대한수학교육학회지 <학교수학> 제 5 권 제 4 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.5, No.4, 401-420. Dec 2003

역사발생적 수학교육 원리에 대한 연구(1) - 증명의 의미 지도의 역사발생적 전개[1)]

우 정 호* · 박 미 애** · 권 석 일***

증명 학습에 있어서 많은 어려움이 특히, 증명이 도입되는 중학교 기하단원의 학습에서 야기되고 있으며, 무엇보다도 많은 학생들이 증명의 의미를 이해하지 못하는 것은 간과하기 어려운 문제점이다.

본 고에서는 기하의 역사 발생적 단계에 따른 증명의 의미 지도가 증명 지도 개선을 위한 하나의 방안이 될 수 있음을 밝히고자 하였다. Branford가 제시한 바와 같이 역사-발생적 전개를 통하여 증명의 의미를 지도하는 방안을 모색해 보고자, Euclid원론이 성립하기까지의 기하의 역사적 발달과정과 병행하여 실험적, 직관적, 과학적 단계를 거쳐 발전되어 온 증명의 발생과정을 살펴보고 지도과정을 분석해 보았다. 그리고 실험적, 직관적 증명 단계를 거쳐 수학적인 증명을 도입하는 지도과정에 따라 삼각형의 내각의 합에 대한 명제의 증명 지도를 중학교 1학년 학생들을 대상으로 실시해 보았다. 본 고에서는 그러한 결과를 통하여 역사-발생적 접근이 학생들에게 증명의 의미를 이해시키는데 큰 도움이 된다는 것을 확인하였다.

I. 서 론

증명은 문제해결과 더불어 수학적 사고활동의 핵심이며 그 본질적인 특성이라고 할 수 있는 바, 학교수학에서도 증명 교육은 지금껏 계속 강조되어 왔고 그 중요성은 앞으로도 변하지 않을 것이다.

NCTM(1989)이 수학교육의 개선 방향으로 제시한 「Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics」에서 모든 학생들을 위한 주요한 수학적 소양의 하나로 수학적 추론 능력을 들고 학교수학의 모든 분야에서 추론을 더욱 강조할 것을 요구하는 것도 그러한 맥락에서 이해될 수 있다.

그러나 증명의 본질이 무엇인가라는 질문에 대한 대답은 수리철학에 따라 달라질 수 있으며, 따라서 증명의 본질, 증명의 의미에 대하여 일치된 견해를 제시하기는 어렵다. Hanna(1983, pp.43-65)는 19세기 말에서 20세기 초에 수학기초론의 위기를 해결하기 위하여 등장한 논리주의, 형식주의, 직관주의와 준경험주의 수리철학에서의 수학의 본질과 증명의 타당성에 대한 준거의 차이를 분석하면서, 수리철학에 따라 수학의 본질과 증명의 타당성에 대한 준거에 있어서 차이를 보이고 있음을 지적하고 있다. 수학을 바라보는 관점에 따라, 전통적인 절대주의 수리철학에서는 증명을 정리를 확립하는

---

* 서울대학교(wjh@plaza.snu.ac.kr)
** 서울대학교 교육종합연구원(miaipark7@hanmail.net)
*** 서울대학교 대학원(steinein@dreamwiz.com)
1) 이 논문은 2002년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음.(KRF-2002-074-BS1051)

수단으로 보는 반면, Lakatos(1976)의 준경험주의 수리철학에서는 증명을 정리의 발견과 개선을 위한 도구인 사고실험으로 보고 있으며, Ernest(1991)의 사회적 구성주의에서는 증명은 당대의 수학자 사회의 동의 절차를 거쳐 수용되는 구성과정으로 본다. 그러나 이러한 다양한 논의에도 불구하고 기본적으로 학교수학에서 증명은 여전히 전통적인 수리철학의 영향 아래 있다고 볼 수 있다. 이는 중학교 수학 교육과정 중 '8-나' 단계의 도형 영역의 학습목표가 "삼각형의 합동조건, 닮음조건을 이용하여 간단한 도형의 성질을 증명(교육부, 1998, p. 74)" 하는 것으로 되어 있다는 점에서 잘 드러난다.

증명은 공리-연역적 방법의 정수라고 할 수 있으며, 그 본질을 이해하는 것을 수학을 처음 배우는 아동들에게 기대하는 것은 무리인지도 모른다. 그렇다면 아동의 수준에서 증명의 본질을 이해한다는 것은 어떤 것인가? Fawcett (1938, p.10)은 연역적 증명의 본질을 이해했다는 것을, 결론을 증명함에 있어서의 무정의 개념의 위치와 그 중요성, 명확하게 정의된 용어의 필요성과 그 용어가 결론에 미치는 영향, 가정의 필요성, 가정에 의하여 함의되지 않는 어떠한 것도 증명될 수 없다는 것을 이해했을 때로 보고 있다. 이는 크게 보아 제 1원리의 필요성에 대한 이해와 함의 관계의 이해[2]라고 볼 수 있을 것이다. 한편, Branford(1908, pp.233~234)는 증명을 일반성이 확보된 명제가 상호 연결되는 체계화를 의미한다고 보고 있다. 여기서 체계화라는 것은 넓게 보면 공리체계화를 의미하지만 학교수학에서는 직관적인 준거에 의하여 수용된 기본 명제와 이미 일반성이 확보된 명제 사이의 국소적 조직화를 의미하는 것으로 볼 수 있다. 아동이 증명을 학습함에 있어 수학적 개념의 정의, 기본적인 성질, 함의 관계, 일반성이 확보된 명제 사이의 상호 관련성을 초보적인 수준에서 이해하도록 하는 것은, 증명이 문제해결과 더불어 수학적 사고 활동의 중추를 이루고 있다는 점에 비추어 볼 때 교육적으로 매우 중요한 의의를 가진다고 하겠다.

