大韓數學敎育學會誌 數學敎育學硏究 第 13 卷 第 4 號
The Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. XIII, No.4, 429-446. Nov 2003

# 조선시대의 산학서 〈구일집〉의 내용 분석 및 교육적 활용 방안 탐구[1]

장 혜 원*

<구일집>은 9장으로 이루어진 조선 후기의 대표적인 산학서이다. 473개 이상의 문제와 그에 대한 풀이가 주를 이루는 이 책의 내용을 분석함으로써 당시의 전문 산학자에 의한 수학적 활동을 음미할 수 있다. 그 중, 측정 단위와 소수 표기, 원주율 및 원의 넓이와 구의 부피, 거듭제곱 명명법, 계산 도구인 산대의 이용, 남거나 모자라는 양에 대한 계산법인 영부족술, 연립방정식의 해법인 방정술, 다항식의 표기법인 천원술, 고차방정식의 해법인 개방술 등은 오늘날의 수학 지식 및 방법과 비교할 때 특히 주목할 만하다. 이러한 분석에 기초하여 학교 수학에서의 교육적 활용 가능성을 타진해 본다.

## I. 머리말

세계화의 시대에 못지 않게 그에 반하여 우리의 것을 제대로 알고 지키고자 하는 움직임이 사회, 문화, 예술 전반에 일고 있다. 그러한 움직임은 학문의 영역에서도 간과될 수 없으며, 수학 역시 예외가 아니다. 우리가 학교에서 배우고 가르치는 수학적 지식의 근원을 거슬러 오르면 낯설지 않은 역사적 배경이나 수학자의 일화 등을 만나게 된다. 그런데 그 대부분은 우리의 선조들이 아닌 서양 또는 그 외 지역의 역사에서 찾아지는 것들이다. 간혹 약간의 친근감이 느껴지는 중국 문명권의 수학적 산물이 거론되기는 하지만 그것 역시 우리 민족의 이야기는 아니다.

그러나 우리에게는 우리가 잘 알지 못하는 수학의 역사가 오래 전부터 있었으며 오늘날 연구 대상으로서 가치가 있는 적잖은 수학 활동의 흔적이 남아있음에 놀라게 된다. 통일신라시대부터 조선조 말에 이르기까지 줄곧 산학의 전통이 이어져 왔으며, 산학도 타 분야에서와 마찬가지로 중국의 영향을 많이 받은 것이 사실이지만 우리 나름대로의 독창성이 돋보이는 저서를 찾는 것이 결코 어려운 일은 아니다.

본 연구에서는 우리나라의 수학사에 대한 연구의 기초를 마련하고자 하는 의도에서, 조선시대의 산학서 <구일집>의 내용을 분석함으로써 우리의 전통 수학의 모습을 확인하고자 한다. 그럼으로써 우리 고유의 수학 연구 방법, 수학 문제 해결의 관점과 방법, 수학에 대한 태도 등에 대해 적잖은 시사점을 얻을 것으로 기대된다. 이것이 역사에 대한 하나의 정의인 과거와 현재의 대화를 말한다면, 그것은 거기서 끝나지 않고 현재와 미래의 대화로 이어져야 진정한 역사의 의미를 찾을 것이다. 이 연

* 한국수학사학회, chwlyon@yahoo.com
1) 이 연구는 한국학술진흥재단의 2002년도 기초학문육성지원(071-CS2001)에 의하여 연구되었음.

구가 향후 전통 수학 연구를 자극하는 촉진제의 역할을 할 수 있고, 수학 교육에 영향을 미쳐 학생들이 우리의 전통 수학에 관심을 갖고 선조들의 문제 해결 방법에 흥미를 느낄 수 있다면 대화의 연장이 이루어질 것으로 생각한다.

본고는 <구일집>의 내용을 개관하고 문제 분석을 통해 당시 산학자들의 수학 활동 중 오늘날과 차이가 있어 주목할만한 몇 가지를 고찰한다. 아울러 교육적 활용 방안에 대해 생각해본다.

## II. 〈구일집〉의 개관 및 저자

<구일집>은 범례와 9개의 장[2)]으로 이루어진 조선 후기의 산학서이다. 형식면에서는 동양의 많은 산학서의 구성 방식과 마찬가지로, '문제－답－풀이'가 주를 이룬다. 즉 문제가 제시되고 그 답과 풀이가 뒤따르는 방식인데, 문제를 제시하는 틀은 '今有…(지금 …이 있어)'이고, 답을 제시하기 위해 '답왈(答曰)', 풀이법을 제시하기 위해 '법왈(法曰)'의 형식을 취한다.

한편 내용면에서는 중국의 산학서인 산학계몽, 구장산술, 상명산법 등에서 발췌한 문제들을 수정하여 싣거나 저자가 출제한 문제들을 통해 산학 내용을 소개하고 있다. 일부 문제는 조선의 다른 산학서와 공통으로 담고 있는 것도 있으나, 문제의 수나 그 응용력에 있어 월등하며 때로는 저자 자신의 특유한 해법이나 다른 책의 내용에 대한 오류 지적, 중국 사력과의 대담 기록 등으로 인해 저자의 독창성이 돋보이는 책이다. 특히 이 책은 조선 실학기 수학 발전 과정의 첫 단계로 간주되는 시기, 즉 중인 산학자 사이에서 의욕적인 수학 연구가 일어나 저술 활동이 활발해진 시기의 대표작으로 꼽힌다(김용운 외, 1977). 무려 473개[3)]의 문제를 다루고 있는데 각 권의 내용과 문제 수는 <표III-1>과 같다.

저자 홍정하(洪正夏: 1684～?)는 조선 왕조 숙종 10년에 태어나 활동한 산학자이다. 조선시대의 전문 산학자인 산사(算士)는 중인 계급에 해당하고 시험을 치루어 선발되었다. 산사의 합격자 명단인 주학입격안(籌學入格案)에 그의 부, 조부, 외조부, 장인이 모두 산학자로 기록된 것으로 보아(ibid.), 홍정하는 당시의 전형적인 산학자 집안 출신임을 알 수 있다.

## III. 〈구일집〉의 문제 분석

<구일집>은 문제 중심으로 구성되어 있으므로 문제와 그 풀이법을 분석함으로써 당시의 수학적 활동에 대한 음미가 가능하다. 이미 언급했듯이 여타의 산학서에 비해 많은 양의 문제를 다루고 있으며, 당시의 사회상이나 일상사, 그리고 수학적 지식 및 활동을 추측해 볼 수 있는 흥미로운 문제 상황과 해법이 다수 있다.

그러나 문제나 풀이의 타당성과 관련하여 문제를 검토해 보면 심각한 오류를 포함하는 문제도 발견된다. 한편 문제의 조건이 필요 이상으로 많거나 답을 일의적으로 정하기에 조건이 부족한 문제도 있다.

이제 몇 가지 사례를 통해 확인하여 보자.

2) <표III-1>에서 보듯이 천, 지, 인 3권의 책으로 이루어져 있고, '권'은 장에, '문'은 절에 해당한다.
3) 서술 형식의 차이로 인해 9권 잡록의 문제는 제외한 수이다.

## 1. 문제의 오류

문제 1-3-12[4]는 세 변의 길이와 높이가 주어진 삼각형의 넓이를 구하는 문제(본고의 V장 참조)인데 조건이 필요 이상으로 많아 세 변만으로도 구할 수 있고 밑변과 높이만으로도 구할 수 있다. 그런데 이 두 가지 방법으로 계산해보면 네 개의 조건을 모두 만족하는 삼각형이 존재하지 않는 불합리한 상황이다.

문제 8-1-35에서는 정육면체, 구, 정사각형의 부피 또는 넓이의 합이 조건으로 제시된다. 그러나 부피와 넓이는 차원이 다르기 때문에 덧셈이나 뺄셈이 의미가 없으므로 잘못 설정된 문제 상황이다.

## 2. 풀이의 오류

문제 5-1-8과 5-1-9는 구고현의 정리를 이용하여 푸는 문제인데 전자는 모델링 과정에서 오류가 있고, 후자는 변 사이의 관계에 대한 오류가 있어 풀이가 잘못되어 있다.

