大韓數學教育學會誌 數學教育學硏究 第 13 卷 第 4 號
The Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. XIII, No.4, 485-493. Nov 2003

Wertheimer의 평행사변형 구적 문제와 대안적 지도 방안

김 수 미*

본 연구는 Wertheimer가 제기한 평행사변형 구적 문제가 오늘날의 지도 방식으로도 명쾌하게 해결되지 않음에 착안하여, 현재의 지도 방식을 보완해 줄 수 있는 몇 가지 아이디어를 수집하기 위해 수행된 것이다. 예비교사들을 대상으로 조사한 결과 77명 중 18명만이 초등학생에게 호소할 수 있는 지도 아이디어를 제시하였고, 나머지 59명은 무응답 혹은 부적절한 아이디어를 제시하였다. 이로써 Wertheimer가 제기한 평행사변형 문제가 오늘날의 학생들에게도 여전히 어려운 문제가 될 수 있음이 드러났다. 그러나 적절하게 응답한 18명의 반응을 분석한 결과, Wertheimer가 제기한 평행사변형을 직사각형이나 전형적인 평행사변형으로 등적변형 하는 7가지의 재미있는 아이디어를 얻을 수 있었다. 이들 아이디어의 공통적인 특징은 형식적인 증명보다는 자르고 붙이고 옮기는 적극적인 활동을 통해 학생들의 지각에 호소하는 방식이라는 점이다. 따라서 이를 적절히 응용하면 초등학생들을 위한 지도 자료로 활용 될 수 있을 것이다.

I. 들어가며

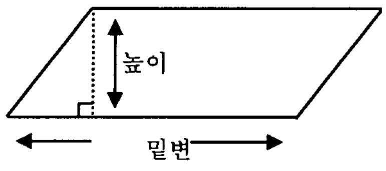
Wertheimer(1959)는 수학의 교수·학습에 남다른 관심을 가졌던 대표적인 형태심리학자로, 기계적 학습과 유의미 학습으로부터 기대될 수 있는 상반된 결과를 극적인 방법으로 증명하고자 하였다. 그 한 예가 평행사변형의 넓이 지도가 이루어지고 있는 당시의 일반적인 학급의 상황이다. 교사는 아동들에게 윗변의 왼쪽 꼭지점에서 밑변에 수직인 직선(수선)을 긋는 방법을 보여 주었다(그림 I-1). 그 다음 넓이를 구하기 위하여 수선의 길이를 측정하여 밑변의 길이에 곱하게 하였다.

이 표준적인 알고리즘을 사용하여 아동들은 많은 연습문제를 훌륭하게 계산하였다. 그때 Werthiemer가 교실 앞으로 나가서 혼란스러운 문제를 제시했다.

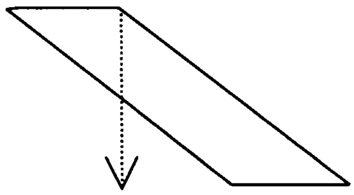
이 혼란스러운 문제란 바로 교사가 제시한 평행사변형을 거꾸로 세운 것에 불과하지만, 윗변의 꼭지점에서 내린 수선의 발이 밑변 밖에 존재하는 평행사변형의 구적문제이다(그림 I-2). 아동들의 반응은 다양하였다.

그런 문제는 배우지 않았다고 하면서 틀린 문제라고 하는 아동, 그 평행사변형에서는 '높이×밑변'의 알고리즘이 적용될 수 없다고 말하는 아동, 아예 포기하는 아동들이 나타났다. 이 문제의 어려움은 아동들이 배운 대로 왼쪽의 꼭지점에서부터 수선을 그으면, 그 수선의 발은 밑변의 내부가 아닌 밑변의 외부에 내려지게 되어 표준적인 공식을 적용할 수 없게 되는데 있다.

* 경인교육대학교, smkim@gin.ac.kr



[그림 I-1] 전형적인 평행사변형 (이후 T평행사변형이라 지칭)



[그림 I-2] Wertheimer가 제기한 평행사변형(이후 W평행사변형이라 지칭)

Wertheimer는 아동들의 이와 같은 반응에 대해, 아동들이 알고리즘의 기초가 되는 구조적인 원리를 이해하지 못한 채 의미 없는 기계적 학습을 하였기 때문이라고 생각하였다. 그는 맹목적인 알고리즘을 이용한 해결을 좋지 못하고 어리석은 것이라 하면서, 문제의 구조에 대한 진정한 이해를 통하여 얻어낸 것이야 말로 우아하고 아름답고 진정한 것이라고 하였다.