그러나 오늘날에 이르기까지 증명 지도에 있어서 많은 문제점이, 특히 증명이 처음 도입되는 중등학교 기하 단원의 학습에서 지적되고 있으며 이는 여러 선행 연구를 통하여 그 심각성이 지적된 바 있다(우정호, 1994, p.14; 서동엽, 1999, p.2; Senk, 1985; Fischbein, 1982; Miyazaki, 2000). 학생들의 증명의 본질에 대한 이해나 증명 능력은 매우 낮은 수준으로, 학생들은 증명의 의미와 필요성을 인식하지 못하고 기본적인 명제의 증명조차 잘 하지 못하며 증명의 가치를 인식하지 못하고 있음이 보고되고 있다. 특히 문제가 되는 것은 증명을 학습함에 있어 자신들이 하고 있는 학습활동이 어떠한 의미를 가지는 지 전혀 파악하지 못하는 경우가 대부분이라는 점은 간과하기 어려운 심각한 문제점이다.

학생들이 증명의 의미를 충분히 이해하는 것이 근본적으로 어려운 이유는 van Hieles(1986)의 기하 학습수준 이론이 잘 설명해주고 있다. 증명은 학생들이 그 전까지 학습한 기하의 내용과 근본적인 수준의 차이가 있으며 그렇기 때문에 증명 학습은 학생들의 수학에 대한 인식의 구조적 변화를 요구한다. 선행연구 결과 (서동엽, 1999)에 따르면, 많은 학생들이 몇 가지 예에 대한 실험이나 측정을 통하여 결과를 확인하는 것을 정당화의 수단으로 받아들이고

2) 서동엽(1999)은 증명의 의미와 관련된 요소 분석을 통하여 '추론의 연결 관계', '함의', '가정과 결론의 분리', '함의와 동치의 구분', '정리는 예외가 없다', '명백한 명제에 대한 증명의 필요성', '증명의 일반성'을 관련 요소로 보고 있는데, 이 가운데에서도 함의 관계의 이해가 증명의 본질 이해의 핵심이다.

있으며 논리적인 증명보다 이를 더 선호하는 경향을 보이고 있는 바, 실험적 귀납적인 정당화 방식과 수학적인 증명 사이에는 논리적으로도 그러하지만 심리적으로도 큰 간극이 놓여 있다고 할 수 있다. 여기에서 제기되는 교수학적인 연구문제의 하나는 그러한 실험적, 귀납적 정당화 방식과 수학적 증명을 매개할 수 있는 중간 단계의 이행과정을 확인하고 그 수준을 구체화할 수 있는가 하는 점이다. 증명 학습이 이전에 학습했던 직관기하에 비하여 질적으로 다른 수준으로의 사고수준의 비약을 통하여 이루어지는 것이라면, 그 비약의 과정을 발생적으로 분해함으로써 그 이행을 도울 수 있는 방안을 찾아보지 않으면 안될 것이다.

기하학은 산술과 더불어 원시적인 사회에서부터 형성된 지식으로서 그리스 시대에 이르러 연역적인 양식으로 발전하여 오늘날에 이르렀으나 그 뿌리는 경험적인 지식에 두고 있는 학문이다(Cajori, 1924, pp.43-44). 다음에 구체적으로 살펴보겠으나 기하학이 연역적인 학문의 체계를 갖추게 된 데까지는 짧지 않은 역사적 발달과정과 많은 노력이 필요하였다. 현재 중학교에서 다루어지는 논증기하의 내용과 체계는 대부분 「Euclid 원론」으로부터 그 핵심적인 아이디어가 유래하고 있는 것이지만, 거기서 다루고 있는 많은 내용들은 「원론」에서 연역적인 형태로 체계화되기 훨씬 이전에 경험적 또는 직관적으로 알고 있었을 뿐만 아니라 소박하고 엄밀하지 못한 형식으로 어느 정도의 '정당화'까지 이루어졌음이 역사적으로 확인되고 있다. 여기서 우리는 학생들의 어려움이 이러한 발생 과정이 소거된 채 이루어지는 교수 방법에 있는 것이 아닌가 하는 의문을 가지게 되며 이러한 역사 발생적인 과정을 관찰하고 분석하는 것이 또한 논증과 관련한 기하 학습-지도 개선에 중요한 시사를 얻을 수 있으리라는 기대를 할 수 있게 된다.

