1} + p_{j2}}{2}, \quad H_j = \frac{p_{j1} - p_{j2}}{2\mu_{j1}}$$
$$I_j = \frac{q_{j1} + q_{j2}}{2}, \quad J_j = \frac{q_{j1} - q_{j2}}{2\mu_{j1}}$$

이다. 식 (28)이 자명해를 가질 조건은 식 (29)의 행렬식이 0가 되어야 한다. 따라서 식 (29)의 행렬식을 구하면 다음과 같다.

$$P(e^{-2\pi\lambda})^2 + 2Q(e^{-2\pi\lambda}) + P = 0 \tag{30}$$

여기서

$$P = (H_1 + H_2)(I_1 + I_2) - (G_1 - G_2)(J_1 - J_2)$$
$$Q = (H_1 + H_2)(I_1 + I_2) + (G_1 - G_2)(J_1 - J_2)$$

식 (30)을 근의 공식에 대입하여 고유치 λ를 구하면 다음과 같다.

$$\lambda = (n - \frac{1}{2}) + i\varepsilon \qquad (n=1,2,3,\cdots,\infty) \tag{31}$$

여기서

$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \ln\left\{\frac{Q}{P} \pm \sqrt{\left(\frac{Q}{P}\right)^2 - 1}\right\}$$

식 (31)에서 $n=1$일 때 $\lambda = 0.5 + i\varepsilon$이 되고 이 고유치가 균열선단에서 응력을 무한대로 발산시키는 데 지배적인 영향을 미친다.

고유치 λ에 대한 고유벡터를 구하기 위하여 식 (31)을 식 (28)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} D_{11}(\varepsilon) & D_{12}(\varepsilon) \\ D_{21}(\varepsilon) & D_{22}(\varepsilon) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (\lambda+1)A_{11} + (\lambda+1)A_{12} \\ \mu_{11}(\lambda+1)A_{11} + \mu_{11}(\lambda-1)A_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{32}$$

여기서

$$D_{11}(\varepsilon) = (G_1 - G_2)(1 + e^{2\pi\varepsilon})$$
$$D_{12}(\varepsilon) = (H_1 + H_2)(1 - e^{2\pi\varepsilon})$$
$$D_{21}(\varepsilon) = (I_1 + I_2)(1 - e^{2\pi\varepsilon})$$
$$D_{22}(\varepsilon) = (J_1 - J_2)(1 + e^{2\pi\varepsilon})$$

식 (32)의 연립방정식은 다음과 같은 하나의 식으로 표현된다.

$$(A_{11} + A_{22}) + \eta\left\{\mu_{11}A_{11} + \mu_{11}\frac{(\lambda-1)}{(\lambda+1)}A_{12}\right\} = 0 \tag{33}$$

여기서

$$\eta = i\eta_{II} = \frac{D_{12}(\varepsilon)}{D_{11}(\varepsilon)} = \frac{D_{22}(\varepsilon)}{D_{21}(\varepsilon)} \tag{34}$$

식 (34)를 식 (33)에 대입하여 A_{12}에 대해서 정리하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$A_{12}=-\frac{(\lambda+1)+(\lambda+1)\eta\mu_{11}}{(\lambda+1)+(\lambda-1)\eta\mu_{11}}A_{11} \tag{35}$$

모든 고유벡터를 A_{11}의 비로 나타내기 위해 식 (35)와 식 (31)을 식 (21), (26), (27)에 대입하여 각각의 고유벡터를 구하여 복소수 계수 ζ의 항으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} A_{j1} \\ A_{j2} \\ \overline{B_{j1}} \\ \overline{B_{j2}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{(-1)^j\pi\varepsilon}\left\{\frac{(\lambda+1)+(\lambda-1)\eta\mu_{j1}}{\mu_{j1}}\right\} \\ -e^{(-1)^j\pi\varepsilon}\left\{\frac{(\lambda+1)+(\lambda+1)\eta\mu_{j1}}{\mu_{j1}}\right\} \\ -e^{(-1)^{j+1}\pi\varepsilon}\left\{\frac{(\lambda+1)-(\lambda-1)\eta\mu_{j1}}{\mu_{j1}}\right\} \\ e^{(-1)^{j+1}\pi\varepsilon}\left\{\frac{(\lambda+1)-(\lambda+1)\eta\mu_{j1}}{\mu_{j1}}\right\} \end{bmatrix} \zeta \tag{36}$$

여기서

$$\zeta=\zeta_I+i\zeta_{II}=\frac{\mu_{11}}{e^{-\pi\varepsilon}\{(\lambda+1)+(\lambda-1)\eta\mu_{11}\}}A_{11}$$