물론 위에서 제시한 상황은 50-60년대의 것으로, 오늘날의 지도 방식과는 거리가 있다. 우리나라의 경우, 제 7차 초등학교 수학교과서에서는 평행사변형 안에 단위 정사각형이 몇 개나 들어가는지를 세어 보게 하고, 평행사변형의 한쪽을 오려내어 다른 쪽에 붙여 직사각형으로 만든 후, 평행사변형의 구적이 직사각형의 구적과 같음을 입증해 보이는 활동을 통해 평행사변형의 구적 공식을 도입하고 있다. 이 두 가지 방식 모두 평행사변형의 구적 공식이 왜 밑변 곱하기 높이가 되는지를 구조적으로 이해시키기 위한 것으로, 구조적인 원리를 이해시키기 않은 채 알고리즘을 기계적으로 학습하였던 Wertheimer 시대의 것과는 다르다. 그러나 이 두 방식으로는 Wertheimer가 제안한 평행사변형의 구적 문제가 여전히 명쾌하게 해결되지 않는다.

본 연구는 이와 같은 문제 의식을 가지고, Wertheimer가 제시한 평행사변형의 구적 문제를 아동들이 쉽게 납득하기 위한 대안적인 지도 방안을 탐색해 보고자 한다. 이를 위해 본 연구에서는 77명의 초등학교 예비교사들에게 Wertheimer의 평행사변형 문제를 제시하였으며, 그들의 반응을 통해 평행사변형 구적에 대한 초등 예비교사들의 이해 정도와 더불어 대안적 지도 방안에 대한 아이디어를 얻을 수 있었다.

II. 넓이의 성질과 지도

1. 넓이의 성질

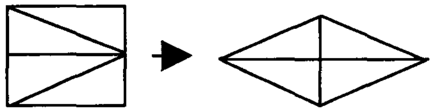
넓이는 양의 보존성과 가법성을 가지며, 특히 승법성을 갖는다. 넓이의 승법성은 길이 × 길이에서 알 수 있듯이 길이로부터 유도되고 여러 가지 도형의 넓이를 구하는 모든 공식은 길이의 곱으로 표현된다(강시중, 1986) 이처럼 넓이는 길이와 밀접한 관계가 있다.

넓이의 단위는 길이로부터 유도되며 길이에 의존하여 측정하면 쉬워진다. 직사각형의 구적 공식 역시 예외는 아니다. "가로 × 세로"에서 우선적으로 알 수 있듯이, 직사각형의 넓이는 가로와 세로라는 길이를 통해 간접적으로 측량하게 된다. 길이는 그것을 측정하기 위해 '자'라는 도구를 사용한다. 그러나 넓이는 그것을 측정하기 위한 직접적인 도구를 가지고 있지 않다. 따라서 넓이는 길이의 측정과 일정한 계산을 통한 간접적인 측량에 의존할 수밖에 없다.

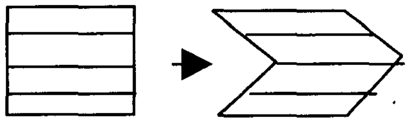
2. 넓이의 지도

넓이는 길이와 밀접한 관계를 가진 것이 사실이지만 넓이 지도에서는 길이에 대한 강조보다는 넓이 자체의 성질을 강조하여 지도할 것이 권고되고 있다. 넓이 지도에는 크게 두 가지 방식이 있다. 하나는 넓이를 기준 넓이와의 비교를 통해 인식하는 것이다. 넓이는 그들을 적절하게 잘라서 쪼개어 봄으로써 도형의 길이나 둘레에 의해서는 비교할 수 없는 것임을 알게 하는 것이 필요하며, 넓이의 비교에서는 넓이라는 양이 인식되도록 하는 것이 중요하다(강석우 외, 1985). 강시중(1986)은 넓이의 양감 형성을 위해 실제로 운동장이나 논밭의 넓이를 직접 측정해 보도록 할 것을 추천하고 있다. 평행사변형의 넓이 지도에서 그것을 단위 정사각형으로 나누어 보는 것은 이와 관련된다.

