

균열을 가진 압전재료에서의 가중함수이론

손인호[#], 안득만^{*}

Weight Function Theory for Piezoelectric Materials with a Crack

In Ho Son[#], Deuk Man An^{*}

ABSTRACT

In this paper, a two-dimensional electroelastic analysis is performed on a piezoelectric material with an open crack. The approach of Lekhnitskii's complex potential functions is used in the derivation and Bucckner's weight function theory is extended to piezoelectric materials. The stress intensity factors and the electric displacement intensity factor are calculated by the weight function theory.

Key Words : Piezoelectric (압전), Complex potential function (복소퍼텐셜함수), Weight function (가중함수), Stress intensity factor (응력확대계수), Electric displacement intensity factor (전기변위확대계수)

1. 서론

압전현상은 1880년에 Pierre Curie와 Jacques Curie에 의해 발견된 현상으로서 외부에서 기계적인 힘을 가해주면 재료 내부에 전기적인 분극현상이 발생하고 반대로 외부에서 전기장을 작용시키면 재료가 변형을 일으키는 현상을 말한다.

압전재료는 이러한 전기-기계적인 커플링(electromechanical coupling) 특성으로 인해 감지기(sensor), 변환기(transducer), 작동기(actuator) 등 첨단산업분야에 널리 사용되어지고 있으며, 빠른 반응속도와 낮은 구동전력으로 인해 마이크로 전자기계시스템(MEMS)에도 많이 활용되고 있다.

1950년대에 인공 압전세라믹이 소개되면서부터 압전현상을 이용한 활발한 연구가 진행되었다. 하지만 대부분의 연구가 파장의 전파와 진동 쪽에 초점을 맞추어서 행해졌으며 압전재료의 파괴기구에

대한 연구는 상대적으로 드물었다.

압전재료의 사용이 늘어나고 많은 연구가 행해지면서 점차적으로 압전재료의 기계적인 특성과 압전재료 내부에 있는 전위, 균열, 공동(void) 등의 결함이 압전재료의 활용에 많은 영향을 미친다는 것을 인식하게 되었고 압전재료의 파괴기구에 대한 연구가 활기를 띠기 시작했다.

압전재료의 파괴역학에 대한 이론적인 연구는 주로 Stroh formalism¹(Pak 1992²; Suo et al 1992³; Beom and Atluri 1996⁴; Deng and Meguid 1998⁵; Wang and Han 1999⁶; Ma and Chen 2001⁷)과 Lekhnitskii formalism⁸(Sosa 1991⁹; Sosa 1992¹⁰; Gao and Fan 1999¹¹; Xu and Rajapakse 2000¹²; Xu and Rajapakse 2001¹³)을 기반으로 하여 연구되고 있다.

본 연구에서는 Lekhnitskii 공식(formalism)을 이용하여 직선균열을 가지는 입방대칭성(cubic symmetric) 압전재료의 평면변형을 상태에서의 응력과 전기변

^{1,2,3} 접수일: 2003년 1월 6일; 게재승인일: 2003년 4월 18일
[#] 교신저자: 부산대학교 기계설계공학과
Email: ohninos@yahoo.co.kr, Tel: (051) 510-1474
^{*} 부산대학교 기계공학부, 기계기술 연구소

위(electric displacement)를 구하고 Bueckner의 가중 함수이론을 적용하여 응력확대계수와 전기변위확대계수(electric displacement intensity factor)를 구하고자 한다.

2. 압전재료의 지배방정식

압전현상의 전기-기계적 커플링 특성을 표현하기 위해서는 기계적 특성을 나타내는 응력과 변형을 그리고 전기적 특성을 나타내는 전기장, 전기변위 이렇게 네 개의 변수가 필요하다. 여기에서 응력과 전기변위를 독립변수로 생각하면 직각좌표계에서의 구성식은 다음과 같다.¹⁴⁻¹⁵

$$\epsilon_{ij} = s_{ijk}^D \sigma_{kl} + g_{kij} D_k \quad (1.a)$$

$$E_i = -g_{ikt} \sigma_{kt} + \beta_{ik}^D D_k \quad (1.b)$$

ϵ_{ij} 는 변형률, σ_{ij} 는 응력, D_i 는 전기변위 그리고 E_i 는 전기장을 나타낸다. 그리고 s_{ijk}^D 는 전기변위가 없을 때 측정된 컴플라이언스 텐서, g_{kij} 는 압전 텐서, β_{ik}^D 는 응력이 없을 때 측정된 dielectric impermeability tensor를 나타내며 식(2)를 만족한다.

$$s_{ijk}^D = s_{jik}^D = s_{klij}, \quad g_{kij} = g_{kji}, \quad \beta_{ij}^D = \beta_{ji}^D \quad (2)$$

입방대칭성 압전재료에 대해서 식(1)을 행렬형태로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ 2\epsilon_{yz} \\ 2\epsilon_{zx} \\ 2\epsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{12} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{11} & s_{12} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{12} & s_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.a)$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ g_{41} & 0 & 0 \\ 0 & g_{41} & 0 \\ 0 & 0 & g_{41} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & g_{41} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_{41} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_{41} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.b)$$

$$+ \begin{bmatrix} \beta_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{Bmatrix}$$