## 3. 조건의 부족

문제 1-3-7은 서로 다른 네 변의 길이가 주어진 사각형의 넓이를 구하는 문제인데, 네 변의 길이만으로는 사각형이 일의적으로 결정되지 않는다.

문제 1-4-9는 명주 251640자를 마군 6명에게

<표III-1> 구일집의 내용

| | 권 | 문 | 문제수 | 주요 내용 |
|---|---|---|---|---|
| 천 | 범례 | | | 차분, 원, 이항식의 $n$제곱, 이항계수 |
| | 1 | 종횡승제문 | 19 | 곱셈, 나눗셈, 수열 |
| | | 이승동제문 | 8 | 비례 문제, 비례식 |
| | | 전무형단문 | 29 | 평면도형의 넓이 |
| | | 절변호차문 | 16 | 비례 배분 |
| | | 상공수축문 | 8 | 입체도형의 부피 |
| | 2 | 귀천차분문 | 22 | 연립방정식, 수열, 연비, 공배수 |
| | | 차등균배문 | 18 | 비례 배분, 수열 |
| | | 귀천반율문 | 3 | 특수한 비율에 의한 분배 문제 |
| | 3 | 지분제동문 | 6 | 분수 |
| | | 물부지총문 | 13 | 합동식 |
| | | 영부족술문 | 13 | 연립방정식 |
| 지 | 4 | 방정정부문 | 14 | 연립방정식 |
| | | 구척해은문 | 9 | 구의 부피 |
| | | 부병퇴타문 | 19 | 수열의 합 |
| | | 창돈적속문 | 26 | 입체도형의 부피 |
| | 5 | 구고호은문 | 78 | 직각삼각형 문제 |
| | | 망해도술문 | 6 | 높이, 거리 측량 |
| | 6 | 개방각술문 상 | 58 | 천원술<br>고차방정식의 풀이 |
| 인 | 7 | 개방각술문 중 | 66 | |
| | 8 | 개방각술문 하 | 42 | |
| | 9 | 잡록 | | 천문학 및 음계, 중국 사신과의 대담 |

4) 원문에는 문항 번호가 전혀 표시되어 있지 않지만, 편의상 1권 3문의 12번 째 문제를 나타내기 위해 사용한다.

는 184자를, 보군 7명에게는 96자를 나누어줄 때 마군과 보군의 수를 구하는 문제인데, 본문의 풀이는 마군과 보군의 수가 같다는 가정 하에 타당하다. 그렇지 않으면 조건이 부족하여 부정방정식이 되므로 여러 개의 답이 가능하다.

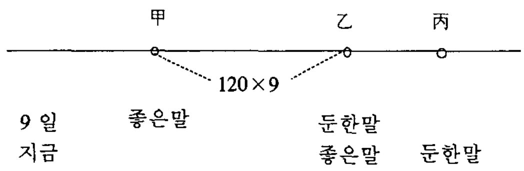
이 밖에도 2권 1문에는 최소공배수를 답으로 하는 몇몇 문제들이 제시되어 있다. 그러나 문제의 조건만으로는 모든 공배수들이 답이 될 수 있는 상황이다. 따라서 시간이나 거리 등의 조건에 제약을 부과해야 해가 일의적으로 결정된다.

### 4. 여분의 조건

문제 4-2-1은 구의 지름과 둘레를 주고 부피를 구하는 문제인데, 지름이나 둘레 중 하나를 알면 나머지를 알 수 있으므로 사실 두 조건 중 하나면 충분하다.

### 5. 흥미로운 풀이법

문제와 풀이가 오류를 포함하는 경우에 반해, 평상적으로 생각하는 해법 이외의 흥미로운 아이디어를 제시하기도 한다. 문제 2-1-4는 '지금 좋은 말은 하루에 120리를 가고 둔한 말은 하루에 75리를 간다. 지금 둔한 말이 9일 먼저 출발하여 간 후에 좋은 말이 뒤쫓아가면 며칠에 따라 잡는가?'이다. 이 문제를 풀라고 하면 십중팔구는 따라잡는 날의 수를 $x$라 놓고 거리에 대한 방정식을 세우거나 둔한 말이 먼저 출발하여 간 거리, 즉 좋은 말과 둔한 말이 떨어져 있는 거리 75×9를 하루 가는 거리의 차 45로 나누는 방법을 택할 것이다. 이와 달리, 좋은 말이 9일 간 거리인 120×9만큼 두 말이 떨어져 있을 때 좋은 말이 둔한 말을 따라 잡는 날의 수를 구하여 9를 뺀다는 저자의 우회적인 풀이법은, 좋은 말이 9일 전에 甲에서 출발하여 乙에 있는 둔한 말을 좇는데, 乙에 도착하니 그 동안 둔한 말도 이미 丙에 가 있는 상황인 [그림III-1]로 생각하여 푼 것이다 (강신원, 2003).




[그림III-1] 문제2-1-4의 풀이를 위한 그림

## IV. 조선 후기의 수학적 활동의 파악

<구일집>의 문제 및 해법을 분석함으로써 당시 산학자들의 연구 내용을 추정할 수 있다. 당시 사용되었던 측정 단위나 소수 표기, 원주율 및 그 계산법, 계산 도구인 산대, 그리고 영부족술, 방정술, 천원술, 개방술 등의 계산법에 대해 검토하고자 한다. 오늘날 우리의 수학 활동과 비교할 때, 오늘날에는 사라진 개념이나 오늘날의 방법과 차이나는 계산법은 전통 수학 연구에 대한 관심을 배가시켜 줄 것이다.

### 1. 측정 단위 및 소수 표기

1권 1문에서 곱셈, 나눗셈을 다루기 위한 문제 상황으로 길이, 무게, 들이 등의 단위 환산을 이용한다. 그로부터 당시 상용되던 여러 가지 측정 단위 및 단위 사이의 관계를 <표IV-1>과 같이 정리할 수 있다.

한편 기본 단위 이하의 값을 나타내기 위해서는 분수를 즐겨 사용하였다. 그러나 소수에

해당하는 표기 역시 병용되었는데, 소수를 쓰고 부르기 위해 소수 수사로서 푼(分), 리(厘), 호(毫), 사(絲), 홀(忽), 미(微), 섬(纖), 사(沙)…를 써서 각각 기준 단위의 $10^{-1}$, $10^{-2}$, $10^{-3}$, $10^{-4}$…를 나타내었다(김병덕, 1995). 다시 말해 십진체계를 잘 따르는 들이의 단위를 제외하고 길이, 무게, 넓이, 화폐에서 기준 단위 1을 각각 치(寸), 전(錢), 무(畝), 문(文)으로 삼아 그것의 1/10, 1/100…을 푼, 리…로 쓴 것이다(표 IV-2).

따라서 원문에 나오는 푼, 리, 호…는 특정 양의 단위가 아니라 일반적인 소수 표기법 및 명수법에 해당한다.

예를 들어, 문제 2-2-4에서 '299냥 5전 4푼 6리 8호 7사 5홀'은 299냥 5.46875전을 의미한다. 한편 문제 1-1-12의 '55냥에 2푼 반을 곱하면 1냥 3전 7푼 반이다'에서 2푼 반은 무게의 단위 '전'을 기준으로 하는 것이므로 냥과 계산할 때에는 0.025로 생각하여야 한다. 따라서 $55 \times 0.025 = 1.375$, 즉 1냥 3전 7푼 5리이다.

<표IV-1> 측정 단위

| | 단위 | 단위 사이의 관계 |
|---|---|---|
| 길이 | 필(疋), 자(尺), 치(寸) | 1필=35자*)<br>1자=1치 |
| | 보(步) | 1보=5자 |
| 들이 | 섬(石), 말(斗), 되(升), 홉(合), 작(勺) | 1섬=10말=$10^2$되=$10^3$홉=$10^4$작 |
| 무게 | 섬(石), 근(斤), 냥(兩), 전(錢) | 1섬=120근<br>1근=16냥<br>1냥=10전 |
| 넓이 | 무(畝), 보(步)**) | 1무=240보 |
| 화폐 | 관(貫), 문(文) | 1관=1000문 |

*) <구일집>과 달리 <묵사집산법>에서는 1필을 42 또는 35, 32자로 한다. 이로부터 시대에 따라 또는 동시대에조차 단위 관계가 달랐음을 알 수 있다.