넓이 지도를 위한 또 다른 방식은 등적변형과 관련된다. 등적변형이라 함은 면적의 변화를 주지 않는 모양의 변화를 의미한다. 등적변형을 통한 넓이의 이해를 위해서는, 도형을 분해하여도 전체의 넓이가 변하지 않는다는 사실(보존성)과 넓이를 변하지 않게 하고 기지의 도형으로 변형시키는 사고가 중요하다. 등적변형에는 합동인 도형의 넓이가 같음을 이용하여 도형을 분해하고 합성하는 방식과 밑변과 높이를 변하지 않게 변형하는 카발리에리(Bonaventura Cavalieri)의 원리를 이용하는 방식이 있다(강석우 외, 1985). 평행사변형을 적당히 절단하고 합성하여 직사각형으로 만들거나, 사다리꼴 두 개를 이용해 평행사변형을 만드는 방식은 등적변형 중 전자에 해당된다(그림 II-1). 카발리에리 원리 역시 주어진 도형을 분해한다는 점에서는 같으나, 밑변과 높이를 변화시키지 않아야 한다는 점에서 전자와 구분된다(그림 II-2).



[그림 II-1] 분해와 합성 원리

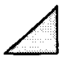


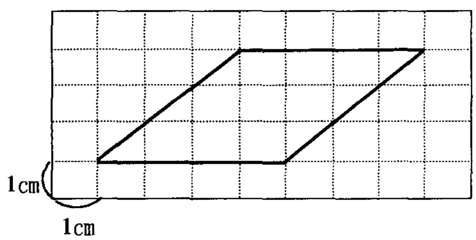
[그림 II-2] 카발리에리 원리

4. 현재의 평행사변형 넓이 지도 및 문제점

제 7차 교육과정에서는 초등학교 5학년 가단계에서 평행사변형의 넓이 공식이 제시되어 있다. 수학 교과서에 제시된 도입 방식으로는 평행사변형안에 포함된 단위 면적의 개수를 헤아리는 활동과 평행사변형의 한 쪽을 잘라 다른 쪽에 붙임으로써 직사각형을 만드는 활동, 그리고 밑변과 높이를 고정하고 여러 가지 모양으로 변화시키는 다양한 활동이 포함되어있다.

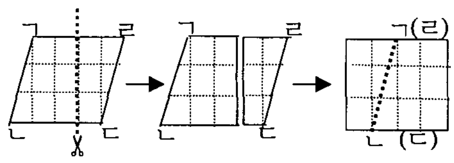
1) 단위 넓이를 헤아리는 활동(5학년 가 93쪽)

오른쪽 평행사변형에는  모양이 몇 개 있는가?
또,  모양이 몇 개 있는가?



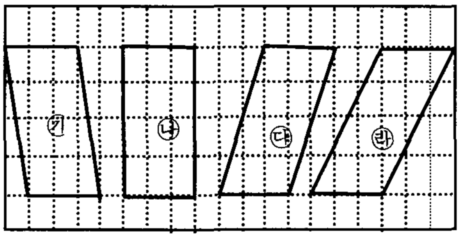
[그림 II-3] 단위 넓이의 개수를 헤아리는 활동

2) 한쪽을 잘라 다른 쪽에 붙임으로써 직사각형으로 만드는 활동(5학년 가 94쪽)



[그림 II-4] 평행사변형을 직사각형으로 등적변형하는 과정

3) 밑변과 높이를 고정하고 모양을 변화시키는 활동(5학년 가 95쪽)