식 (36)을 식 (12)~(16)에 대입하고 응력이 무한대로 발산되는 $\lambda=0.5+i\varepsilon$일 때의 유사등방성 이종재 접합계면 균열에 대한 응력장을 구할 수 있으며 균열 선단에서 후방으로 x축 상의 거리 r만큼 떨어진 곳의 상대 변위를 표현하면 다음과 같다.

$$\sigma_{jyy}=\frac{\eta_{II}}{\sqrt{2\pi r}}\left[K_1\cos\left\{\varepsilon\ln\left(\frac{r}{l}\right)\right\}-K_2\sin\left\{\varepsilon\ln\left(\frac{r}{l}\right)\right\}\right] \tag{37}$$

$$\tau_{jxy}=\frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\left[K_2\cos\left\{\varepsilon\ln\left(\frac{r}{l}\right)\right\}+K_1\sin\left\{\varepsilon\ln\left(\frac{r}{l}\right)\right\}\right] \tag{38}$$

$$\begin{aligned}\delta_x &= u_{2x}(r,\pi)-u_{1x}(r,-\pi)\\ &=\frac{-2\sqrt{r}\{2(a_{211}\beta_{21}+a_{111}\beta_{11})\}}{(1+4\varepsilon^2)\cosh(\pi\varepsilon)\sqrt{2\pi}}\left[-K_2\cos\left\{\varepsilon\ln\left(\frac{r}{l}\right)\right\}\right.\\ &\quad -K_1\sin\left\{\varepsilon\ln\left(\frac{r}{l}\right)\right\}+2\varepsilon\left\{K_1\cos\left\{\varepsilon\ln\left(\frac{r}{l}\right)\right\}\right.\\ &\quad \left.\left.-K_2\sin\left\{\varepsilon\ln\left(\frac{r}{l}\right)\right\}\right\}\right]\end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned}\delta_y &= u_{2y}(r,\pi)-u_{1y}(r,-\pi)\\ &=\frac{-2\sqrt{r}\left\{2\left(\frac{a_{222}}{\beta_{21}}+\frac{a_{122}}{\beta_{11}}\right)\right\}\eta_{II}}{(1+4\varepsilon^2)\cosh(\pi\varepsilon)\sqrt{2\pi}}\left[-K_1\cos\left\{\varepsilon\ln\left(\frac{r}{l}\right)\right\}\right.\\ &\quad +K_2\sin\left\{\varepsilon\ln\left(\frac{r}{l}\right)\right\}+2\varepsilon\left\{-K_2\cos\left\{\varepsilon\ln\left(\frac{r}{l}\right)\right\}\right.\\ &\quad \left.\left.-K_1\sin\left\{\varepsilon\ln\left(\frac{r}{l}\right)\right\}\right\}\right]\end{aligned} \tag{40}$$

여기서, l은 균열길이를 나타내며 K_1과 K_2는 유사등방성 이종재 접합계면 균열에 대한 응력강도계수로 다음과 같다.

$$\begin{aligned}K_1 &= 8\sqrt{2\pi}\cosh(\pi\varepsilon)\left[\left\{2\varepsilon\cos(\varepsilon\ln l)+\left(\frac{3}{4}-\varepsilon^2\right)\sin(\varepsilon\ln l)\right\}\zeta_I\right.\\ &\quad \left.+\left\{\left(\frac{3}{4}-\varepsilon^2\right)\cos(\varepsilon\ln l)-2\varepsilon\sin(\varepsilon\ln l)\right\}\zeta_{II}\right]\\ K_2 &= 8\sqrt{2\pi}\cosh(\pi\varepsilon)\left[-\left\{\left(\frac{3}{4}-\varepsilon^2\right)\cos(\varepsilon\ln l)-2\varepsilon\sin(\varepsilon\ln l)\right\}\zeta_I\right.\\ &\quad \left.+\left\{2\varepsilon\cos(\varepsilon\ln l)+\left(\frac{3}{4}-\varepsilon^2\right)\sin(\varepsilon\ln l)\right\}\zeta_{II}\right]\end{aligned}$$

5. 유사등방성 이종재 접합계면 균열에 대한 에너지 해방률

응력강도계수와 함께 파괴역학적 강도평가 파라미터의 하나인 에너지 해방률은 다음과 같이 정의된다.

$$G=\lim_{\Delta a\to 0}\frac{1}{2\Delta a}\int_0^{\Delta a}\{\sigma_{yy}(x)\delta_y(\Delta a-x)+\tau_{xy}(x)\delta_x(\Delta a-x)\}dx \tag{41}$$