**) $n$차방정식의 계산을 위해 기하학적으로 $n$차원 도형($4 \le n \le 10$)을 상상한 것에 비해, 측량 단위에서는 제곱, 세제곱을 구별하지 않는다. 즉 '보'가 길이의 단위인 동시에 넓이의 단위로 사용되는 것이다. 따라서 넓이에서는 제곱보, 부피에서는 세제곱보로 생각하여야 한다. 그러나 넓이의 단위로 실제 이용된 것은 '무'이다. 문제 1-3-1에서 제곱보로 구한 값을 무로 고쳐놓은 것은 그러한 연유에서이다.

<표IV-2> 소수 표기

| | ×10 | 기준 | ×1/10 | ×1/100 | ×1/1000 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 길이 | 자 | 치 | 푼 | 리 | 호 | … |
| 무게 | 냥 | 전 | | | | |
| 넓이 | | 무 | | | | |
| 화폐 | | 문 | | | | |

## 2. 원주율과 원의 넓이, 구의 부피

조선시대의 산학에 사용된 원주율과 원의 넓이, 구의 부피 계산 방법을 범례와 1권, 4권으로부터 알 수 있다. 우선 원주율은 중국에서 전래된 고율, 휘율, 밀률을 문제의 조건에 따라 사용하는데, 특별한 언급이 없으면 고율로 푼다. 고율은 고대로부터 전해 내려온 것이고, 휘율은 유휘가 고안한 것, 밀률은 조충지가 고안한 것으로서, 각각 3, 157/50, 22/7[5]에 해당한다. 각 경우에 '지름의 법'과 '둘레의 법'을 1과 3, 50과 157, 7과 22로 한다는 설명에서, 결과적으로 원주율을 $\frac{(\text{둘레의 법})}{(\text{지름의 법})}$으로 간주하였음을 알 수 있다(표IV-3).

<표IV-3> 세 가지 원주율

| 원주율 | 근사값 | 지름의 법 | 둘레의 법 | 비고 |
|---|---|---|---|---|
| 고율 | 3 | 1 | 3 | |
| 휘율 | 157/50 | 50 | 157 | 100 : 314 |
| 밀률 | 22/7 | 7 | 22 | |

한편 원의 넓이를 구하기 위하여 다음의 세 가지 방법을 이용한다. 원 모양의 밭의 넓이를 구하기 위해 어떤 원주율을 이용할 것인지를 말해주는 고원전, 휘원전, 밀원전에 대해 모두 동일한 방법이 적용되어 있다.

방법 1. $\frac{(\text{원주})\times(\text{지름})}{4}$

방법 2. $\frac{(\text{원주})^2\times(\text{지름의법})}{4\times(\text{둘레의법})}$

방법 3. $\frac{(\text{지름})^2\times(\text{둘레의법})}{4\times(\text{지름의법})}$

세 가지 방법을 원주율 $\pi$, 반지름 $r$을 써서 나타내면 모두 오늘날의 원의 넓이 공식 $\pi r^2$과 일치함을 확인할 수 있다. 그러나 원주의 반과 반지름을 두 변으로 하는 직사각형으로 근사시켜 생각한 것인지는 알 수 없다. 거듭된 측정 경험에 기초하여, 둘레와 지름의 측량 결과를 이용하여 얻은 규칙이라고 볼 수 있다(졸고, 2003).

한편 구(立圓)의 부피 역시 세 가지 방법으로 구한다.

방법 1. $\frac{(\text{지름})^3\times(\text{둘레의법})^2}{(\text{지름의법})^2\times16}$

방법 2. $\frac{(\text{둘레})^3\times(\text{지름의법})}{(\text{둘레의법})\times16}$

방법 3. $\frac{(\text{둘레})^2\times(\text{지름})}{16}$

각각을 원주율 $\pi$와 반지름 $r$을 써서 나타내면, 모두 $\frac{\pi^2r^3}{2}$에 해당하며 오늘날의 방법 $\frac{4\pi r^3}{3}$과는 차이가 있다.

## 3. 거듭제곱

당시에 거듭제곱을 부르는 방법이 오늘날과는 차이가 있으므로 산학서를 해석할 때 주의해야 한다. $a^2$을 $a$의 자승(自乘), $a^3$을 $a$의 재자승(再自乘), $a^4$을 $a$의 3자승(三自乘), 일반적으로 $a^n$( $n\geq4$)을 $a$의 ( $n$-1)자승이라 하여 오늘날의 $n$제곱과 혼동의 여지가 충분하다.

입체도형이나 방정식의 명칭에서 차수를 나타내는 부분도 마찬가지이다. 평방, 입방, 3승방, 4승방,… $n$승방은 각각 2, 3, 4, 5,…( $n$+1)차원에 해당한다. 예컨대 원문에 나오는 평방, 입방은 정사각형, 정육면체를, 3, 4,… 9승

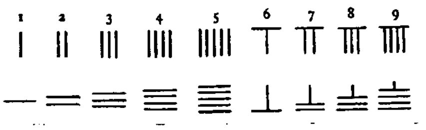
5) 엄밀히 말하면 이 값은 조충지의 두 가지 원주율 중 대략적인 값인 약률에 해당하며 밀률은 355/113이다.

방은 각각 가상의 4, 5, … 10차원 도형을 의미하며, 그것들의 한 모서리의 길이를 구하기 위해 고차방정식을 푸는 것을 평방개지, 입방개지, 3승방개지, 4승방개지 … 9승방개지한다고 한다.

### 4. 산대(산목)

한자를 이용한 수 표기는 자리값을 나타내는 수사를 함께 써 주어야 하기 때문에 기록하는 데는 문제가 없지만 계산에 적합한 표기는 아니다. 따라서 한자 문명권에서 효과적인 계산을 위하여 이용한 도구가 바로 산대, 또는 산목[6]이라 불리는 막대이다. 대나무를 깎아서[7] 보자기에 싸갖고 다니면서 계산을 하였는데, 보자기를 풀어 펴고 그 위에 산대로 수를 표시하여 이리저리 산대를 옮기면서 계산하였기 때문에 포산(布算)이라 한다.

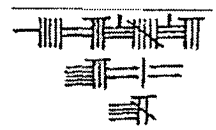
산대로 수를 [그림IV-1]과 같이 표시한다. 일, 백, 만…의 자리 수는 첫 행과 같이, 그리고 십, 천, 십만…의 자리 수는 옆으로 뉘어서 둘째 행과 같이 표현한다.




[그림IV-1] 각 자리 수의 산대 표시

이 산대 계산을 그림 표기로 쓰기 시작한 것은 원나라 초기로 짐작되며 보통 주식 숫자(籌式數字)라 불리운다(김용운 외, 1977). 산대를 그대로 옮겨 적되 자릿수 사이에 간격을 두지 않으며 0을 나타내는 빈 자리는 ○으로 쓰고 음수는 일의 자리에 사선을 긋는데, 만약 일의 자리가 ○이면 십의 자리에 긋는 방식으로 하여 ○이 아닌 자리에 음수를 나타낸다. 또한 소수 표현도 가능하였다. 예를 들어 문제 7-1-32에 있는 산대 그림(그림IV-2)은

−152885.88
5821.2
−47



[그림IV-2] 산대그림

을 나타내는데, 자리값에 따라 교대로 바뀌는 막대의 방향과 위치적 기수법에 의해 소수점 없이도 정확히 수를 읽을 수 있다. 분수도 산대로는 모두 소수로 표현되며 일의 자리에 음수 표시를 하기 때문에 음수일 때에는 소수를 파악하기가 더욱 용이하다.