2차원($x-y$ 평면)에서의 압전재료의 전기-기계적 특성을 알아보기 위해 평면변형률상태에 대해서 고려해보면 평면변형률 상태의 조건은

$$\epsilon_{zz} = \epsilon_{zx} = \epsilon_{zy} = E_z = 0 \quad (4)$$

이므로 σ_{zz} , σ_{zx} , σ_{yz} 그리고 D_z 는 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= -\frac{1}{s_{11}} [s_{12}\sigma_{xx} + s_{12}\sigma_{yy}] & \sigma_{xx} &= -\frac{g_{41}}{s_{44}} D_y \\ \sigma_{zy} &= -\frac{g_{41}}{s_{44}} D_x & D_z &= \frac{g_{41}}{\beta_{11}} \sigma_{xy} \end{aligned} \quad (5)$$

환산재료상수(reduced material constant)를 다음과 같이 정의하고

$$\begin{aligned} a_{11} &= s_{11} - \frac{s_{12}^2}{s_{11}} & a_{12} &= s_{12} - \frac{s_{12}^2}{s_{11}} \\ a_{33} &= s_{44} + \frac{g_{41}^2}{\beta_{11}} & \delta_{11} &= \beta_{11} + \frac{g_{41}^2}{s_{44}} \end{aligned} \quad (6)$$

좌표계를 $x \rightarrow x_1$, $y \rightarrow x_2$ 로 바꾸면 식(3)은 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ 2\epsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (7.a)$$

$$\begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & 0 \\ 0 & \delta_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix} \quad (7.b)$$

압전재료는 평형방정식과 가우스의 법칙(Gauss's law of Electrostatics)을 만족해야 한다. 체적력과 자유전하(free charge)가 없을 때의 2차원에서의 평형방정식과 가우스의 법칙은 다음과 같이 주어진다.¹⁶

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad D_{i,i} = 0 \quad (8)$$

그리고 변형률과 전기장은 다음의 적합 조건을 만족하여야 한다.

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial E_1}{\partial x_2} - \frac{\partial E_2}{\partial x_1} = 0 \quad (9)$$

각각 평형방정식과 가우스의 법칙을 만족하는 응력함수 $U(x_1, x_2)$ 와 유도함수(induction function) $\Psi(x_1, x_2)$ 를 찾게 되면 응력 성분과 전기변위 성분들은 다음과 같이 정의된다.

$$\sigma_{11} = U_{,22} \quad \sigma_{22} = U_{,11} \quad \sigma_{12} = -U_{,12} \quad (10.a)$$

$$D_1 = \Psi_{,2}, \quad D_2 = -\Psi_{,1} \quad (10.b)$$

식(10)을 구성식인 식(7)에 대입한 후 다시 적합 조건식인 식(9)에 대입하여 정리하면 U 와 Ψ 에 관한 편미분방정식을 얻게 된다.

$$a_{11}U_{,2222} + a_{11}U_{,1111} + (2a_{12} + a_{33})U_{,1122} = 0 \quad (11.a)$$

$$\delta_{11}\Psi_{,11} + \delta_{11}\Psi_{,22} = 0 \quad (11.b)$$

위의 편미분방정식을 만족하는 해 $U(z)$, $\Psi(z)$ 를

$$U(z) = U(x_1 + \mu x_2), \quad \Psi(z) = \Psi(x_1 + \mu_d x_2) \\ \mu = m + i n, \quad i = \sqrt{-1} \quad (12)$$

로 가정하고(z 는 일반화된 복소수; μ, μ_d 는 복소수 매개변수; m, n 은 실수) 식(11)에 대입하면 다음과 같은 특성방정식을 구할 수 있다.

$$a_{11}\mu^4 + (2a_{12} + a_{33})\mu^2 + a_{11} = 0 \quad (13.a)$$

$$\mu_d^2 + 1 = 0 \quad (13.b)$$

위 식의 해를 구하면 다음과 같이 구해진다.

$$\mu_1 = m_1 + i n_1, \quad \mu_2 = m_2 + i n_2, \\ \mu_3 = \overline{\mu_1}, \quad \mu_4 = \overline{\mu_2} \quad (14.a)$$

$$\mu_{d1} = i, \quad \mu_{d2} = \overline{\mu_{d1}} \quad (\mu_{d1} \rightarrow \mu_d) \quad (14.b)$$

따라서, U 와 Ψ 의 일반해는

$$U = 2\text{Re} [U_1(z_1) + U_2(z_2)] \quad z_k = x_1 + \mu_k x_2 \quad (15.a)$$

$$\Psi = 2\text{Re} [\Psi_d(z_d)] \quad z_d = x_1 + \mu_d x_2 \quad (15.b)$$

이고 $U_1(z_1)$, $U_2(z_2)$, $\Psi_d(z_d)$ 는 각각 z_1, z_2, z_d 에 대해 해석적(analytic)이다.