Branford(1908)는 역사적으로 기하학은 바빌로니아와 이집트의 경험적 기하가 그리스 시대로 이어지면서 직관적인 기하 단계를 거쳐 과학적인 기하학으로 발전되어 왔으며, 그러한 기하학의 역사적 발생과정과 맥을 같이하여 증명 또한 실험적 증명, 직관적 증명, 과학적 증명의 세 단계를 거쳐 발전되었다고 보고 있다. 그러나, 그리스 수학자들의 천재적 능력 때문에 놀랄만큼 빠르게 중간 단계가 지나갔다고 하면서, 인류의 발달과 개인의 발달 사이의 교육적 평행성을 고려할 때 기하 지도에서 경험적인 단계에서 과학적인 단계로의 이행이 빠르게 이루어져야 하는지, 아니면 그리스인들이 예외적으로 뛰어난 종족이었다는 점을 고려하여 재능이 있는 학생은 빨리 이행해야 한다는 것을 주장해야 할 것인지, 주의 깊고 신중한 실험만이 어떤 관점이 더 적절한지를 결정할 수 있다고 주장하였다.

본 고에서는 이러한 문제 의식을 바탕으로 먼저 기하학의 역사적 발생 과정을 「Euclid원론」의 성립과정에 초점을 맞추어 살펴보고 이러한 역사적 발생 과정에 따른 증명의 본질 지도를 위한 Branford의 3단계 이론을 고찰해 보기로 한다. 그리고 이를 실험수업과 면담조사를 실시함으로써 그러한 방법이 학생들이 증명의 본질을 이해하는 데 도움을 줄 수 있는지를 알아보고자 한다. 학생이 특정한 정리의 증명을 할 수 있는지 여부를 검사하거나, 앞에서 제시된 방법을 통하여 증명 능력의 향상을 가져올 수 있는 지의 여부를 알아보는 것은 본 연구의 목적이 아니다. 본 연구의 목적은 역사발생적 원리에 따라 Branford가 제시한 3단계로 구분되는 일련의 학습 과정을 거쳐 증명을 지도하였을 경우 증명의 본질에 대한 학생들의 이해도가 향상될 수 있고, 경험적인 확인과 연

역적 증명의 차이점을 보다 분명히 인식할 수 있는지를 살펴보고자 하는 데에 있다.

II. 기하학의 역사적 발생

여기서는 기하학적 지식이 고대인들 사이에서 경험적인 기술로서 존재한 때부터, 그리스인들이 정의, 공리, 정리로부터 출발하는 연역과학으로 발달시킬 때까지의 기하학의 역사적 발생 과정을 고찰해 보기로 한다. 인간은 태고 때부터 자연과 접촉하면서 자연에 적응하고 자연을 해석하는 활동을 하여 왔으며, 이를 통하여 초보적인 기하학적 지식을 축적하여 왔는데 이러한 증거는 여러 고대 문명에서 확인되고 있다. 고대 바빌로니아에서는 평행선, 정사각형, 오목각을 가지는 도형 등의 기하학적 문양이 점술에 사용되었고(Cajori, 1924), 실용적인 문제를 주로 다룬 중국의 고대 수학책은 방대한 내용을 포함하고 있으며 그 내용의 상당 부분은 기하학적인 것이다(Siu, 2000).

고대 유태인과 바빌로니아인들에게 존재하였던 기하의 특성을 이해하는데 도움이 될만한 내용이 구약성서에 기록되어 있는데, 솔로몬의 궁전에 대한 묘사에서 Hiram이 솔로몬을 위하여 '바다를 부어 만들었으니 그 직경이 십 규빗이요 그 모양이 둥글며 ... 주위는 삼십 규빗 줄을 두를만하며(열왕기 1 vii. 23)'라는 기록을 읽을 수 있다. 아마도 솔로몬의 건축가는 측정에 의해서 이러한 특수한 원의 둘레를 측정하면 지름의 세 배가 된다는 것을 알았을 것이다. 그러나 아마도 그는 실제로 그런 모든 원에서 그 둘레가 지름과 상당히 고정된 비를 이룬다는 일반적인 사실은 알지 못했을 것이며, 더욱이 추상적으로 정의된 모든 원에 대하여 이 비가 절대적으로 일정하며 통약불가능하다는 수학적인 정리는 그의 이해를 넘는 것이었을 것이다. 여기서 원주가 지름에 의해 수치적으로 종속된다는 혹은 그 반대의 아이디어 즉 함수 관념이 이미 존재하거나 다른 경험으로부터의 유추에 의하여 암시되지 않으면 이러한 종속성의 정확한 척도를 찾으려는 마음이 움직이지는 않을 것이다.