### 5. 영부족술

3권 3문의 해법인 영부족술은 일반적으로 다음과 같은 문제 상황에 대한 것이다: "$x$명이 물건을 사기 위해 돈 $y$를 모으려고 한다. $a_1$명당 $b_1$씩 내면 $c_1$이 남고 $a_2$명당 $b_2$씩 내면 $c_2$가 모자란다." 이 문제에서 모은 돈의 남고 모자라는 관계가 다음 식으로 표현된다.

$$\begin{cases} \dfrac{b_1}{a_1}x = y + c_1 \\ \dfrac{b_2}{a_2}x = y - c_2 \end{cases}$$

6) 중국에서는 산(算) 또는 주(籌)라 하였다(Needham, 1959). 따라서 수학을 산학 또는 주학이라 한 것이다.
7) 시대에 따라 산대의 재질, 길이, 단면이 변하여 어느 하나로 말할 수는 없고 현재 국립민속박물관에 남아 있는 것의 길이는 약 15cm이다(김용운 외, 1977).

따라서 $x=\dfrac{a_1a_2(c_1+c_2)}{a_2b_1-a_1b_2}$ …①

특히, 한 사람이 $b_1$, $b_2$씩 내는 상황은 $a_1=a_2=1$이 되어

$$x=\frac{c_1+c_2}{b_1-b_2} \quad \cdots②$$

가 된다.

영부족술에 의한 풀이는 식 ①, ②에 주어진 조건을 대입하여 푸는 것이다. 예를 들어, 다음 문제와 그 풀이를 보자.

【3-3-7】 지금 사람들이 돈을 거두어 배를 산다. 세 사람마다 7문씩 거두면 1문이 남고 네 사람마다 8문씩 거두면 3문이 부족하다고 한다. 사람 수와 배의 값은 얼마인가?
(今有買梨 每三人出七文 盈一文 每四人出八文 不足三文 問人數梨價各若干)

**풀이** 남는 돈과 부족한 돈을 합하면 4문이고 3인, 4인을 서로 곱하면 12이고 이것을 4에 곱한다.[주: 48을 얻는다.] 이 수가 실이다. 또 3인과 8문, 4인과 7문을 서로 곱하여 빼면 4가 남고 이것을 법으로 한다. 48을 나누면 사람 수를 얻고 여기에 7문을 곱하고 3인으로 나누어 얻어지는 수에서 1문을 빼면 배의 값이다.
(法曰 併盈不足 得四文 以三人四人相乘 得十二乘之[註 得四十八] 爲實 又列三人-八文 四人-七文 互乘相減 餘四 爲法除實 得人數 以七文乘之 三人除之 內減盈一文 合問)

이 풀이는 사람 수를 $x$, 배의 값을 $y$라 할 때, $a_1=3$, $b_1=7$, $c_1=1$, $a_2=4$, $b_2=8$, $c_2=3$을 식 ①에 대입한 $x=\dfrac{4\times3\times(1+3)}{4\cdot7-3\cdot8}$을 설명한 것이다.

오늘날에는 이 문제를 풀기 위해 연립방정식을 이용하겠지만, 연립방정식의 해법에 해당하는 방정술을 구별하여 다루고 있는 것을 보면, 영부족술은 연립방정식의 접근과는 전적으로 다른 계산 규칙으로 해석된다(홍성사, 2002).

## 6. 방정술

<구장산술>에서 비롯되었다고 알려지는 '방정'이란 용어는 오늘날의 '미지수의 값에 따라 식이 참이 되기도 거짓이 되기도 한다'는 의미와는 달리, 수를 네모 형태로 늘어놓은 것을 의미한다.

즉 방정술은 행렬로 늘어놓고 계산하는 방법을 말하는 것으로서 오늘날의 연립방정식을 해결하기 위한 계산법에 해당한다. 연립방정식

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3 \end{cases}$$

을 산대를 이용하여 다음과 같은 행렬로 나타내었다.

$$\begin{matrix} a_{31} & a_{21} & a_{11} \\ a_{32} & a_{22} & a_{12} \\ a_{33} & a_{23} & a_{13} \\ b_3 & b_2 & b_1 \end{matrix}$$

중국의 글쓰는 순서가 위→아래, 우→좌라는 것을 생각하면 쉽게 납득이 가는 표기이다. 이와 같이 산대를 배열한 후 Gauss-Jordan 소거법에 해당하는 원리를 따르는 방법이 곧 방정술이다. <구일집>의 4권 1문은 방정술로 푸는 14개의 문제를 담고 있으며, 그 중 하나가 다음 문제이다.

【4-1-3】 지금 복숭아 둘, 살구 셋, 자두 넷을 모두 합한 값이 50문이고 또 복숭아 셋, 살구 셋, 자두 둘을 모두 합한 값이 50문이고 또 복숭아 하나, 살구 다섯, 자두 셋을 모두 합한 값이 50문이다. 각각은 얼마인가?
(今有桃二杏三李四 共價五十文 又桃三 杏三 李二 共價五十文 又桃一 杏五 李三 共價五十文 各價若干)

이 문제를 풀기 위해 복숭아, 살구, 자두 각각의 한 개 값을 $x$, $y$, $z$라 하고 삼원일차연립방정식을 세우면 다음과 같다.

$$\begin{cases} 2x+3y+4z=50 \\ 3x+3y+2z=50 \\ x+5y+3z=50 \end{cases}$$

원문의 풀이는 위의 연립방정식에 해당하는 산대 표현인

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 2 | 복숭아 |
| 5 | 3 | 3 | 살구 |
| 3 | 2 | 4 | 자두 |
| 50 | 50 | 50 | 값 |

으로 시작하며, 풀이의 과정을 정리하면 다음과 같다.

1 단계. (오른쪽 행)[8]×(가운데 행의 복숭아 3), (가운데 행)×(오른쪽 행의 복숭아 2);

| | | | |
|---|---|---|---|
| 6 | 6 | | 0 |
| 6 | 9 | ⇒ | 3 |
| 4 | 12 | 빼기 | 8 |
| 100 | 150 | | 50 |

2 단계. (오른쪽 행)×(왼쪽 행의 복숭아 1), (왼쪽 행)×(오른쪽 행의 복숭아 2);

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 2 | | 0 |
| 10 | 3 | ⇒ | 7 |
| 6 | 4 | 빼기 | 2 |
| 100 | 50 | | 50 |

위 두 단계의 결과를 함께 놓아 두 행에 관한 방정술을 사용한다. 원문 풀이에는 생략되어 있지만 오른쪽, 왼쪽 행에 각각 7, 3을 곱하여 빼면 된다.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 3 | 살구 | | 21 | 21 | | 0 |
| 2 | 8 | 자두 | ⇒ | 6 | 56 | ⇒ | 50 |
| 50 | 50 | 값 | | 150 | 350 | | 200 |

따라서 자두의 값 $\frac{200}{50}$, 즉 4문을 얻고 나머지를 순차적으로 계산한다.

8) 오늘날 열에 해당하는 것을 행이라 불렀다.

7. 천원술

천원술(天元術)은 다항식의 표기법으로서, 원래 중국에서 산대를 이용하여 다항식을 나타내는 방법이었으나 중국에서는 명대 이후로 산학의 폐지, 상업 발달로 인한 주산의 보급, 곧이은 서양수학의 전래로 천원술의 전통이 사라질 무렵, 그것을 이어받은 조선에서는 아직 사라지지 않고 오히려 중국에서보다 더욱 발전된 형태로 남아있는 것을 <구일집>에 담겨 있는 많은 문제들과 9권에 제시된 중국 사력 하국주와의 대담을 통해 알 수 있다.

> 내가 산대로 계산하고 있을 때 사력이 말하였다. 중국에는 이와 같이 계산하는 도구가 없다. 가히 얻어 중국에 가서 자랑할 만하다. 내가 그 자리에서 산대를 주니 그 중에서 40개를 골라서 가져갔다.
> (余布筭之除　司曆曰　中國無如此筭子　可得而誇中國乎　余卽以與之則擇其中四十箇而去)

그렇다면 <구일집>이 의미있는 이유 중 하나를 산대를 이용한 천원술 때문이라고 해도 과언이 아닐 것이다.