복소 퍼텐셜 함수 $\varphi_k(z_k)$, $\varphi_d(z_d)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\varphi_k(z_k) = U_k' = \frac{dU_k}{dz_k} \quad (k = 1, 2) \quad \varphi_d(z_d) = \Psi_d \quad (16)$$

식(10.a), 식(15.a), 식(16)을 사용하여 응력 성분을 유도하면

$$\sigma_{11} = 2\text{Re} \sum_{k=1}^2 \mu_k^2 \varphi_k'(z_k) \quad \sigma_{22} = 2\text{Re} \sum_{k=1}^2 \varphi_k'(z_k) \\ \sigma_{12} = -2\text{Re} \sum_{k=1}^2 \mu_k \varphi_k'(z_k) \quad (17)$$

이고 식(10.b), 식(15.b), 식(16)을 사용하여 전기변위 성분을 구하면

$$D_1 = 2\text{Re} [\mu_d \varphi_d'(z_d)] \quad D_2 = -2\text{Re} [\varphi_d'(z_d)] \quad (18)$$

로 구해진다.

식(17)에서 구한 응력을 구성식인 식(7.a)에 대입하면 다음과 같이 변형률이 구해진다.

$$\epsilon_{11} = 2\text{Re} \sum_{k=1}^2 (a_{11}\mu_k^2 + a_{12}) \varphi_k' \\ \epsilon_{22} = 2\text{Re} \sum_{k=1}^2 (a_{12}\mu_k^2 + a_{11}) \varphi_k' \\ 2\epsilon_{12} = -2\text{Re} \sum_{k=1}^2 a_{33}\mu_k \varphi_k' \quad (19)$$

마찬가지로 식(18)에서 구한 전기변위를 구성식인 식(7.b)에 대입하면 전기장이 구해진다.

$$E_1 = 2\text{Re} [\delta_{11}\mu_d \varphi_d'] \quad E_2 = -2\text{Re} [\delta_{11}\varphi_d'] \quad (20)$$

변형률과 변위(u)의 관계는 다음과 같으므로

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (21)$$

수직변형률 성분을 적분하면 변위를 구할 수 있다. 강제 운동을 고려하지 않고 변위를 구하면 다음과 같다.

$$u_1 = 2\text{Re} \sum_{k=1}^2 p_k \varphi_k(z_k) \quad p_k = a_{11}\mu_k^2 + a_{12}$$

$$u_2 = 2\text{Re} \sum_{k=1}^2 q_k \varphi_k(z_k) \quad q_k = \frac{a_{12}\mu_k^2 + a_{11}}{\mu_k} \quad (22)$$

전기장과 전기퍼텐셜(electric potential) 사이의 관계식은 다음과 같으므로

$$\mathbf{E} = -\phi_{,i} \quad (23)$$

기준퍼텐셜을 고려하지 않을 때의 전기퍼텐셜은 전기장을 적분하여 다음과 같이 구해진다.

$$\phi = -2\text{Re} [\delta_{11}\mu_d\varphi_d] \quad (24)$$

위의 과정들을 통해서 평면 변형률 상태의 압전 문제는 복소 퍼텐셜 함수 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_d$ 를 구하는 문제로 축소되었다. 이 복소 퍼텐셜 함수들을 결정하기 위해서는 다음의 경계조건을 만족하여야 한다.

$$\begin{aligned} 2\text{Re} \sum_{k=1}^2 \varphi_k(z_k) &= - \int_0^s t_2 ds \\ 2\text{Re} \sum_{k=1}^2 \mu_k \varphi_k(z_k) &= \int_0^s t_1 ds \\ 2\text{Re} [\varphi_d(z_d)] &= - \int_0^s D_n ds \end{aligned} \quad (25)$$

t_1, t_2 는 표면력(traction vector)성분을 나타내고 D_n 은 표면전하(surface charge)의 수직방향성분을 나타낸다.

3. 균열을 가진 압전재료

Fig. 1과 같이 균열 선단(crack tip)이 원점에 위치하고 $-x_1$ 방향으로 균열이 존재하는 입방대칭성 압전재료를 무한체로, 표면력과 표면전하(surface charge)는 경계를 따라서 분포한다고 생각한다.

균열면에서는 표면력과 표면전하가 없다고 가정하면 균열면에서의 경계조건은 다음과 같다.

$$\mathbf{t} = 0 \quad \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (26)$$

균열선단에서의 복소 퍼텐셜 함수는 일반적으로 다음과 같이 주어지며¹⁷

$$\varphi_k(z_k) = \alpha_k \sqrt{z_k} \quad k=1, 2, d \quad (27)$$

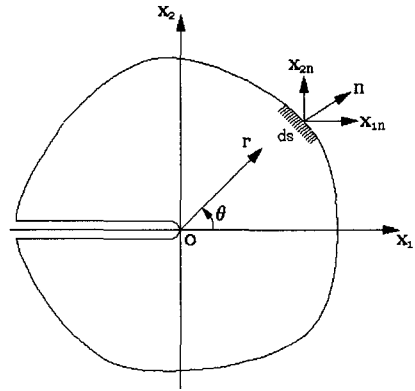


Fig. 1 Infinite piezoelectric medium with an open crack

α_k 는 복소수 계수이다.