식 (41)에서 균열이 진전하기 전의 응력성분과 균열이 Δa만큼 진전한 후의 상대변위를 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{1}{\eta_{II}}\sigma_{1yy}+i\tau_{1xy}=\frac{K_1+iK_2}{\sqrt{2\pi r}}\left\{\cos\left(\varepsilon\ln\frac{r}{l}\right)+i\sin\left(\varepsilon\ln\frac{r}{l}\right)\right\} \tag{42}$$

$$\eta_{II}\delta_y+i\delta_x=\frac{2\sqrt{r}H(K_1+iK_2)(1-i2\varepsilon)}{(1+4\varepsilon^2)\cosh(\pi\varepsilon)\sqrt{2\pi}}\left(\frac{r}{l}\right)^{i\varepsilon} \tag{43}$$

여기서 $H=2(a_{211}\beta_{21}+a_{111}\beta_{11})$ 이다.

식 (24)와 (43)을 이용하여 식 (41)의 유사등방성 이종재 접합계면 균열에 대한 에너지 해방률을 구하면 다음과 같다.

$$G = \frac{K_i^2 H}{4\cosh^2(\pi\varepsilon)} \tag{44}$$

여기서 $K_i = \sqrt{K_1^2 + K_2^2}$이다.

6. 수치해석 결과 및 고찰

유사등방성 이종재 접합계면 균열에 대한 응력강도계수는 베티(Betti)의 상반정리를 기초로 한 상반일 경로 적분법(RWCIM)을 이용한 프로그램에 유한요소프로그램인 ANSYS의 해석결과값을 입력자료로 하여 응력특이성을 나타내는 고유치 $\lambda = 0.5 + i\varepsilon$에 대한 고유벡터인 식 (36)을 수치 해석하여 구하고, 이를 이용하여 에너지 해방률의 G를 구하였다.

해석모델은 편측균열로 Fig.1과 같으며, 사용된 요소는 8절점 등매개변수요소(isoparametric element)를 사용하여 균열의 길이(a)가 변하는 경우와 재료비(n)가 변하는 경우의 두 가지에 대한 응력강도계수와 에너지 해방률을 구하였다. 그리고 본 논문에서 사용된 무차원화된 에너지 해방률 G_i는 다음과 같다.

$$G_i = \frac{F_i^2}{4\cosh^2(\pi\varepsilon)} \times \frac{H}{a_{111} + a_{211}} \tag{45}$$

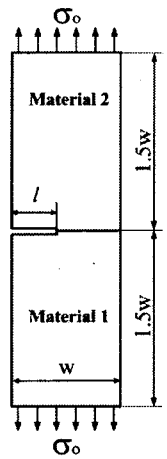

Fig. 1 A single edge interface crack in a finite dissimilar plate

Table 1 Material properties

Material Properties	Material 1	Material 2
E (MPa)	30	60
G (MPa)	11.5384	23.077
ν	0.3	0.3

Table 2 Non-dimensional stress intensity factors for the single-edge interface crack in a finite dissimilar plate ($F_i = K_i/\sigma_0\sqrt{\pi l}$, plane stress)

E_2/E_1	l / w			
	0.4		0.6	
	BEM's Result	Present Result	BEM's Result	Present Result
2.0	2.117	2.115	4.044	4.038
4.0	2.130	2.128	4.064	4.058
10.0	2.146	2.145	4.085	4.084

여기서, $F_i = K_i/\sigma_0\sqrt{\pi l}$이며 무차원 응력강도계수를 나타낸다.

본 수치해석의 신뢰성을 확인하기 위하여 유사등방성재료의 특수한 경우인 등방성재료의 물성치를 이용하여 이종재 접합계면 균열에 대한 무차원 응력강도계수 F_i를 균열길이 l/w와 재료비 n가 변화할 경우에 대해서 수치 해석하였으며 그 결과를 Table 2에 나타내었다. 사용된 등방성재료의 물성치는 Table 1과 같다. Table 2에서 기존의 경계요소법에 의한 결과[11]와 잘 일치하고 있음을 확인할 수 있다.

유사등방성 이종재 접합계면 균열에 대한 무차원화된 에너지 해방률 G_i를 구하기 위해 선정한 재료의 물성치는 다음과 같다.

$$E_{111} = 60GPa,\ E_{122} = 30GPa,\ \nu_{112} = 0.3$$
$$E_{211} = n \times E_{111},\ E_{222} = n \times E_{122},\ \nu_{212} = 0.3 \tag{46}$$
$$plane\ stress$$

여기서 n은 1재료에 대한 2재료의 탄성계수비이다.