천원술에 앞서 그것의 일반화인 사원술(四元術)을 보자. 천원술이 미지수가 한 개인 방정식을 표기하는 반면, 사원술은 미지수가 4개인 방정식을 표시하는 방법이고 이에 대한 체계화는 주세걸의 사원옥감(四元玉鑑, 1303)에서 의도된다(김용운 외, 1996).

다시 말해 사원술이란 주역에서 말하는 삼재(三材)인 天, 地, 人에 物을 첨가한 네 가지로써 네 개의 미지수가 있는 식을 표현하는 방법으로서, 미지수는 모두 생략하고 그 계수만을 장방형으로 표기한다. 따라서 위치에 따라 항의

계수를 구별해야 한다.

정 가운데의 太(상수항)를 중심으로 아래에 天, 왼쪽에 地, 오른쪽에 人, 위에 物의 계수를 위치시키는 것이다(그림IV-3). 天元($x$), 地元($y$), 人元($z$), 物元($u$) 네 미지수를 갖는 방정식의 계수는 각각 [그림IV-4]와 같이 위치한다.

여기서 $x$, $y$, $z$, $u$ 중 두 개씩 곱하여 생기는 항은 모두 6개인데 인접하지 않은 $xu$, $yz$가 빠져있음을 볼 수 있다. 그 두 항의 계수는 각각 太칸에 둘레로 좌하, 우상에 썼다고 한다(Needham, 1959). 따라서 사원술을 이용하면 4원 $n$차 방정식이 모두 표현 가능한 것이다.

| | | |
|---|---|---|
| | 物 | |
| 地 | 太 | 人 |
| | 天 | |

[그림IV-3]
사원술

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $u^2y^2$ | $u^2y$ | $u^2$ | $u^2z$ | $u^2z^2$ |
| $uy^2$ | $uy$ | $u$ | $uz$ | $uz^2$ |
| $y^2$ | $y$ | 太 | $z$ | $z^2$ |
| $xy^2$ | $xy$ | $x$ | $xz$ | $xz^2$ |
| $x^2y^2$ | $x^2y$ | $x^2$ | $x^2z$ | $x^2z^2$ |

[그림IV-4] 사원술에서
계수의 위치

이제 네 가지 중 '天'에 국한시켜 太의 아랫부분만 생각하면 곧 천원술을 알 수 있다. 즉, 상수항, $x$의 계수, $x^2$의 계수, … 순으로 아래로 정렬한다. 예컨대, 다음 문제[9]의 풀이에 나오는 '천원1을 세워 …로 한다(立天元一 爲…)'는 것은 '…를 $x$(첫째 산대 그림[10])로 놓는다'는 뜻이고, 셋째 산대 그림은 순서대로 상수항, $x$의 계수, $x^2$의 계수, $x^3$의 계수를 의미하므로 식 $9x^3+243x^2+2187x+6561$을 나타낸다.

【8-1-15】 지금 새알 모양의 옥돌 한 덩어리가 있다. 그 안에서 정육면체 모양의 옥을 제외한 나머지 외각 부분의 무게는 265근 15냥 5전이다. 다만 말하기를 외각 부분의 두께가 4치 5푼이라고 한다. 옥의 한 모서리와 옥돌 덩어리의 지름은 각각 얼마인가?
(今有璞玉一塊形如鳥卵 內容方玉而空之殼重 二百六十五斤一十五兩五錢 只云 殼厚四寸五分 問玉方石徑各若干)

**풀이** 천원술로 푼다. 천원1을 세워 정육면체의 한 모서리로 한다.

0
1

여기에 문제에서 말한 수 4치 5푼을 2배 하여 더하면 옥돌의 지름이다.

9
1

이것을 세 번 곱하고 9배하면 구의 부피의 16배이다.

6561
2187
243
9

이것을 왼쪽에 놓아두자. 또 정육면체 옥의 한 모서리를 세 번 곱하여 다시 16배하면 정육면체의 부피의 16배이다.

0
0
0
-16 [역자 주: 16]

이것을 왼쪽에 놓아둔 것에서 빼면

6561
2187
243
-7

이다. 이것을 다시 왼쪽에 놓아두자. 외각 부분의 무게를 냥으로 고쳐서 이것을 돌의 비율 3

9) 이 문제는 하국주와의 대담 중 옆에서 지켜보던 아제도가 하국주를 한껏 치켜 올리며 홍정하에게 그의 위대함을 문제를 내어 시험해보라고 했을 때 홍정하가 낸 문제이다. 이에 하국주는 이 문제를 당장은 못 풀겠다고 하며 다음날까지 풀겠다고 했지만 결국 답을 하지 못하였다.

10) 본고에서는 편의상 아라비아 숫자로 옮겨 적는다.

으로 나눈다.[주: 1418치 반] 다시 16을 곱하여 [주: 22696] 얻은 수와 옆에 놓아둔 것과 서로 셈하면 개방식

-16135

2187

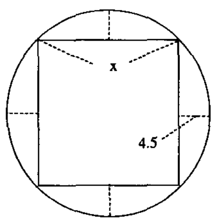
243

-7

을 얻어 이것을 감종입방개지하면 정육면체 옥의 한 모서리 5치를 얻는다. 여기에 외각의 두께를 2배 하여 더하면 옥돌의 지름이다.

이 풀이를 오늘날의 방식으로 해석하면 다음 단계를 따르며, 이 때 밑줄 그은 식이 바로 풀이의 산대 그림에 해당한다.

1 단계: 정육면체의 한 모서리를 $\underline{x}$라 하면 단면은 [그림IV-5]와 같다.




[그림VI-5] 단면

이 때, 옥돌의 지름은 $\underline{x+9}$이고, 이것을 세제곱하여 9배하면

$9(x+9)^3=\underline{9x^3+243x^2+2187x+6561}$

인데 고율 구의 부피는 $\dfrac{9\cdot(\text{지름})^3}{16}$이므로 이 식은 구의 부피의 16배이다.

2 단계: $\underline{16x^3}$은 정육면체 부피의 16배이다.

3 단계: 1, 2단계에서 구한 식의 차 $\underline{-7x^3+243x^2+2187x+6561}$는 외각 부분의 부피의 16배이다.

4 단계: 외각 부분의 무게로부터 부피를 구한다.

265(근)15(냥)5(전) $\div 3=(265\times 16+15.5)$(냥) $\div 3=1418.5$

따라서 이 부피의 16배는 22896이다.

5 단계: 3, 4단계로부터 다음의 방정식을 얻고, 이를 푼다.

$\underline{-7x^3+243x^2+2187x-16135}=0$

이상과 같이 천원술 표기는 오늘날의 대수방정식 $f(x)=0$ 꼴만을 고려하여 그 좌변을 미지수 없이 계수만으로 나타낸 것으로, 계산상의 편리함이 탁월했다고 하며, 천원술의 발달에 기본이 된 것이 산대 계산이었음은 재언할 필요도 없다.

## 8. 고차방정식의 해법

고차방정식을 푸는 문제는 4권부터 발견되지만 본격적으로 다루는 것은 6, 7, 8권의 개방각술문에서이다. $n$제곱근을 구하는 것으로 시작하여, $a$의 $n$제곱근을 구한다는 것은 결국 $x^n=a$인 $n$차방정식의 해를 구하는 것이므로 같은 원리를 적용하여 고차방정식의 해법을 최고 10차까지 다루고 있다. 이 방법은 물론 산대를 이용하는 것이므로 오늘날 우리가 이해하기에는 너무 복잡하게 느껴지는 것이 사실이다. 그 원리에 대한 설명은 찾아볼 수 없고 몇몇 문제에서 계산 방법만이 간략하게 서술되어 있으며, 당시 산학자들 사이에는 잘 알려진 알고리즘이었던 것으로 짐작된다. 계산 절차를 좇아보면 결국 근사해에 의해 접근하는 조립젯법을 이용한 방법[11]과 정확히 일치함을 확인할 수 있다.