고대 이집트인들은 나일강의 홍수로 야기된 토지 경계의 상실 때문에 야기된 토지 측량과 건축에 도형에 관한 경험적인 지식을 사용하였다. 그리스 이전의 기하학적 지식의 상태에 대해 우리가 갖고 있는 가장 최초의 신뢰할만한 지식은 대영박물관에 소장되어 있는 고대 이집트의 파피루스인 Rhind 파피루스에서 얻을 수 있다. 이 필사본의 연도는 기원전 1700년에서 1100년에 이르기까지 다양하게 추정된다. Rhind 파피루스는 그 시대에 이집트인들이 소유하였던 수학적 지식의 요약이라고 생각되는데 그것은 특수한 측정 결과에 대한 진술이나 경험적으로 발견한 규칙으로 이루어져 있다. Allman (Branford, 1908, pp.332-333에서 재인용)은 '파피루스는 전부 도형과 입체의 측정이 주된 부분을 이루는 완전한 응용수학이다. 정당하게 그렇게 부를만한 정리는 없다. 모든 것이 일반적인 용어가 아니라 독특한 수로 되어 있는 문제의 형태로 기술되어 있다. 예를 들면, 변의 길이가 2 단위와 10단위인 직사각형을 측정하는 것, 지름이 6단위인 원의 넓이를 구하는 것, 변이 10단위와 4단위인 직각삼각형을 들에 표시하는 것, ... 우리는 또한 그 파피루스에서 입체 특히 피라미드를 측정하려고 한 것을 찾아볼 수 있다. 이상에서 볼 때 이집트인들은 실제적인 기하학에서 굉장한 진보를 이루었다고 생각된다'고 말하고 있다.

그러나 이 시기의 기하학적 지식은 그 시대 사람들의 실용적인 요구를 만족시키기 위한 것

으로, 그 내용이 논리적인 정당성이나 정합적인 체계를 갖춘 학문의 모습으로까지는 나아가지 못하고 있었다. 고대의 기하 지식의 산 증거로 간주되고 있는 피라미드와 같은 건축물은 정사각형의 밑면, 밑변의 두 배를 지름으로 하는 원의 둘레와 같은 높이, 정확한 방위를 가리키는 배치 등으로 보아 고대 이집트인들이 상당한 기하 지식을 소유하고 있었음을 짐작하게 한다. 그런데 이러한 종류의 지식은 일반성을 가진 추상적인 기하학적 지식과는 상당한 수준의 차이가 있는 경험적, 실험적 수준의 것이었다. 우연히 혹은 의도적인 탐구에 의해서, 관찰한 모든 경우에 직사각형의 변의 측정값을 곱하면 면적의 측정값과 거의 유사하다는 것, 곧 직사각형의 변과 면적 사이의 관계를 발견했다고 가정하자. 검증해 볼수록 그 관계가 보편적으로 적용될 수 있다는 것을 더 신뢰하게 된다. 그러나, 아무리 많이 검증해도 법칙은 여전히 경험적인 명제에 불과하며, 넓이와 변을 곱한 수는 근사적인 대응 이상을 보여주지는 못한다. 그러한 발견이 장래 아무리 가치 있게 이용된다 해도, 그것은 논리적으로 증명된 기하학적 정리가 아니라 경험적 귀납의 결과이다. 그것은 경험적인 사실로 자리잡지만, 과학적인 기하학의 부분을 형성하지는 못한다. 이와 대조적으로 기하학은 순수 이론이며, 도형은 단지 인간의 마음에서만 존재하는 개념이다. 그것을 구체적인 가시적인 면에 적용하면 기하학자는 그가 측정하고자 하는 직사각형의 변이 그의 이상적으로 정의된 직선의 대략적인 근사에 불과하다는 것을 안다. 직사각형과 그 각은 기하학적인 도형의 모사에 불과하다. 그럼에도 불구하고 구체적인 것에 적용하는 데 있어서 이상적인 기하학은 경험적인 기하학보다 우수하다. 기하학의 절대적인 정확성은 실제적인 물리적 측정이 도달하고자 하고 점점 더 근접하기는 하지만 결코 도달할 수 없는 이상을 제공한다. 기하학이 경험적인 것으로 남아있었다면 자연과학의 발전은 가능하지 않았을 것이다. 실제적인 기하에서는 직접적이고 특수한 감각-지각과 실험으로부터 출발하여, 반복적인 대략적인 측정에 근거하는 경험적인 귀납으로 끝난다. 수학적인 기하에서는 정의, 공리, 공준 등으로부터의 엄밀한 추론에 근거하는 일반적인 정리를 다루며 그의 도움을 받아 특수한 구체적인 결과를 얻는 것으로 끝난다. 기하의 이러한 놀라운 발전이 고대 그리스에서 일어났다.