[그림 II-5] 밑변과 높이를 고정시키고 여러 가지 모양으로 만드는 활동

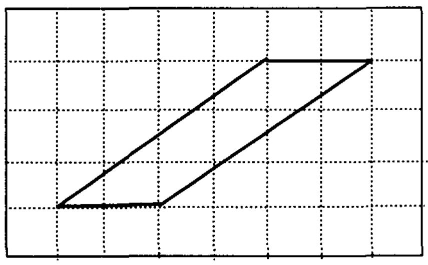
위의 그림은 밑변과 높이를 고정한 상태에서 여러 가지 모양으로 변화를 시도하였지만, 도형의 넓이에는 변화가 없음을 나타내고 있다. 그러나 아쉬운 점은 ㉮, ㉯, ㉰, ㉱의 평행사변형이 모두 T평행사변형이라는 점이다. 이 중 한 가지 정도는 W평행사변형이었다면(여기서는 ㉱의 자리에 오는 것이 가장 바람직해 보인다), T평행사변형으로 도입된 구적 공식이 W평행사변형에도 그대로 적용될 수 있음을 명확하게 보여줄 수 있는 기회가 될 것이다.

4) 문제점 논의

서론에서 이미 언급하였듯이 현 교과서에 제시된 방식은 평행사변형의 넓이 공식인 "밑변 곱하기 높이"에 대한 구조적 이해를 이끌어 내기 위한 것이다. 이와 같은 방식은 도형의 넓이 공식을 의미 없이 기계적으로 외우게 했던 Wertheimer 시대의 지도 방식보다 진일보한 것임에는 틀림없다. 그러나 교과서의 방식은 공통적으로 평행사변형의 넓이 공식을 단지 T평행사변형을 통해 유도함으로써, Wertheimer 시대와 마찬가지로 W평행사변형의 넓이를 구하는 상황에서 학생들에게 혼란을 줄 수 있다.

앞에서 고찰하였듯이 넓이는 단위 넓이의 개수를 헤아리거나 등적변형을 통해 지도가능하다. 그러나 W평행사변형의 경우는 그 어느 것도 용이하지 않다. W평행사변형의 경우, 그림 II-6에서와 같이, 그 안에 포함된 단위 면적이 여러 가지 모양으로 잘려지기 때문에 개수를 세는 데 어려움이 따른다. 뿐만 아니라 W평행사변형은 교과서식의 절단으로는 직사각형에 이를 수 없게 된다. 따라서 이것만으로는 W평행사변형에 대해 문제를 제기하는 아동에게 효과적으로 대처하기 어렵다.

반면 카발리에리식의 등적변형을 통해서는 W평행사변형이 T평행사변형 혹은 직사각형으로의 변환이 가능하다. 따라서 그림 II-5의 활동을 T평행사변형 대신 W평행사변형을 사용하여 제시하는 것도 한 가지 방법이 될 수 있을 것이다.



[그림 II-6] 단위 정사각형의 개수를 세기 어려운 W평행사변형

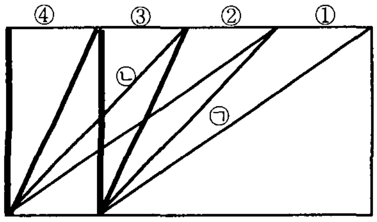
III. 대안적 지도 방법

본 연구는 2003년 5월에 77명의 3학년 예비교사들을 대상으로, W평행사변형의 넓이 공식이 T평행사변형과 마찬가지로 '밑변 곱하기 넓이'임을 초등학교 어린이에게 납득시키기 위한 방법을 지필 방식으로 조사하였다.

77명의 예비교사 중 48명(62.3%)은 어떠한 아이디어도 제시하지 못했으며, 11명(14.3%)은 초등학교 어린이에게 지도하기에는 부적절한 형식적 증명 방법을 제시하였다. 그러나 나머지 18명(23.4%)은 초등학생에게 호소할 수 있는 적합한 아이디어를 제시하였다. 그들이 제시한 아이디어는 크게는 두 가지 유형이고, 세부적으로 나누면 모두 7가지가 된다. 크게 나눈 두 가지 중 하나는 W평행사변형의 넓이 구하는 문제를 직사각형의 넓이 구하는 문제로 환원하는 것이다. 즉 구해야 할 평행사변형의 넓이가 결국은 직사각형의 넓이와 같다는 것을 구체적인 활동을 통해 납득시킴으로써 "밑변 × 높이"의 공식을 유도해 내는 것이다. 두 번째 방법은 W평행사변형의 구적 문제를 T평행사변형의 구적 문제로 환원하는 것이다. 즉 W평행사변형의 구적이 용이하지 않은 경우, 자르거나 붙이는 활동을 통해 T평행사변형을 유도함으로써 평행사변형의 구적공식을 이용하는 것이다.