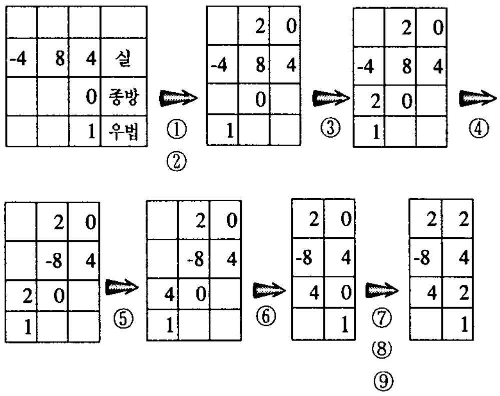
11) 이 방법을 영국인 Horner의 방법(1891년 발표)이라 일컫지만 그보다 600여년 앞서 중국에서는 진구소(증승개방법)에 의해 이미 사용되고 있었다(Smith, 1958). 자세한 것은 Libbrecht(1973) 13장을 참조하라.

본고에서는 그 복잡함을 최소화하기 위해 차수 2의 경우에 대해서만 설명하기로 한다. 제곱근을 구하는 개평방술과 이차방정식의 해를 구하는 대종평방법, 평방번법, 감종평방법, 평방번적법, 평방익적법이다. 각각은 공히 '증승개방법'[11]의 원리를 따르며, 다만 방법의 전개상 드러나는 특징에 따라 이름 붙인 것으로 추측된다. 그 특징은 다음에 나오는 예들에서 확인할 수 있다.[12]

3차 이상에서도 마찬가지 원리와 방법을 따르되 다만 계수가 많아지므로 그것을 칭하기 위해 새로운 이름[13]들이 등장하고, 대응하는 각 층에서 근의 다음 자리수를 가정할 때마다 건너뛰는 자리의 수에 차이가 있다.

제곱근을 구하는 대표적인 예는 6권 첫 번째 문제인 정사각형의 넓이가 484자일 때 한 변의 길이를 구하는 것인데, 보통 '평방개지한다'고 하는 다음의 절차를 말한다.

① 우법은 두 자리씩, 종방은 한 자리씩 나간다.
② 초상(제곱근의 첫째 근사값: 20)을 가정한다.
③ 우법 1을 초상과 곱하여 얻은 20을 종방과 더한다.
④ 이 종방을 초상과 곱하여 얻은 400을 실에서 빼어 새로운 실 84를 얻는다.[14]
⑤ 별도로 우법 1과 초상을 곱하여 종방에 더하여 새로운 종방 40을 얻는다.
⑥ 이제 종방은 한 자리 물리고 우법은 두 자리 물린다.
⑦ 차상(제곱근의 둘째 근사값: 2)을 초상의 다음에 놓는다.
⑧ 우법 1과 차상을 곱하여 얻은 2를 종방에 더한다.
⑨ 이 종방을 차상과 곱하여 얻은 84를 실에서 빼면 0이 되어 계산이 끝나고 제곱근은 22이다.

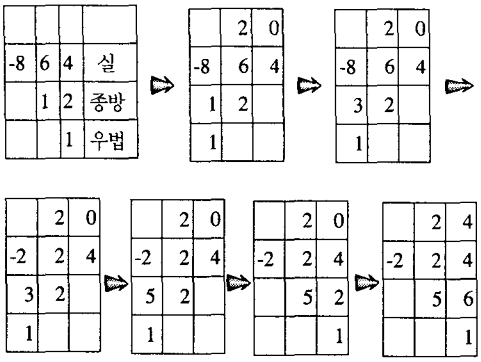



여기서 종방, 즉 1차항의 계수가 0이 아니라면 곧 일반적인 이차방정식의 해법이 된다. 6-1-24에 소개된 대종평방법, 평방번법과 6-1-25에 소개된 감종평방법, 평방번적법, 5-1-64에 소개된 평방익적법을 평방개지 알고리즘에 따라 도식화해보자.

문제 6-1-24는 넓이가 864보이고 짧은 변과 긴 변의 차가 12보인 직사각형 모양의 밭의 변의 길이를 구하는 문제이다. 짧은 변을 $x$라 하여 세운 이차방정식 $x^2+12x-864=0$[15]을 풀어 해를 구하는 다음의 과정을 '대종평방개지'라

12) 이차식의 경우에는 대종, 번법, 감종의 구별이 식의 표면적 특징, 즉 계수의 부호와 관련되어 있어 식만 보고도 어느 방법을 따르는지 결정된다. 즉, 2차항, 1차항, 상수항의 부호가 각각 +,+,−일 때는 대종, +,−,−(−,+,+)일 때는 번법, +,−,+(−,+,−)일 때는 감종이 된다. 약 150년 후에 남병길, 이상혁은 이를 체계화하여 <산학정의(1867)>에서 각각 교종, 감종, 화종이라 하여 기하학적으로 증명하였다.
13) 산대 그림의 윗층으로부터 2차에서는 실, 종방, 우법, 3차에서는 실, 종방, 종염, 우법, 4차 이상에서는 실, 갑종, 을종, 병종, 정종…, 우법으로 나타낸다
14) 부실(실의 부호가 음)과 셈하는 것이므로 여기서 뺀다는 말은 절대값을 뺀다는 것이고, 오늘날로 생각하면 더하는 것에 해당한다. 그리고 실 84는 부실 84로 고쳐야 한다..
15) 여러 산학서를 비교할 때 당시의 수학적 활동 중 일관성이 결여된 내용 중 하나가 양, 음의 부호에 관한 것이다. <구일집>에서도 부호의 오류가 종종 있으며, 이 문제의 경우, 원문에는 864로 되어 있지만 -864로 고쳐야 한다.

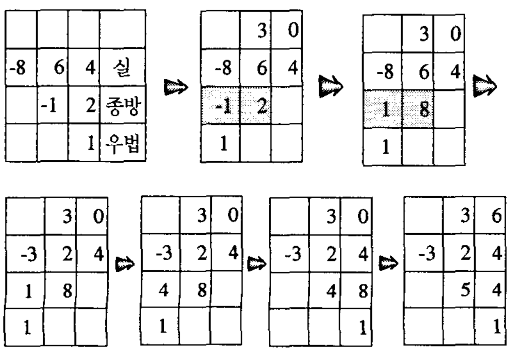
한다.



이 과정을 오늘날의 조립제법으로 표현하면 다음과 같다.

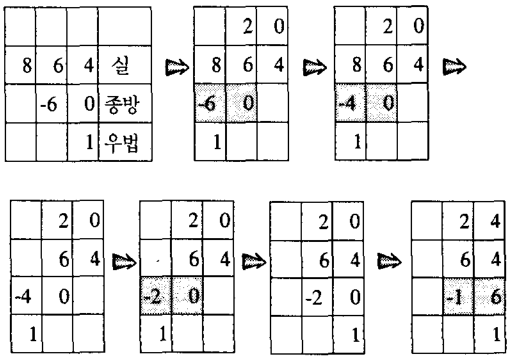
1 12 -864( 20 (초상)　　　1 52 -224( 4 (차상)
20 640(　　　　　　　　　4 224(
1 32 -224(새로운 실)　⇒　1 56 0
20
1 52 (새로운 종방)

이번에는 긴 변을 $x$라 하면 이차방정식 $x^2-12x-864=0$이 성립하고, 다음의 풀이 과정을 '평방번법개지'라 한다. 이 때, 종방 -12와 초상과 우법의 곱 30을 더하는 과정에서 두 부호가 다르므로 (절대값을) 뺀다고 생각하였다. 더욱이 30에서 12를 빼므로 뒤집어 뺀다(번감)는 것이 바로 번법이라 칭하는 이유이고, 결국 종방의 부호가 바뀌게 된다.

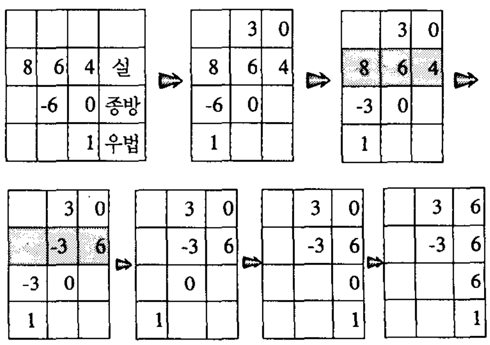


문제 6-1-25는 넓이가 864보이고 짧은 변과 긴 변의 합이 60보인 직사각형 모양의 밭의 변의 길이를 구하는 문제이다.