균열면에서의 경계조건은 식(25), 식(26)에 의해

$$\begin{aligned} \varphi_1(z_1) + \varphi_2(z_2) + \overline{\varphi_1(z_1)} + \overline{\varphi_2(z_2)} &= 0 \\ \mu_1\varphi_1(z_1) + \mu_2\varphi_2(z_2) + \overline{\mu_1\varphi_1(z_1)} + \overline{\mu_2\varphi_2(z_2)} &= 0 \\ \varphi_d(z_d) + \overline{\varphi_d(z_d)} &= 0 \end{aligned} \quad (28)$$

로 주어지고 식(27)을 위식에 대입하면 균열면에서의 경계조건은 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 - (\overline{\alpha_1} + \overline{\alpha_2}) &= 0 \\ \mu_1\alpha_1 + \mu_2\alpha_2 - (\overline{\mu_1\alpha_1} + \overline{\mu_2\alpha_2}) &= 0 \\ \alpha_d - \overline{\alpha_d} &= 0 \end{aligned} \quad (29)$$

식(29)은 아래와 같은 실수 매개변수 k_1, k_2, k_d 가 존재하면 만족하게 된다.

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{k_1}{\sqrt{2}} \quad (30.a)$$

$$\mu_1\alpha_1 + \mu_2\alpha_2 = -\frac{k_2}{\sqrt{2}} \quad (30.b)$$

$$\alpha_d = \frac{k_d}{\sqrt{2}} \quad (30.c)$$

식(30.a)와 식(30.b)를 연립하여 풀면 다음과 같이 α_1, α_2 가 구해진다.

$$\alpha_1 = \frac{k_1\mu_2 + k_2}{\sqrt{2}(\mu_2 - \mu_1)} \quad \alpha_2 = \frac{k_1\mu_1 + k_2}{\sqrt{2}(\mu_1 - \mu_2)} \quad (31)$$

실수 매개변수 k_1, k_2 는 각각 모드 I, 모드 II 일 때의 응력확대계수라하고 k_d 는 전기변위확대계 수라 한다. 공학에서는 주로 k_1, k_2, k_d 에 $\sqrt{\pi}$ 를 곱 한 값을 사용한다.

$$K_I = \sqrt{\pi}k_1, \quad K_{II} = \sqrt{\pi}k_2, \quad K_D = \sqrt{\pi}k_d \quad (32)$$

C_1, C_2 를 아래와 같이 정의하면

$$C_1 = \frac{K_I\mu_2 + K_2}{\mu_2 - \mu_1} \quad C_2 = \frac{K_I\mu_1 + K_2}{\mu_1 - \mu_2} \quad (33)$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_d$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\alpha_1 = \frac{C_1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \alpha_2 = \frac{C_2}{\sqrt{2\pi}}, \quad \alpha_d = \frac{K_D}{\sqrt{2\pi}} \quad (34)$$

식(27), 식(34)를 각각 식(17), 식(18), 식(20), 식 (22), 식(24)에 대입하고 z_k 를 극좌표로 나타내면 균열선단부근의 응력, 변위, 전기변위, 전기장, 전기 퍼텐셜을 구할 수 있다.

응력(stress)

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \frac{\mu_k^2 C_k}{\sqrt{\cos \theta + \mu_k \sin \theta}} \\ \sigma_{22} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \frac{C_k}{\sqrt{\cos \theta + \mu_k \sin \theta}} \\ \sigma_{12} &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \frac{\mu_k C_k}{\sqrt{\cos \theta + \mu_k \sin \theta}} \end{aligned} \quad (35)$$

변위(displacement)

$$\begin{aligned} u_1 &= \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 p_k C_k \sqrt{\cos \theta + \mu_k \sin \theta} \\ u_2 &= \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 q_k C_k \sqrt{\cos \theta + \mu_k \sin \theta} \end{aligned} \quad (36)$$

전기변위(electric displacement)

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \frac{\mu_d K_D}{\sqrt{\cos \theta + \mu_d \sin \theta}} \\ D_2 &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \frac{K_D}{\sqrt{\cos \theta + \mu_d \sin \theta}} \end{aligned} \quad (37)$$

전기장(electric field)

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \frac{\delta_{11} \mu_d K_D}{\sqrt{\cos \theta + \mu_d \sin \theta}} \\ E_2 &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \frac{\delta_{11} K_D}{\sqrt{\cos \theta + \mu_d \sin \theta}} \end{aligned} \quad (38)$$

전기퍼텐셜(electric potential)

$$\phi = -\sqrt{\frac{2r}{\pi}} \operatorname{Re} [\delta_{11} \mu_d K_D \sqrt{\cos \theta + \mu_d \sin \theta}] \quad (39)$$

식(35), 식(37)를 살펴보면 응력과 전기변위는 균열선단에서 $r^{-1/2}$ 의 특이성을 가지고 균열선단 부근에서 응력과 전기변위의 분포는 기하학적인 형 상과 하중 그리고 재료의 특성에 관계됨을 알 수 있다.