Fig. 2는 유사등방성 이종재 접합계면 균열의 길이를 l/w=0.4로 고정하고 재료비 n을 변화시켜 무차원화된 에너지 해방률 G_i와 무차원화된 응력강도계수의 변화를 나타낸 것이다.

Table 3 Non-dimensional stress intensity factor and energy release rate vs. crack length and material properties ratio for pseudo-isotropic dissimilar materials

n (E_{211}/E_{111})	Crack length (l/w)									
	0.3		0.4		0.5		0.6		0.7	
	F_i	G_i	F_i	G_i	F_i	G_i	F_i	G_i	F_i	G_i
2	1.91209	2.13644	2.42327	3.43145	3.23312	6.10827	4.60609	12.3976	7.24143	30.6423
10	1.99334	2.11716	2.50948	3.35552	3.33690	5.93306	4.74592	12.0014	7.45656	29.6257
20	2.01759	2.11296	2.53458	3.33454	3.36653	5.88289	4.78513	11.8854	7.51632	29.3249
30	2.02714	2.11158	2.54430	3.32642	3.37793	5.86328	4.80016	11.8399	7.53918	29.2070
40	2.03223	2.11089	2.54948	3.32215	3.38400	5.85297	4.80811	11.8159	7.55123	29.1443
50	2.03537	2.11041	2.55268	3.31951	3.38774	5.84659	4.81299	11.8008	7.55867	29.1053
60	2.03754	2.11017	2.55485	3.31770	3.39025	5.84208	4.81628	11.7904	7.56366	29.0783
70	2.03909	2.10994	2.55644	3.31642	3.39211	5.83900	4.81872	11.7832	7.56736	29.0595
80	2.04025	2.10975	2.55762	3.31541	3.39349	5.83654	4.82053	11.7775	7.57008	29.0446
90	2.04120	2.10966	2.55859	3.31470	3.39460	5.83473	4.82198	11.7732	7.57224	29.0331
100	2.04193	2.10955	2.55935	3.31409	3.39547	5.83320	4.82311	11.7696	7.57395	29.0236

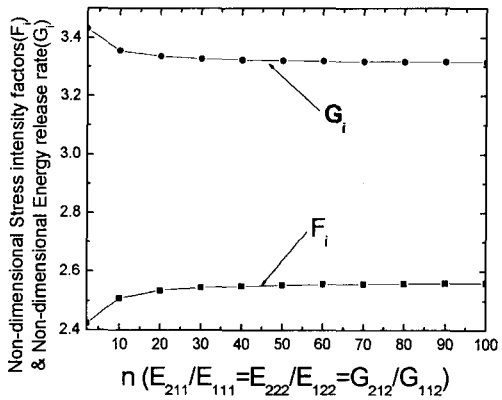

Fig. 2 Non-dimensional energy release rate & Non-dimensional stress intensity factors vs. n for a single edge interface crack in pseudo-isotropic dissimilar materials. (l/w = 0.4)

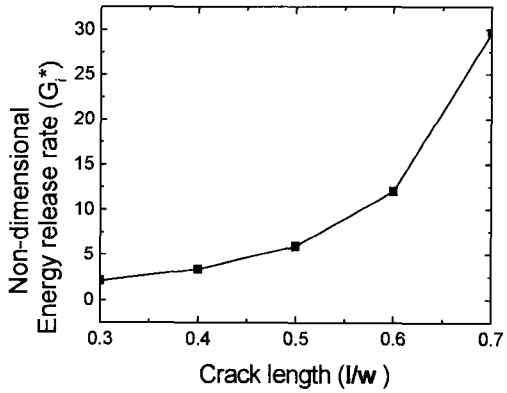

Fig. 3 Non dimensional energy release rate vs. crack length for a single-edge interface crack in pseudo-isometric dissimilar materials

Fig. 3과 4는 재료비 n=10으로 고정하고 균열의 길이를 0.3에서 0.7까지 변화시켰을 때 무차원화된 에너지 해방률 G_i와 무차원화된 응력강도계수 F_i의 변화를 나타낸 것이다.

Table 3은 재료비 n과 균열길이 *l/w*을 변화시키면서 유사등방성 이종재 접합계면 균열에 대한 무차원화된 응력강도계수와 에너지 해방률을 나타낸 것이다. Table 3과 Fig. 3~Fig. 4에서 재료비 n=10으로 고정한 후 균열길이 *l/w*을 증가시킬수록 응력강도계수와 에너지 해방률이 모두 증가하고 있음을 알 수 있고 타당한 결과이다. 그러나 Fig. 2에서 균열길이를 0.4로 고정시키고 재료비 *n*의 변화에 따른 무차원화된 응력강도계수와 무차원화된 에너지 해방률의 변화를 나타낸 결과에서 재료비 n이 증가할수록 무차원화된 응력강도계수와 무차원화된 에너지 해방률의 변화는 거의 없음을 나타내고 있다.