짧은 변을 $x$라 하면, 이차방정식 $x^2-60x+864=0$이 성립한다. 이 해를 구하는 다음의 과정을 '감종평방개지'라 한다. 번법에서와 마찬가지로, 종방과 (초상)×(우법)의 부호가 다르므로 (절대값을) 뺀다고 생각한 것이며, 결국 종방의 절대값이 감소하는 특징이 나타난다.



한편 평방번적법과 평방익적법은 초상을 달리 잡음으로써 실에서 나타나는 특징과 관련된다. 평방번적법은 식 $x^2-60x+864=0$으로부터 긴 변을 먼저 얻기 위해 초상을 30으로 잡아푼 것인데, 실 864와 초상과 중간 종방의 곱 -900을 더하는 것을 (절대값을) 뒤집어 뺀다고 생각한 것이 번적이라 칭하는 이유이며, 결국 실의 부호가 바뀌게 된다.



또 하나의 방법은 평방익적법이다. 이것은 문제 5-1-64에서 $0.5625x^2-18x-81=0$의 풀이로 설명되는데, 실의 절대값이 커지는 특징을 드러낸다.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |
| -8 | 1 | | | | | 실 |
| -1 | 8 | | | | | 종방 |
| | 0. | 5 | 6 | 2 | 5 | 우법 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 3 | 0 | | |
| | -8 | 1 | | |
| -1 | 8 | | | |
| 0. | 5 | 6 | 2 | 5 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 3 | 0 | | |
| | -8 | 1 | | |
| | -1. | 1 | 2 | 5 |
| 0. | 5 | 6 | 2 | 5 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 3 | 0 | | |
| -1 | 1 | 4. | 7 | 5 |
| | -1. | 1 | 2 | 5 |
| 0. | 5 | 6 | 2 | 5 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 3 | 0 | | |
| -1 | 1 | 4. | 7 | 5 |
| 1 | 5. | 7 | 5 | |
| 0. | 5 | 6 | 2 | 5 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 3 | 0 | | | | |
| -1 | 1 | 4 | 7 | 5 | | |
| | 1 | 5 | 7 | 5 | | |
| | | 0 | 5 | 6 | 2 | 5 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 3 | 6 | | | | |
| -1 | 1 | 4 | 7 | 5 | | |
| | 1 | 9 | 1 | 2 | 5 | |
| | | 0 | 5 | 6 | 2 | 5 |

위에서 확인할 수 있듯이, 다섯 가지 모두 개평방술과 동일한 원리를 따르되 계산 과정에 나타나는 부호 및 절대값의 관계를 특징지으려는 의도에서 구분된 것으로 볼 수 있다.

## V. 〈구일집〉의 교육적 활용

사료에 대한 연구 결과를 오늘날의 교육에 활용하려 한다면 우선 떠오르는 방안은 사료의 내용을 오늘날의 지식과 비교함으로써 보다 폭넓은 이해를 돕는 것이다. <구일집>을 오늘날 수학교육에 활용하는 방법 역시 수학 문제에 대한 옛날의 해법을 통해 오늘날의 해법을 반성하는 기회를 갖는 것으로부터 출발할 수 있다. 양자를 비교함으로써 유사한 방법, 차이 있는 방법, 사라진 내용들을 확인함으로써 수학적 내용 자체에 대한 학습을 적극적인 의미로 돕는 것이다.

<구일집>과 같은 산학서의 서술 방식의 특징은 문제를 제시하고 그 답과 풀이를 제시하는 것이다.

문제와 답만 적혀있고 그 해법에 대해서는 일체의 언급도 하고 있지 않다는 이집트의 파피루스에 비하면 나은 상황이지만, 계산 절차로서의 수학보다는 개념 이해를 강조하는 요즘의 수학교육 관점에서 볼 때 이와 같은 자료의 가치가 하향 평가될 우려가 있다. 그러나 오늘날의 풀이법과는 상당한 차이가 발견되는 문제들을 교실 수업에서 활용할 때 교육적 가치는 배가될 것이다. '왜 그러한 풀이법을 생각하였을까?, 그러한 풀이법은 타당한 것인가?, 오늘날의 방법과 차이는 무엇일까?'등과 같은 질문을 하면서 풀이법의 근거 및 이유를 찾아가는 활동, 여러 풀이법을 비교하고 더 나은 것을 선택하는 활동 등은 옛 자료를 오늘 날 학교 수학 수업에서 충분히 활용할 수 있는 기회를 제공할 것이다.

예를 들어, 다음 문제는 이원일차연립방정식을 세워 풀 수 있는 전형적인 문제이지만 <구일집>의 풀이는 수의 독특한 성질을 이용하여 수 사이의 새로운 관계에 주목하도록 한다.

**[2-1-13]** 갑, 을 두 사람이 있다. 갑이 을에게 말하기를, 네가 네 나이 8세를 내게 주면 내 나이는 네 나이보다 네 나이만큼 많다고 한다. 을이 갑에게 말하기를 네가 네 나이 8세를 내게 주면 너와 나는 나이가 같다고 한다. 갑, 을의 나이는 각각 얼마인가?

(今有甲乙二人 甲謂乙曰 我取汝年八歲 則多於汝一倍 乙謂甲曰 我取汝年八歲 則比汝適等 問各若干)

**답** 갑 56세, 을 40세
(答曰 甲五十六歲 乙四十歲)

**풀이** 8세에 갑의 비율 7을 곱하면 갑의 나이이고 을의 비율 5를 곱하면 을의 나이를 얻는다. [주: 갑 7, 을 5라는 것은 갑이 7이고 을이 5일 때 갑이 을에게서 1만큼 가져오면 갑은 8이고 을은 4가 되어 갑은 을의 2배이다. 또 을이 갑에게서 1만큼 가져오면 갑도 6이고 을도 6이 되어 서로 같다.]
(法曰 置八歲 以甲七分乘 得甲年 以乙五分乘得乙年[註 甲七乙五者蓋甲取乙一 則乃甲八乙四 故一倍也 乙取甲一 則乃乙六甲六 故適等也] 合問)

풀이에서 갑의 비율 7, 을의 비율 5라는 것은 두 수 $a$, $b$에 대해 $d$가 있어

$$a + d = 2(b - d)$$
$$a - d = b + d$$

이면 $a = 7d$, $b = 5d$ 인 관계를 상정하고 있음을 저자의 주(7과 5에 대해, $7 + 1 = 2(5 - 1)$, $7 - 1 = 5 + 1$)로부터 알 수 있고, 문제는 $d$=8 인 경우이다.

한편, 이미 고찰하였듯이 <구일집>의 문제 중에는 문제나 풀이에 오류가 있는 것이 꽤 발견되는데, 문제나 풀이법의 타당성을 확인하기 위해서는 학교 수학에서 다루어진 개념이나 알고리즘을 그 문제 상황에 적용함으로써 가능할 것이기 때문에 문제와 풀이가 잘못된 문제 역시 수학 수업에서 긍정적으로 활용 가능하다.

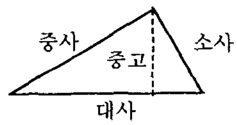
구체적으로 다음 예를 보자.

【1-3-12】 지금 삼사전이 있다. 대사는 18보, 중사는 12보, 소사는 9보이고 중고는 길이가 6보이다. 넓이는 얼마인가?
(今有三斜田 大斜一十八步 中斜一十二步 小斜九步 中股長六步 問積若干)

**답** 54보(答曰 五十四步)

**풀이** 대사에 중고를 곱하여 2로 나누면 된다. [주: 별해로서 중사와 소사를 서로 곱하여 2로 나누어 구할 수도 있다.]
(法曰 置大斜 以中股乘之折半 合問[註 一法 中斜小斜相乘折半 合問])

첫째, '중고'라는 옛 수학 용어를 접하면서 그것이 삼각형의 가장 긴 변을 밑변으로 할 때의 높이에 해당한 다는 것에 주목함으로써, 종종 오류를 야기시키는 삼각형의 높이 개념에 대한 의미를 명확히 하는 기회로 삼는다.