4. 가중함수이론

Fig. 2와 같은 균열을 가진 단일연결 영역에서 의 복소 퍼텐셜 함수를 다음과 같이 정의한다.

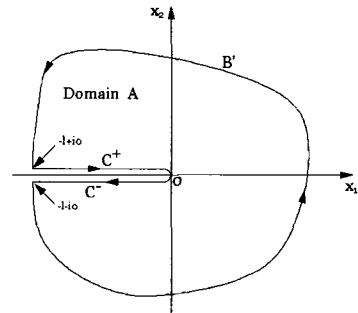


Fig. 2 A simply connected region with an open crack

$$\begin{aligned} \varphi_1^s(z_1) &= \frac{a_1^f}{\sqrt{z_1}} & a_1^f &= \frac{\rho_1 \mu_2 + \rho_2}{\mu_2 - \mu_1} \\ \varphi_2^s(z_2) &= \frac{a_2^f}{\sqrt{z_2}} & a_2^f &= \frac{\rho_1 \mu_1 + \rho_2}{\mu_1 - \mu_2} \end{aligned}$$

$$\varphi_d^*(z_d) = \frac{a_d^f}{\sqrt{z_d}} \quad a_d^f = \rho_d \quad (40)$$

복소 퍼텐셜 함수 $\varphi_1^f, \varphi_2^f, \varphi_d^f$ 에 의해 정의된 장(field)에서는 균열면에서 표면력과 표면전하가 없지만 외부 경계에서는 표면력과 표면전하가 평형을 이루며 존재하고 있다. 이 표면력과 표면전하의 반대 방향으로 정의된 표면력과 표면전하(식(27)의 복소 퍼텐셜 함수에 의해 정의된 정상장(regular field)에서의 표면력과 표면전하)를 합성해 주면 외부 경계에서의 표면력과 표면전하는 사라지게 된다.

아래와 같은 복소 퍼텐셜 함수에 의해 정의된 장을 기초장(fundamental field)라고 한다.

$$\begin{aligned} \varphi_1^f(z_1) &= \varphi_1^*(z_1) + \varphi_1(z_1) \\ \varphi_2^f(z_2) &= \varphi_2^*(z_2) + \varphi_2(z_2) \\ \varphi_d^f(z_d) &= \varphi_d^*(z_d) + \varphi_d(z_d) \end{aligned} \quad (41)$$

이 field에서는 체적력과 자유전하가 존재하지 않으며 외부 경계, 균열면에서의 표면력과 표면전하도 존재하지 않는다. 그리고 균열선단에서 무한한 변위를 가지므로 균열선단 부근에서 무한대의 변형에너지를 가지게 된다. 이러한 이유로 탄성론의 유일성의 정리를 사용할 수 없다.

압전재료에서의 Betti의 상반정리는 다음과 같다.^{18,19}

$$\begin{aligned} &\int_S t_i^1 u_i^2 dS + \int_S D_n^1 \phi^2 dS \\ &= \int_S t_i^2 u_i^1 dS + \int_S D_n^2 \phi^1 dS \end{aligned} \quad (42)$$

이 Betti의 상반정리를 체적력과 자유전하가 존재하지 않는 정상장과 기초장에 적용하기 위해 Fig. 3과 같은 균열선단을 제거한 영역 A' 를 고려한다. 여기에 Betti의 상반정리를 적용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &\int_{B+L} t_i^f u_i^r dS + \int_{B+L} D_n^f \phi^r dS \\ &= \int_{B+L} t_i^r u_i^f dS + \int_{B+L} D_n^r \phi^f dS \end{aligned} \quad (43)$$

위첨자 f, r 는 각각 기초장과 정상장을 의미하고, 경로 B 는 경로 L 을 제외한 나머지 B', C^+, C^- 로 구성된 경로를 나타낸다. 경로 B 는 반시계 방향이고 경로 L 은 시계방향이다.

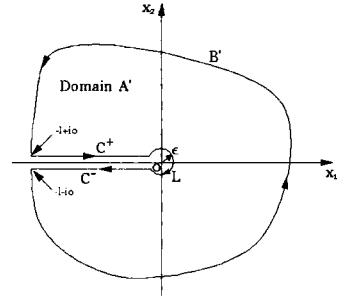


Fig. 3 Simply connected region which deleted the crack tip

기초장에서는 B 부분에서 표면력과 표면전하가 존재하지 않으므로 식(43)은 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} &\int_L t_i^f u_i^r dS + \int_L D_n^f \phi^r dS - \int_L t_i^r u_i^f dS \\ &- \int_L D_n^r \phi^f dS = \int_B t_i^r u_i^f dS + \int_B D_n^r \phi^f dS \end{aligned} \quad (44)$$

K 를 다음과 같이 정의하면

$$K = \int_B t_i^r u_i^f dS + \int_B D_n^r \phi^f dS \quad (45)$$

식(44)에 의하여

$$\begin{aligned} K &= \int_{-L} t_i^r u_i^f dS + \int_L D_n^r \phi^f dS \\ &- \int_{-L} t_i^f u_i^r dS - \int_L D_n^f \phi^r dS \end{aligned} \quad (46)$$

로 나타낼 수 있다. 여기서 $-L$ 은 반시계방향을 의미한다.