잘 알려져 있듯이 바빌로니아와 이집트의 기하학적 지식이 추상적이고 논리적인 관점에서 최초로 연구되기 시작한 것은 그리스 문화의 산물이었다. 경험적, 실험적 수준의 기하는 기원전 7세기 경에 이르러 그리스와 이집트 사이에 상업적 교류와 더불어 지적인 교류가 이루어지기 시작하면서 새로운 국면에 들어서게 된다. Thales, Œnopides, Pythagoras, Plato, Democritus, Eudoxus 등 많은 그리스의 학자들이 이집트에서 수학하였으며(Cajori, 1924, p.46), 이들은 거기에서 머물지 않고 경험적, 실험적 단계의 이집트 기하를 그리스적인 정신을 바탕으로 이론적 수준으로 발전시켰다. Thales(B.C. 640-546)는 그림자의 길이가 자신의 키와 같아질 때를 관측하고 이것을 피라미드에 적용하여 피라미드의 높이를 측정하였으며, 기하학적인 방법으로 해안으로부터 배까지의 거리를 측정하였고, 삼각형의 세 각의 합은 2직각과 같다는 정리와 세 각이 같은 두 삼각형의 변의 길이는 비례한다는 정리, 한 변과 그 이웃하는 두 각이 같은 삼각형은 서로 합동이라는 정리, 반원에 내접하는 각은 직각이라는 정리 등을 발견하였다고 한다. 여기서 서로 다른 양 사이의 고정된 의존성의 표현, 달리 말하면 다양성 가운데의 불

변성으로서의 자연법칙이 생겨났으며, 이론적인 기하학을 실제에 적용하는 최초의 예가 제시되었고 높이와 거리 측정 분야의 기초가 놓였다. Thales 이후에 Pythagoras(B.C. 580-500)가 이러한 기하의 원시적인 과학적 연구를 보다 발전시켰는 바, Pythagoras는 순수하게 추상적으로 기하의 원리를 연구하여 Euclid 원론의 1, 2, 5, 6권에 포함되어 있는 많은 명제에 정통하였다고 알려지고 있다(Stamper, 1909, p.12). 특히, 직각삼각형의 빗변의 길이의 제곱이 나머지 두 변의 길이의 제곱의 합과 같다는 Pythagoras의 정리는 이집트인들의 경우에도 직각삼각형의 변들의 길이의 비가 3:4:5일 때 성립한다는 것은 알고 있었지만 이러한 관계가 임의의 직각삼각형에 대하여 성립한다는 것을 최초로 밝힌 사람이 Pythagoras라는 사실에 주목할 필요가 있다. 더구나 Thales의 경우와 비교해 볼 때, Pythagoras에게서는 실용적인 것에 관심을 기울인 흔적을 전혀 찾아볼 수 없기 때문에 그에 이르러 기하학이 실제 생활의 필요를 벗어난 교양 학문의 모습을 갖추게 되었다고 판단할 수 있다(Stamper, 1909, p.13). Pythagoras학파의 연구에서 면적의 기하학은 중요한 역할을 하고 있어 이집트의 경험적인 근원에서 발전한 양식을 보여주고 있다. Pythagoras학파의 수학 연구의 중요한 특징이 하나는 산술을 기하학과 결부시킨 것이며 그것은 비례론에서 최고조에 달한다. 이러한 면에서 Pythagoras를 대수와 기하학을 결정적으로 결부시킨 Descartes와 비교할 수 있다.

이러한 그리스의 수학은 Platon철학의 영향 아래 학문적 형태로 발전하게 된다. 엄밀한 정의와 공리, 공준이 사용되기 시작한 것은 Platon에 이르러서이다(Cajori, 1924, p.61). 이러한 발전 과정을 거쳐 그리스 기하학은 마침내 알렉산드리아 시대에 이르러 철학자가 아닌 전문 수학자의 손에 의해서 본격적으로 연구되기에 이른다. 기원전 300년 경 알렉산드리아 학파의 뛰어난 수학자였던 Euclid는 Platon철학의 기초 위에 그 동안 발전되어 온 도형에 관한 지식을 체계화한 「Euclid원론」을 저술하였다. 이 책은 당시 알렉산드리아 대학에서 철학과 수학을 배우는 학생들을 위한 교과서이었으며, 여기서 '원론'이란 수세기에 걸친 노력 끝에 얻어진 추상화된 연역체계의 궁극적인 산물로 최종적으로 나타난 논리적인 제 1 요소를 말하는 것임을 이해하는 것이 교육자들에게 무엇보다도 중요하다. 여기에서 기하학은 거의 완벽한 수학으로 형성된다.

Thales나 Pythagoras학파와 Euclid가 구분되는 점은 실험적으로 얻어진 도형의 성질을 순수한 추상적인 명제로 일반화하는 수준으로 그치는 것이 아니라, 정의와 공리 공준이란 제 1 원리로부터 정리들을 엄밀하게 연역적으로 조직하는 데까지 나아갔다는 점이다. 이러한 점에서 Euclid 이전의 기하학을 '직관적 단계'의 기하학이라 부르고, 공리로부터 연역되는 증명이 체계적으로 주어지는 Euclid 이후의 기하학은 '학문적 단계'의 기하학이라 부를 수 있을 것이며, 그리스 이전의 바빌로니아와 이집트의 기하는 '경험적 단계'의 기하라고 부를 수 있을 것이다[3].