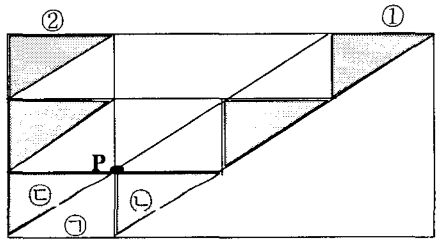
1. W평행사변형 구적 문제를 직사각형 구적 문제로 환원한다. (10명)

방법 1 (4명)



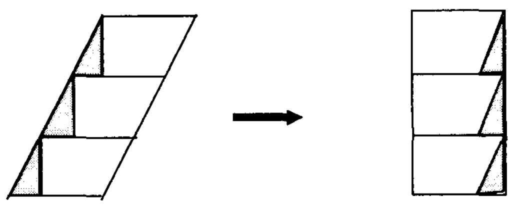
주어진 평행사변형(①)에 대각선(㉠)을 그리고 그것과 평행하게 ㉡을 그리면 새로운 평행사변형(②)이 생긴다. 평행사변형은 대각선에 의해 면적이 이등분되므로, 평행사변형 ①과 평행사변형 ②의 면적은 같게 된다. 이런 식으로 ③과 ④까지 진행하면, 결국 평행사변형 ①과 직사각형 ④의 면적이 같음을 알 수 있다. 이 방법은 카발리에리 원리를 적용한 것이라 하겠다.

방법 2 (4명)



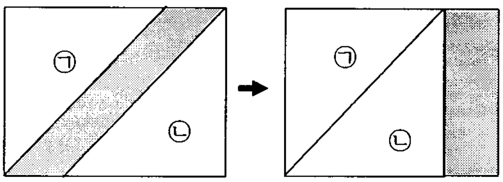
평행사변형과 직사각형의 교점 P를 지나고 평행사변형의 밑변에 평행한 선분을 긋는다. 그러면 그림과 같이 삼각형 ㉠, ㉡, ㉢이 나온다. 삼각형 ㉠과 ㉢은 직사각형의 대각선을 중심으로 만들어졌으므로, 합동이며, 삼각형 ㉠과 ㉡은 평행사변형의 대각선을 중심으로 만들어졌으므로 역시 합동이다. 결국 삼각형 ㉡과 ㉢은 합동이다. 이와 같은 식으로 계속해 나가면 평행사변형 ①의 면적은 직사각형 ②의 면적과 합동임을 알 수 있다.

방법 3 (1명)



이 방법은 방법 2와 유사하지만 수학적인 증명에 의한 것이 아니라 평행사변형을 위의 방법으로 절단하여 퍼즐식으로 맞추어서 직사각형이 됨을 보이는 조작적 방법이다.

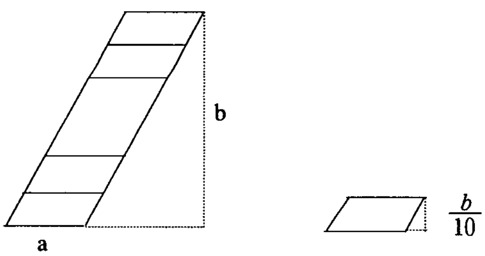
방법 4 (1명)



위의 그림대로 평행사변형을 기준으로 직사각형을 그린 다음, 평행사변형을 잘라 ㉠과 ㉡을 붙이면 직사각형이 된다. 처음의 직사각형에서 새롭게 생긴 직사각형을 뺀 부분이 평행사변형의 면적인데, 오른쪽 그림과 같이 결국 직사각형의 면적이 됨을 알 수 있다.

2. W평행사변형 구적 문제를 T평행사변형 구적문제로 환원한다. (8명)

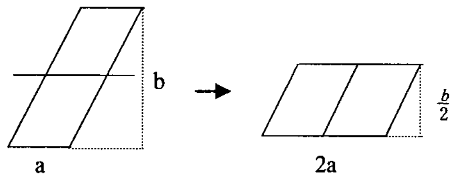
방법 5 여러 조각으로 나누어 생각하기 (2명)



주어진 평행사변형의 높이(b)를 10등분하면, T평행사변형이 10개 나온다.