$t_i = D_n$ 라 하고 $u_i = \phi$ 라 하면 식(46)은 다음과 같이 간결하게 나타낼 수 있다.

$$K = \int_{-L} (t_i^r u_i^f - t_i^f u_i^r) dS, \quad i = 1, 2, 4 \quad (47)$$

T_1, T_2, T_4 를 다음과 같이 정의하고

$$T_1 = 2\text{Re} \sum_{k=1}^2 \mu_k \varphi_k(z_k), \quad T_2 = -2\text{Re} \sum_{k=1}^2 \varphi_k(z_k)$$

$$T_d = -2\text{Re}\varphi_d(z_d) \quad (48)$$

식(25)를 이용하면 식(47)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$K = \int_{-L}^L (u_i^r dT_i^r + T_i^r d u_i^r) \quad (49)$$

식(49)의 적분을 계산하고 일반적인 경우에 대해 고려하기 위하여 $\epsilon \rightarrow 0$ 일 때의 K 는 다음과 같이 구해진다.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} K = K_0 = -4\pi\text{Im} [a_1^r a_1^f (p_1 \mu_1 - q_1) + a_2^r a_2^f (p_2 \mu_2 - q_2) + a_d^r a_d^f \delta_{11} \mu_d] \quad (50)$$

식(31), 식(40)를 식(50)에 대입하고 M_1, M_2, M_d 를 다음과 같이 정의하면

$$M_1 = \frac{[\mu_2^2 (p_1 \mu_1 - q_1) + \mu_1^2 (p_2 \mu_2 - q_2)]}{(\mu_1 - \mu_2)^2}$$

$$M_2 = \frac{[(p_1 \mu_1 - q_1) + (p_2 \mu_2 - q_2)]}{(\mu_1 - \mu_2)^2}, \quad M_d = \delta_{11} \mu_d \quad (51)$$

K_0 은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$K_0 = -2\sqrt{2}\pi\text{Im} (M_1 \rho_1 k_1 + M_2 \rho_2 k_2 + M_d \rho_d k_d) = 2\sqrt{2}\pi\text{Re} i (M_1 \rho_1 k_1 + M_2 \rho_2 k_2 + M_d \rho_d k_d) \quad (52)$$

또한 식(45)에 의해 K_0 는 다음과 같이 된다.

$$K_0 = \int_B t_i^r u_i^f dS + \int_B D_n^r \phi^f dS \quad (53)$$

식(52)과 식(53)의 관계를 이용하면 응력확대계수와 전기변위확대계수를 구할 수 있다. 특별한 세 가지 경우를 생각하고 k_1, k_2, k_d 를 구하면 다음과 같다.

Case 1. $\rho_1 = -\frac{1}{\text{Im}M_1} \quad \rho_2 = \rho_d = 0 \quad (54.a)$

$$k_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \int_S (t_1^r u_1^{f(1)} + t_2^r u_2^{f(1)} + D_n^r \phi^{f(1)}) dS \quad (54.b)$$

Case 2. $\rho_2 = -\frac{1}{\text{Im}M_2} \quad \rho_1 = \rho_d = 0 \quad (55.a)$

$$k_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \int_S (t_1^r u_1^{f(2)} + t_2^r u_2^{f(2)} + D_n^r \phi^{f(2)}) dS \quad (55.b)$$

Case 3. $\rho_d = -\frac{1}{\text{Im}M_d} \quad \rho_1 = \rho_2 = 0 \quad (56.a)$

$$k_d = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \int_S (t_1^r u_1^{f(d)} + t_2^r u_2^{f(d)} + D_n^r \phi^{f(d)}) dS \quad (56.b)$$

위 세 가지 경우에 대한 $\varphi_1^f, \varphi_2^f, \varphi_d^f$ 를 정규화된(normalized) 기초장이라고 하며 u_i^f, ϕ^f 를 가중함수(weight function)라고 한다.

5. 수치예제

평면변형률 상태의 입방대칭성 압전재료에서 가중함수를 이용한 모드 I, 모드 II의 응력확대계수의 계산은 이방성 탄성재료에서 가중함수를 이용한 응력확대계수를 구하는 방법으로 구할 수 있다.²⁰ 본 연구에서는 전기적 하중(표면전하)이 작용하는 상태에서의 전기변위확대계수를 가중함수이론을 사용하여 구하고자 한다.