3) 이상과 같이 경험적, 실험적인 기하학이 학문적인 체계로까지 발달해 나간 과정을 이렇게 단계별로 구분하는 것은 다소간의 차이는 있으나 여러 학자들이 공통된 견해를 보이고 있는 부분이다. Branford(1908)는 기하 발달의 단계를 실험적 단계, 직관적 단계, 학문적 단계로 나누고 있으며, Koyama(1990)는 순직관 기하의 단계, 그리스 초기 단계, 유클리드 기하의 단계, 비유클리드 기하의 단계로 나누어 설명하고 있다. 또, Stamper(1909)의 경우는 두 번째 단계를 Thales 학파의 초기 논리적 단계와 Pythagoras 학파의 교양 학문으로 다루어지는 단계로 나누어 설명하고 있으나 커다란 구분에 있어서는 같다고 하겠다.

Branford(1908)는 이러한 기하의 역사적 발생 과정의 교육적 의미를 다음과 같이 기술하고 있다. 교육 경험은 가르치는 내용을 순수하게 추상적인 것으로 제한하였을 때의 치명적인 결과를 잘 보여준다. 순수한 이론의 근사적 접근과 구체적 적용은 교육과정 전반에서 기본적인 위치를 차지해야 한다. 이론적인 기하학과 실제적인 기하를 분리하는 것은 근본적으로 옳지 않은 것이다. 그들의 관계는 역사적으로 그러하였듯이 교육적으로 도움이 된다는 사실에 주목해야 하며, 그러한 관계가 유용한 제재가 됨으로서 아름답고 질서 정연하고 강력한 전체로서의 수학적 개념과 사고과정을 학생들의 마음이 볼 수 있게 할 수 있다. 수학의 아이디어를 완성된 추상적인 형태로 곧바로 제시하고자 기도하는 오류를 범해서는 안되며, 특수하고 구체적인 옷을 입은 아이디어의 싹을 주어야 한다. 감각적 지각, 경험적인 것이 순수한 추상화보다 앞서야 하며, 추상적인 것이 구체적인 것과 끊임없이 교대해야 한다. 위에서 살펴본 바와 같이 바빌로니아, 이집트에서 경험적으로 발견된 도형의 성질이 그리스에 이르러 직관적인 통찰을 매개로 과학적인 정리 체계로 변환되고 발전하였다. 그리스인들의 천재적 능력 때문에 놀랄만큼 빠르게 중간 단계가 지나갔다. 인류의 발달과 개인의 발달 사이의 교육적 평행성을 예상하면서, 역사의 이러한 단편으로부터 기하 지도에서 경험적인 단계에서 과학적인 단계로의 이행이 빠르게 이루어져야 한다는 결론을 내릴 수도 있고, 그리스인들이 예외적으로 뛰어난 종족이었다는 점을 이유로 예외적으로 재능이 있는 학생은 빨리 이행해야 한다는 것을 주장할 수도 있다. 그러나 도형에 대한 정의와 정리의 증명을 다룰 때 구체적인 것과 추상적인 것을 완전히 분리시키는 것은 학교교육의 근본적인 오류이다. 궁극적으로는 용어의 엄밀한 사용과 정리에 대한 연역적인 증명에 이르러야 하지만, 처음에는 경험적으로 잘 동화될 수 있도록 하고 직관적인 이해를 거쳐 점진적으로 정확하고 추상적인 엄밀한 추론에 대한 요구에 따라야 한다는 사실을 효과적으로 이용해야 할 것이다.

III. 직관적 증명

Branford(1908, p.284-293)는 기하학을 감각-지각과 추상적인 사고의 결합으로 보아 기하를 형식적으로만 다루는 것은 아동의 생활의 연속성을 깨뜨리는 것으로 보고 이를 비판하고 있다. 그는 어느 정도 복잡한 정도까지는 감각-지각이 우세한 것이 정신적 활동에 있어서 더 경제적이며, 이 한도를 넘어서면 개념적 사고가 우세한 것이 더 경제적이라고 보면서 이러한 수준의 상승이 자연스럽게 일어나야 함을 강조하고 있는데, 이러한 그의 생각은 생리학적, 심리학적 연구에서도 대체로 그 타당성이 입증되고 있다.

인간의 고등 정보 처리를 담당하는 대뇌는 좌, 우의 반구로 나누어져 있고, 양쪽 뇌가 각각 서로 다른 기능을 수행하는데 우세하지만 서로를 연결하고 있는 '뇌량'이라는 구조 때문에 하나의 통합된 뇌의 기능을 수행하고 있다. 이러한 대뇌반구의 기능 분화 이론에 따르면, 좌뇌는 언어적, 논리적, 분석적, 선형적으로 정보를 처리하고, 우뇌는 시간-공간적, 유추적, 직관적, 종합적, 총체적, 동시적, 다중처리적으로 정보를 처리한다. 그런데 이와 같은 대뇌 반구의 기능 분화 이론에서도 강조되는 것은, 이렇게 흔히 구분되고 대조되는 성격으로 파악되는 사유 작용들도 결국은 서로 관련을 맺고 작용함으로써 하나의 통합된 뇌의 기능을 수행하고

있다는 점이다. 그리고 Brooks, Klausmeier, Wertheimer, Wallas, Dewey 등의 제 학자들이 논의하는 바람직한 사고 과정도 좌뇌와 우뇌를 균형 있게 사고하는 '전뇌적 사고'이다(유재근, 2002).