[그림 V-1] 삼사전

둘째, 삼각형의 넓이를 구하기 위해 필요한 조건에 대해 반성할 기회를 갖는다. 문제에 주어진 네 가지 조건으로부터 삼각형의 넓이를 구하기 위해 필요한 조건을 검토하고, 실제로 넓이를 구하여 비교해 본다. 세 변 또는 대사, 중고를 이용한 두 가지 방법으로 가능함을 확인한다. 나아가 세 변의 길이를 이용하여 구한 넓이로부터 중고를 구하였을 때 그것이 문제 조건의 중고와 일치하지 않는 것에 대한 설명을 요구함으로써 학급 토론을 유발시켜 문제의 네 조건을 만족시키는 삼각형이 존재하지 않는다는 결론으로 유도한다.

셋째, 풀이의 오류를 스스로 발견하도록 한다. 본문 풀이의 별해, 즉 중사와 소사를 서로 곱하여 2로 나누는 방법의 타당성에 관한 것이다. 이 방법이 모든 삼각형에 대해 성립하는

것인지를 생각하도록 하는 발문을 통해, 직각 삼각형에만 성립하는 일반성이 결여된 방법을 잘못 적용한 오류를 찾도록 한다.

이와 같이 문제 또는 풀이의 오류 및 조건불비의 문제에 대해 문제를 수정하고 올바른 풀이를 작성하는 것, 답을 유일하게 결정하기 위해 첨가해야 할 조건에 대하여 생각하고 논의하는 것은 수학적 사고력과 의사소통 능력의 활성화에 기여할 것이다. 이외에도 문제해결 교육의 측면에서, 문제를 풀기 위한 다양한 접근이나 비정형적인 문제 상황의 활용에 대해 생각할 수 있다. 방정식을 세워 풀 수 있으나 그렇게 풀지 않고 보다 창의적인 생각을 유도하는 풀이법은 초등 수학에서 적극 권장된다. 유사한 정보를 담고있는 일련의 문제들에서 주어진 것과 구해야 할 것이 서로 바뀐 경우가 있는데 그러한 문제를 이용한다면 Polya의 문제해결이나 문제제기 전략을 학습할 기회를 가질 수 있다.

요컨대 <구일집>을 학교 수학에 적용하고자 한다면 그 우수성으로 평가받는 천원술이나 개방술을 오늘날의 방법과 비교하며 직접 지도할 수도 있지만, 그에 못지 않게 1권에서 5권까지 다루어진 다양한 문제 상황과 그 풀이법을 이용하는 것 또한 효과적일 것이다. 그 중에는 초등학교, 중학교, 고등학교의 학교 수학은 말할 것도 없고 대학 수준에서 활용할만한 내용도 있다. 합동식이나 부정방정식과 같은 내용에 관련된 문제들이다. 대략적으로 활용 가능한 시기와 관련 내용을 다음과 같이 정리할 수 있다.

- 초등학교: 곱셈과 나눗셈, 분수의 사칙계산, 약분, 대분수와 가분수, 평면도형의 넓이, 입체도형의 부피, 비와 비율, 비례식, 연비,
- 중학교: 방정식의 활용, 연립방정식의 활용, 원주율, 원의 넓이, 입체도형의 부피, 피타고라스의 정리의 활용, 닮은 삼각형의 활용
- 고등학교: 수열, 행렬, 제곱근 구하기, 고차방정식의 풀이
- 대학교: 합동식, 부정방정식, 제곱근 구하기, 고차방정식의 풀이

# VI. 맺음말

동양의 수학이 이론 발달에는 관심 없이 실용적 측면을 중시하여 실생활 문제 상황에 대해 계산 위주로 전개되었다는 것은 주지의 사실이다. 물론 중국의 묵가들이 저술한 <묵자>에서는 유클리드의 <원론>에 버금가는 정의와 명제 중심의 이론적 전개를 찾아볼 수 있지만 지극히 예외적인 경우이다. 중국 수학의 영향을 받은 조선의 산학서 중 많은 수가 역시 실용적인 문제를 제시하고 그에 대한 답을 얻기 위한 계산 규칙 위주의 풀이법을 주 내용으로 한다. 적용된 해법의 이유, 타당성에 대한 언급이 없고 단지 알고리즘적 측면에 초점을 맞추고 있으며 어떻게 그러한 알고리즘을 생각해내었을까 싶을 정도로 정교한 계산 규칙에 의거하여 풀이 방법을 제시하고 있다.

본고는 조선 실학기의 대표적인 산학서로 손꼽히는 <구일집>의 내용을 검토함으로써 당시의 전문 산사들의 수학적 활동을 추정하고 그 중 특히 주목할만한 영부족술, 방정술, 천원술, 개방술 등에 대해 분석하며, 그것을 학교 수학 및 대학 수준의 수학 수업에서 활용하는 가능성도 타진한다. 문제 상황의 다양성, 문제해결 접근의 다양성, 알고리즘의 적용 및 해법의 타당성, 새로운 수학적 지식 및 용어, 오늘날 수학과의 비교 등의 방법으로 학령에 적절하게 도입하는 것이 가능하다. 그로 말미암아 수학적 지식 및 사고의 유연성을 신장하는 것은 물

론 무엇보다 우리 전통 수학의 정체성을 파악할 수 있다면 정의적 측면과 관련한 효과도 기대할 수 있을 것이다. 나아가 수학사 및 수학교육 연구의 측면에서 당시의 독특한 수학 활동에 대한 보다 심도 있는 연구 및 구체적인 교육적 활용 방안에 대한 탐색이 이어져야 할 것이다.

## 참고문헌


강신원(2003). 홍정하저 구일집의 내용 검토. 한국수학사학회 2003년 5월 콜로키움. 미간행.

김병덕(1995). 우리나라 명수법에 대한 소고(I). **한국수학사학회지**, **8**(1), 35-40

김용운 · 김용국(1977). **한국수학사**. 서울: 과학과 인간사.

김용운 · 김용국(1996). **중국수학사**. 서울: 민음사.

장혜원(2003). 중국 및 조선시대 산학서에 나타난 원주율과 원의 넓이에 대한 고찰. **한국수학사학회지**, **16**(1), 9-16.

홍성사(2002). 중국의 대수학. 한국수학사학회 2002년 10월 콜로키움. 미간행.

홍정하(1713). 구일집 천, 지, 인. 김용운(편). **한국과학기술사자료대계 수학편 제2권**, 201-693. 여강출판사.

Libbrecht, U.(1973). *Chinese mathematics in the thirteenth century -The shu-shu chiu-chang of Ch'in Chiu-Shao*. MIT Press.

Needham, J.(1959). *Science and civilisation in China*. Cambridge University Press.

Smith, D. E.(1958). *History of mathematics*. NewYork: Dover Publications.

# Analysis on *Gu-il-jip*, the mathematical book of Chosun dynasty and its pedagogical applications

Chang, Hye won (The Korea Society for History of Mathematics)

*Gu-il-jip* is a mathematical book of Chosun dynasty in the 18c. It consists of nine chapters including more than 473 problems and their solutions. Analyzing the problems and their solutions, we can appreciate the mathematical researches by the professional mathematicians of Chosun. Especially, it is worth noting the followings:

- units for measuring and decimal notations
- $\pi$, area of circle, volume of sphere
- naming the powers
- counting rods
- excess and deficit: calculation technique for excess-deficit relations among quantities
- rectangular arrays: calculation technique for simultaneous linear equations
- 'Thien Yuan' notation: method for representing equations
- 'Khai Fang': algorithm for numerical solution of quadratic, cubic and higher equations

Based on these analyses, some pedagogical applications are proposed.

Keyword: *Gu-il-jip*(구일집), counting rods(산대), excess and deficit(영부족술), rectangular arrays(방정술), Thein Yuan notation(천원술), Khai Fang(개방술)