유한 물체에서 가중함수를 해석적으로 구하는 것은 특별한 기하학적인 경우를 제외하고는 불가능하므로 유한요소법을 사용하여 Fig. 4와 같은 시편에 대한 전기변위확대계수를 구하고자 한다. 유한요소해석에는 ANSYS 6.0을 이용하였으며 절점 712개와 사각형 특이요소 216개를 사용하여 시편 상부를 Fig. 5과 같이 모델링 하였다.

해석에 사용된 압전재료는 갈륨비소(GaAs)이고 재료 물성치는 Table 1과 같이 주어진다.

식(24), (25), (40), (51), (56.a)를 이용해 ϕ^* 와 표면전하를 구하고, 계산된 표면전하와 방향이 반대인 표면전하를 경계를 따라서 작용시켰을 때 발생하는 ϕ 를 ϕ^* 와 합해주면 가중함수 ϕ^f 를 구할 수 있다. 경계에 있는 각 절점에서의 가중함수 ϕ^f 를 계산하면 Table 2와 같다.

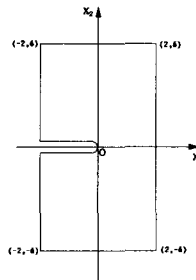


Fig. 4 Specimen

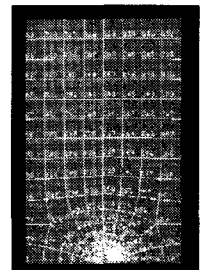


Fig. 5 FEM model

Table 1 Material properties of GaAs²¹

GaAs(Gallium arsenide)		
Compliance coefficients (TPa) ⁻¹	s_{11}	11.75
	s_{12}	-3.66
	s_{44}	16.8
Piezoelectric constant (Vm/N)	g_{41}	-24×10^{-3}
Relative permittivity	$\frac{\epsilon}{\epsilon_0}$	10.9

Table 2 Normalized mode IV weight function

x_1	x_2	ϕ^I	x_1	x_2	ϕ^I	x_1	x_2	ϕ^I
2	0	0.0000	2	5.5	0.1615	-2	5	0.2210
2	0.5	0.1794	2	6	0.1488	-2	4.5	0.2502
2	1	0.2892	1.5	6	0.1535	-2	4	0.2818
2	1.5	0.3346	1	6	0.1587	-2	3.5	0.3169
2	2	0.3348	0.5	6	0.1617	-2	3	0.3558
2	2.5	0.3137	0	6	0.1634	-2	2.5	0.3983
2	3	0.2845	-0.5	6	0.1642	-2	2	0.4424
2	3.5	0.2545	-1	6	0.1646	-2	1.5	0.4834
2	4	0.2263	-1.5	6	0.1650	-2	1	0.5044
2	4.5	0.2011	-2	6	0.1644	-2	0.5	0.5051
2	5	0.1794	-2	5.5	0.1938	-2	0	0.3980

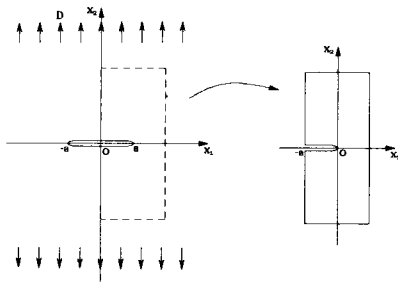


Fig. 6 Infinite piezoelectric medium with a Griffith crack

Fig. 6에서와 같이 Griffith 균열을 가지는 무한체인 압전재료의 무한대에서 전기적인 하중을 주었을 때 그림과 같이 점선을 따라 표면전하를 계산하여 점선으로만 된 물체의 경계를 따라 전기적인 하중을 주게 되면 무한체 안에 있을 때와 같게 되며 균열 끝에서의 전기변위확대계수 또한 같게 된다.

Griffith 균열에서 전기적인 하중 D 가 무한대에서 작용할 때 φ_d 는 다음과 같이 주어진다¹³(η_d 는 무한대에서의 하중 조건에 따른 상수).

$$\varphi_d = \eta_d z_d + \frac{D}{2} (z_d - \sqrt{z_d^2 - a^2}) \quad (57)$$

$z_d = \pm a$ 에서의 전기변위확대계수 K_D 는 다음과 같이 주어진다.

$$K_D = \sqrt{\pi a} D \quad (58)$$

D 는 1로 주어지고 Fig. 6에서 점선으로 된 부분이 Fig. 4의 시편과 같을 때 각 절점에서의 표면전하를 구하고 Table 2에 주어진 가중함수와 곱한 후 수치적으로 적분하면 전기변위확대계수 K_D 는 2.4108 구해진다. 식(58)을 이용해 K_D 를 구하면 2.5066으로 구해진다.