역사적으로 볼 때, 공리적인 연역적 체계를 갖춘 수학적 증명은 「Euclid원론」에서 처음 그 형태를 갖추었다고 할 수 있지만, 「원론」에서 다루고 있는 많은 내용들은 훨씬 이전부터 경험적, 또는 직관적으로 알고 있었을 뿐 아니라 어느 정도의 정당화까지도 소박한 형태로나마 이루어지고 있었음이 확인되고 있다. 수학적인 증명에 도달하기까지의 역사적인 발달 과정은 앞에서 살펴 본 바와 같은 기하학의 역사적 발달 과정에 대응시켜서 고찰할 수 있는바, Branford(1908, pp.233~234)는 기하학의 역사적 발생과정과 맥을 같이하여 증명의 수준을 실험적 증명, 직관적 증명, 과학적 증명의 세 단계로 구분하여 설명하고 있다.

첫 번째 단계인 실험적 증명은 그 이후의 단계와는 달리 타당성의 근거를 주로 감각 지각에서 찾으며 근사적으로 특정한 사실만을 보여주는 정당화의 수준이다. 이러한 실험적 준거는 이를 통하여 일반적인 사실을 유추할 수 있다는 점에서 생산적인 역할을 수행한다는 중요한 의미를 가진다. 실험적 입증이 일반적인 명제를 정당화할 수 없음은 물론이지만, 중요한 점은 그 다음 단계의 증명의 본질을 이해시키기 위해서는 반드시 거쳐야 하는 단계라는 점이다.

두 번째 단계인 직관적 증명은 감각적 경험에 의존하지만 증명의 일반적인 본질을 직관적으로 내포한 단계이며, 실험적 증명과의 중요한 차이점은 일반성을 갖는다는 점이다. Branford(1908, p.131)에 따르면 아동은 직관적으로 직사각형은 두 개의 똑같은 직각삼각형으로 나누어질 수 있고, 그 역도 성립한다는 사실을 쉽게 알 수 있으며, 또한, 직사각형의 네 각의 합은 직각의 네 배라는 것, 직사각형을 이루는 두 직각삼각형의 대응하는 내각이 각각 일치한다는 것도 직관적으로 알 수 있는 사실이므로, 이 단계에서 아동은 "완벽한 직각삼각형이 그려질 수 있다면 그 세 각의 합은 직각의 두 배와 같으며, 직각삼각형의 두 예각의 합은 직각"이라는 결론을 내릴 수 있게 된다. 직관적 증명에서는 개념적인 통찰이 작용하기 때문에 보편성과 일반성을 어느 정도 확보하는 것이 가능하다고 할 수 있다.

그러나 직관적 증명에 대한 Branford의 설명은 그것이 감각적 경험에 의존하면서도 일반성을 확보할 수 있게 해준다는 점과 개념적 통찰에 의존한다는 점을 지적하는데 그치고 있어서, 교사나 학습자가 그러한 직관적인 증명을 실제로 구성하기 위해서 필요한 요소를 이해하거나 그러한 증명의 수단을 선택하는 구체적인 지침으로 기능하기 위해서는 보다 진전된 개념화를 필요로 한다. Branford의 이러한 생각은 Wittmann에 의하여 좀 더 정련된다. Wittmann (1988; Blum & Kirsch, 1991, p.184에서 재인용)은 Branford가 제시하는 증명의 세 수준을 설명하면서, '증명이 아닌 것'과 '증명'의 구획은 직관적 증명과 수학적 증명의 사이가 아니라 실험적 증명과 직관적 증명의 사이에서 이루어져야 함을 분명히 하였다.[4] Wittmann은 '직관적

4) 다시 말하면, '증명이 아닌 것'과 '증명'을 구별하는 일차적인 기준은, 그것이 형식적이고 연역적인 체계를 갖추고 있는가 하는 점보다 그것이 '일반적이고 보편적인' 정당화에 도달하고 있는가 하는 점이 우선되어야 한다는 것이다.

증명'이라는 용어 대신, '내용적으로 직관적인 증명(Inhaltlich-anschaulich proof)'이라는 용어를 사용하고 있는데, 이것이 함의하는 바는 그러한 증명이 증명의 '실체적인 내용이나 맥락을 보여주고 분명하게 한다'는 것이라고 할 수 있다. 즉, 직관적 증명은 실제적 소재를 통하기 때문에 완전히 형식화된 대상을 다루는 수학적 증명과는 구별되지만, 그 내용의 일반적인 본질을 지적하고 있기 때문에 실험적 증명과 구별되며 그것 때문에 '증명'이라고 불릴 수 있는 자격을 갖게 된다는 것이다.