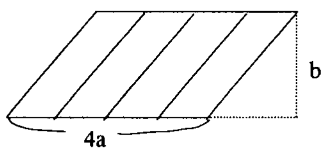
이 T평행사변형의 밑변은 a이며, 높이는 $\frac{b}{10}$가 되므로 밑변×높이 공식에 대입하면 $\frac{ab}{10}$이 되고, 동일한 10개를 합하면 ab가 된다. 물론 꼭 10 등분할 필요는 없으며, 적당한 개수로 분할하면 된다.

방법 6 반으로 나누어 붙이기 (3명)



W평행사변형을 반으로 나누어 그림과 같이 가로로 붙이면 T평행사변형이 되어, 구적공식에 대입하면 $2a\times\frac{b}{2}=ab$가 된다.

방법 7 같은 모양 몇 개를 옆으로 붙이기 (3명)



W평행사변형을 위와 같이 3-4개 덧붙여 T평행사변형을 만들어, 구적공식에 대입한 뒤, 덧붙인 개수만큼 나누어 주면 된다.

IV. 평행사변형 구적 지도를 위한 시사점

본 연구에서는 W평행사변형 구적 문제가 오늘날의 교과서에서는 어떻게 다루어지고 있는지, 그리고 그에 대한 예비교사들의 대응 능력은 어느 정도나 되는지를 살펴보고자 하였다.

우선 교과서를 분석한 결과, 평행사변형의 구적이 Wertheimer가 문제를 제기했던 당시에 비해 원리에 대한 구조적 이해에 많은 비중을 두고 있음을 알 수 있다. 예를 들어 단위 넓이의 개수를 헤아리는 활동이나, 등적변형을 통해 기지의 도형으로 변형하는 활동 등이 바로 그런 보기이다. 그러나 넓이 공식의 도입을 위해 교과서에 제시된 평행사변형은 모두 전형적인 T평행사변형으로, 그 어디에서도 W평행사변형을 찾아 볼 수 없었다. 따라서 Wertheimer가 예전에 제시했던 바로 그 문제를 오늘날의 어린이들에게 다시 제시했을 경우, 오늘날의 어린이들이 당시의 어린이처럼 당황하지 않으리라고는 보장할 수 없다. 이런 관점에서 보면 평행사변형의 넓이를 지도하는 단원에서는 가급적 T평행사변형과 W평행사변형이 고루 포함되도록 교과서를 구성하는 것이 바람직할 것으로 생각된다.

다음은 W평행사변형의 넓이에 대한 예비교사들의 반응을 분석한 결과, 예상대로 이 문제에 제대로 대처할 수 있는 예비교사들의 비율은 23.4%로 매우 낮은 것으로 나타났다. 따라서 초등학생들 역시 이 문제에 제대로 대처하지 못할 가능성이 매우 높다. 그러나 77명 가운데 18명의 예비교사들이 제안한 W평행사변형 넓이 공식 유도를 위한 아이디어는 초등학생들의 지도에 매우 적합한 것으로 나타났다. 그들의 아이디어는 기본적으로 주어진 도형의 분해와 합성으로 구성되어 있었기 때문에, 다양한 조작 활동을 통해 두 두형(주어진 도형과 등적변형 이후의 도형)간의 기능적인 동치관계를 이해시키는데 도움이 될 것으로 생각된다.