Fig. 7에서와 같은 표면전하를 걸어 주었을 때 가중함수를 사용하여 K_D 를 구하면 2.3475로 구해진다. 그 때의 σ_{zz} , σ_{yz} 는 식(5), 식(37)에 의하여 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} \sigma_{yz} &= \frac{1.338 \times 10^9}{\sqrt{r}} \operatorname{Re} \frac{i}{\sqrt{\cos \theta + i \sin \theta}} \\ \sigma_{zz} &= -\frac{1.338 \times 10^9}{\sqrt{r}} \operatorname{Re} \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + i \sin \theta}} \end{aligned} \quad (59)$$

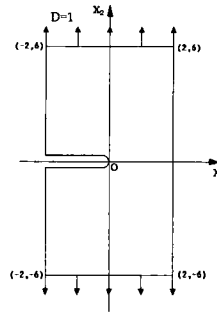


Fig. 7 Specimen under electric load

6. 결론

균열을 가진 입방대칭성 압전재료에 대하여 Lekhnitskii 공식을 사용하여 평면변형률 상태의 응력, 변형률, 전기변위, 전기장을 구하였고 가중함수 이론을 사용하여 응력확대계수와 전기변위확대계수를 구하는 방법을 제시하였다.

가중함수는 전기-기계적 하중이 작용하지 않는

경우에서의 전기 퍼텐셜과 변위이므로 이를 구하면 주어진 기하학적 형상에서의 모든 하중에 대한 응력확대계수와 전기변위확대계수를 균열선단부근에 대한 특별한 해석 없이도 구할 수 있다.

가중함수이론의 정확도를 알아보기 위하여 전기적 하중이 작용하는 상태에서의 전기변위확대계수를 가중함수와 식(58)를 이용하여 각각 구한 후 비교하면 약 3.8%의 오차가 나타났다.

Fig. 7과 같이 시편에 표면전하만 주어졌을 때 응력성분 σ_{xx} , σ_{yz} 가 구해지며 전기적인 하중으로 인해 발생한 응력성분 또한 $r^{-1/2}$ 의 특이성을 가짐을 알 수 있었다.

참고문헌

1. Ting, T. C. T., Anisotropic Elasticity Theory and Applications, Oxford University Press, 1996.
2. Pak, Y., "Linear electro-elastic fracture mechanics of piezoelectric materials," Int. J. of Fracture, Vol. 54, pp. 79-100, 1992.
3. Suo, Z., Kuo, C.-M., Barnett, D. M. and Willis, J. R., "Fracture mechanics for piezoelectric ceramics," J. of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 40, pp. 739-765, 1992.
4. Beom, H. G. and Atluri, S. N., "Near-tip fields and intensity factors for interfacial cracks in dissimilar anisotropic piezoelectric media," Int. J. of Fracture, Vol. 75, pp. 163-183, 1996.
5. Deng, W. and Meguid, S., "Analysis of conducting rigid inclusion at the interface of two dissimilar piezoelectric materials," J. of Applied Mechanics, Vol. 65, pp. 76-84, 1998.
6. Wang, T. C. and Han, X. L., "Fracture mechanics of Piezoelectric materials," Int. J. of Fracture, Vol. 98, pp. 15-35, 1999.
7. Ma, L. and Chen, Y., "Weight functions for interface cracks in dissimilar anisotropic piezoelectric materials," Int. J. of Fracture, Vol. 110, pp. 263-279, 2001.
8. Lekhitskii, S., Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body, Holden-Day Inc., San Francisco, 1963.
9. Sosa, H., "Plane problems in piezoelectric media with defects," Int. J. of Solids and Structures, Vol. 28, pp. 491-505, 1991.
10. Sosa, H., "On the fracture mechanics of piezoelectric solids," Int. J. of Solids and Structures, Vol. 29, pp. 2613-2622, 1992.
11. Gao, C. and Fan, W., "Exact solutions for the plane problem in piezoelectric materials with an elliptic or a crack," Int. J. of Solids and Structures, Vol. 36, pp. 2527-2540, 1999.
12. Xu, X. and Rajapakse, R., "A theoretical study of branched cracks in piezoelectrics," Acta. Materialia, Vol. 48, pp. 1865-1882, 2000.
13. Xu, X. and Rajapakse, R., "On a plane crack in piezoelectric solids," Int. J. of Solids and Structures, Vol. 38, pp. 7643-7658, 2001.
14. Nye, J., Physical Properties of Crystals, Oxford University Press, 1957.
15. Qin, Q., Fracture Mechanics of Piezoelectric Materials, WIT Press, 2001.
16. Pak, Y., "Crack Extension Force in a Piezoelectric Material," J. of Applied Mechanics, Vol. 57, pp. 647-653, 1990.
17. Muskhelishvili, N., Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity, Noordhoff International Publishing, 1977.
18. Liu, Y. and Fan, H., "On the conventional boundary integral equation formulation for piezoelectric solids with defects or of thin shapes," Eng. Analysis with boundary Elements, Vol. 25, pp. 77-91, 2001.
19. Parton and Kudryavtsev, Electromagnetoelasticity Piezoelectrics and Electrically Conductive Solids, Gordon and Breach Science Publishers, 1988.
20. An, D., "Weight function theory for a rectilinear anisotropic body," Int. J. of Fracture, Vol. 34, pp. 85-109, 1987.
21. Elastic, piezoelectric, pyroelectric, piezooptic, electrooptic constants, and nonlinear dielectric susceptibilities of crystals, Berlin:Springer-Verlag, 1979.