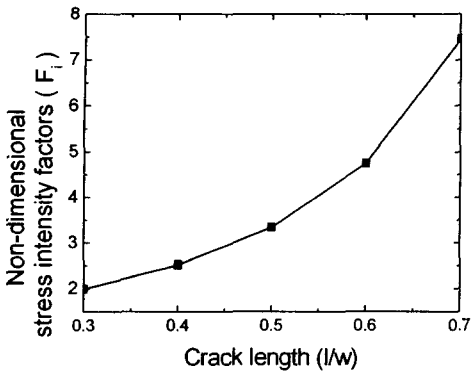

Fig. 4 Non-dimensional stress intensity factors vs. crack length for a single edge interface crack in pseudo-isotropic dissimilar materials (n=10)

7. 결론

유사등방성 이종재 접합계면 균열에 대한 에너지 해방률을 유도하였고, 에너지 해방률과 응력강도계수와의 관계를 구하였다. 상반일 경로 적분법을 이용하여 균열길이와 재료비의 변화에 따른 무차원화된 에너지 해방률과 응력강도계수를 수치해석하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 유사등방성 재료의 특수한 경우에 해당하는 등방성 재료의 이종재 접합계면 균열에 대한 해석결과는 기존의 결과와 잘 일치하였다.

(2) 유사등방성 이종재 접합계면 편측균열에 대한 수치해석한 결과에서 균열길이가 증가함에 따라 무차원화된 응력강도계수와 무차원화된 에너지 해방률은 모두 증가하여 타당한 결과이며, 균열의 길이가 l/w=0.4일 때에 재료비가 증가함에 따라서는 무차원화된 응력강도계수와 무차원화된 에너지 해방률은 모두 변화가 거의 없었다.

(3) 유사등방성 이종재료 접합계면 균열에 대한 이론적인 기틀을 마련하였으며, 이를 토대로 실험적 연구가 수반된다면 이종재료 접합계면 균열의 강도평가법의 확립이 가능할 것으로 사료된다.

후 기

본 연구는 2003년도 경남대학교 교내학술조성연구비에 의해 수행되었으며 이에 감사드립니다.

참고문헌

1. Williams, M. L., "The stress around a fault or crack in dissimilar media," Bull. Seism. Soc. am. 49, pp. 199-204, 1959.
2. Bogy, D. B., "On the Problem of Edge-bonded Elastic Quarter-planes Loaded at the Boundary," Int. J. Solids Structures, Vol. 6, pp. 1287-1313, 1970.
3. Hein, D. B. and Erdogan, F., "Stress Singularities in a Two-material Wege," Int. J. Fract. Mechanics, Vol. 7, pp. 317-330, 1971.
4. Carpenter, W. C. and Byers, C., "A Path Independent Intergral for Cpmputing Stress Intensities for V-notched Cracks in a Bi-material," Int. J. Fract, Vol. 35, pp. 245-268, 1987.
5. Wang, S. and Choi, I., "The interface crack between dissimilar anisotropic composite materials," J. Appl. Mech., Vol. 50, pp. 169-178, 1983.
6. Lekhnitskii, S. G., Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body, Holden-Day, Inc., 1963.
7. Ting, T. C. T. and Chou, S. C., "Edge Singularities in Anisotropic Composites," Int. J. Solids Structures, Vol. 17, No. 11, pp. 1057-1068, 1981.
8. Ting, T. C. T., "Explicit Solution and Invariance of the Singularities at an Interface Crack in Anisotropic Composites," Int. J. Solids Structures, Vol. 22, No. 9, pp. 965-983, 1986.
9. Kim, J. K. and Cho, S. B., "A Study on Energy Relese Rate for Interface Cracks in Anisotropic Dissimilar Materials," Trans. KSME A., Vol. 25, No. 11, pp. 1835-1843, 2001.
10. Cho, S. B. and Kim, J. K., "A Study on Stress Singularities for V-notched Cracks in Pseudo-isotropic and Anisotropic Dissimilar Materials," J. of KSPE, Vol. 16, No. 10, pp. 152-163, 1999.
11. Yuuki, R. and Cho, S. B., "Efficient boundary element analysis of stress intensity factors for interface crack in dissimilar materials," Engng. Frac. Mech., Vol. 34, pp. 179-188, 1989.