이상의 내용을 통해 초등학교 기하교육과정에 W평행사변형 및 그 구적법의 도입이 필요하다는 것을 알게 되었다. 그러나 그 이유는 오늘날의 어린이들이나 예비교사들의 저조한 수행 능력 보다는 W평행사변형의 교육적 활용 가치에 보다 많은 비중을 두고 싶다. 우선 W평행사변형의 구적 문제는 평행사변형에 대한 외연을 넓히는 역할도 수행할 것이다. 사다리꼴을 지도하는 단원에서 등변사다리꼴만 제시된다거나, 삼각형을 지도하는 단원에서 정삼각형이나 이등변 삼각형만 제시되는 경우, 자칫 어린이들이 사다리꼴이나 삼각형에 대한 그릇된 개념을 가지기 쉽다. 따라서 새로운 개념을 제시하는 경우는, 가급적 다양한 보기들을 제시해 주어야 하며, 이러한 관점에서 W평행사변형의 도입은 평행사변형의 외연을 넓히는데 한 역할을 해낼 것이다. 뿐만 아니라 W평행사변형은 최근에 강조되고 있는 수학적 사고와 태도 함양에도 효과적인 소재가 될 수 있다. 학생들은 기지의 지식을 바탕으로 새로운 문제에 도전하는 기회를 가지게 될 것이며, 분해와 합성이라는 조작 활동을 통해 수학 학습에 대한 동기와 의욕을 가지게 될 것이다.

V. 요약 및 결론

본 연구는 Wertheimer가 제기한 평행사변형 구적 문제가 오늘날의 지도 방식으로도 명쾌하게 해결되지 않음에 착안하여, 현재의 지도 방

식을 보완해 줄 수 있는 몇 가지 아이디어를 수집하기 위해 수행된 것이다. 예비교사들을 대상으로 조사한 결과 77명 중 18명만이 초등 학생에게 호소할 수 있는 지도 아이디어를 제시하였고, 나머지 59명은 무응답 혹은 부적절한 아이디어를 제시하였다.

이로써 Wertheimer가 제기한 평행사변형 문제가 오늘날의 학생들에게도 여전히 어려운 문제가 될 수 있음이 드러났다. 그러나 적절하게 응답한 18명의 반응을 분석한 결과 7가지의 재미있는 아이디어가 나왔다. 이 아이디어들의 공통적인 특징은 형식적인 증명 보다는 자르고 붙이고 옮기는 적극적인 활동을 통해 학생들의 지각에 호소하는 방식이라는 점이다. 따라서 이를 적절히 응용하면 초등학생들을 위한 지도 자료로 활용 될 수 있을 것이다.

물론 T평행사변형을 통해 유도된 공식을 W평행사변형에 그대로 적용하는 것에 대해 의문을 제기하는 어린이가 나타나지 않을 수도 있다. 그럼에도 불구하고 교사는 안도의 숨을 쉬기보다는, 오히려 이와 같은 상황을 수학적 사고나 태도를 키우기 위한 계기로 삼아야 할 것이다. 교사는 때로는 어린이들을 당혹스럽게 만들 수 있는 문제를 제시함으로써 인지적 갈등 상황을 유발할 줄 알아야 하며, 아동은 인지적 갈등 상황을 해결하기 위해 여러 방면으로 고찰하면서 진정한 수학적 활동을 경험해야 한다. 그런 측면에서 평행사변형의 구적 문제와 본 연구에서 제안하는 대안적 지도 방법은 훌륭한 지도 소재가 될 것이다.

참고문헌

강석우 외. (1985). **수학교육**. 서울: 동명사.

강시중(1986). **수학교육론**. 서울: 교육출판사.

교육인적자원부(2002). **초등학교 수학교과서 5-가**.

문교부(1989). **국민학교 교사용 지도서(4-2)**. 서울: 국정교과서 주식회사.

Resnick, L.B., & Ford, W. W. (1998). **수학학습 심리학**. (구광조, 오병승, 전평국, 역) 교우사. (영어 원작은 1981년 출판)

Wertheimer, M. (1959). *Productive thinking* (enlarged ed.). New York: Harper & Row(originally published in 1945).

The problem of mensuration of parallelogram raised by Wertheimer and alternative strategies

Kim, Soo Mi (Gyeongin National University of Education)

The purpose of this study is to suggest the alternative strategies for teaching mensuration of parallelogram raised by Max Wertheimer, a gestalt psychologist who was particularly concerned with mathematics learning and teaching. For this, 77 student teachers were paper and pencil tested and we could get the 7 interesting and useful ideas from their datas in spite of the fact that not many student teachers correctly responsed. Analysing the datas, it turned out all the 7 ideas are related to equivalent transformation and can make children more easily to see the structure of area of Wertheimer's parallelogram than traditional approach.

Key Word: Wertheimer, mensuration(구적), parallelogram(평행사변형).