세 번째 단계인 수학적 증명은 일반성이 확보된 사실들이 상호 연결되는 체계화를 의미하는데, 공리나 다른 기본적인 정리들로부터 논리적인 추론만을 사용하여 완전하게 연역하는 증명이 여기에 해당된다. 실험적 증명이 주로 감각에 의존하였던 데에 비하여 수학적 증명에서는 추상적인 개념에 주로 의존하게 된다.

직관적 증명에 대한 Branford의 생각은 역사 발생적 관점에서 경험적, 실험적 증명과 논리-연역적 증명의 차이점을 분명히 함과 동시에 그 사이의 간극을 메워주고, 증명의 본질 지도의 개선을 위한 가능성을 제시하였다는 점에서 커다란 교육적 의미를 갖는다고 볼 수 있다.

IV. 역사발생적 원리에 따른 증명 지도의 실제

1. 지도 과정

Euclid 이전의 Thales나 Pythagoras와 같은 그리스 초기의 수학자들의 경우, 경험적으로 얻어진 도형의 성질을 일반적인 명제로 정당화하는 데에 노력을 집중하였지만, 증명된 정리를 제 1원리로부터 엄밀하게 연역적으로 조직하는 데까지 나아가지는 못하였다. 이 시기의 기하학은 공리적 체계를 갖춘 「Euclid원론」과 비교하여 직관적 단계의 기하학인 바, 우리가 주목해야 할 것은 「Euclid원론」과 같이 완전히 공리적으로 구조화되지 않은 이러한 직관적 단계에서의 정당화가 실제로 이루어졌던 방식이다. 왜냐하면 우리는 여기서 역사 발생적인 과정으로부터 증명의 자연스러운 학습-지도 과정에 대한 시사를 찾을 수 있기 때문이다.

모든 삼각형의 내각의 합은 2직각이라는 정리는 Euclid 기하학의 아주 기본적인 명제이지만, 「Euclid원론」에서 이루어지는 이 명제에 대한 형식적 증명의 경로는 그렇게 간단하지 않다. 평행선의 공리를 연역적 전개의 한 출발점으로 삼은 Euclid는 그의 「원론」 제 1권의 명제 32에서 비로소 삼각형의 내각의 합이 180°라는 명제를 증명하고 있는데, 그 증명은 한 쌍의 평행선과 다른 한 직선이 만날 때 생기는 엇각과 동위각이 같다는 제 1권의 명제 29와 직선이 다른 직선과 만나서 만드는 이웃한 두 각을 더하면 2직각이 된다는 명제 13을 이용함으로써 이루어지고 있다.

그러나 이 명제의 경우에도 실험적인 수준과 직관적 수준에서의 정당화가 가능하다. 역사적으로는, 고대 이집트인들이 정삼각형이나 직각삼각형 등의 특수한 경우에 그 내각의 합이 180°라는 것을 경험적으로 알고 있었으며, 그리스에서도 Euclid 이전의 많은 수학자들이 나름의 방법으로 삼각형의 내각의 합이 180°임을 증명하였다고 한다(Heath, 1956, pp.317-318).

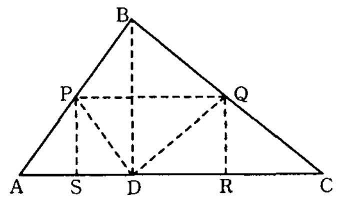
Branford(1908, pp.123-153)는 역사발생적 원리를 예시하기 위해서 삼각형의 내각의 합이 180°라는 명제의 증명 지도 과정을 다음과 같

이 3단계로 나누어 전개하고 있다. 본 실험 수업에서는 대체로 이러한 전개 과정의 핵심적인 부분에 따라 증명의 본질을 이해시키기 위한 지도를 하였다.

먼저 삼각형의 결정 조건을 다루면서 세 각은 삼각형을 결정하는데 충분한가 하는 문제를 제기한다. 이 문제를 다루는 간단하면서도 자연스러운 방법 중 하나는 삼각형을 그리고 그 세 각을 측정해보는 것이다. 그 다음 측정된 자료로 삼각형을 재구성할 수 있는지 시도해 보게 한다. 여기서 세 각은 삼각형의 크기를 결정할 수는 없지만, 삼각형의 어떤 다른 성질을 결정할 수는 없는가 하는 문제를 제기한다. 삼각형을 만들어 보려는 시도를 통해서 학생들은 세 번째 각이 다른 두 각에 의해 결정된다는 것을 알아낸다. 세 각은 두 각이 다른 한 각을 결정한다는 점에서 모종의 관계가 있다. 여기서 삼각형의 세 각 사이의 양적 관계를 발견하는 문제가 제기된다.

여러 가지 삼각형의 각의 측정값을 표로 만들어보게 하여 세 각 사이의 관계를 발견하도록 한다. 만일 학생들이 그러한 관계를 발견하지 못하면, 극단적인 경우를 생각해보는 방법, 분명한 규칙성을 갖는 특별한 경우를 살펴보는 방법과 같은 공략 방법을 제시한다. 한 각이 매우 작게 되면 어떻게 되는가? 한 각이 매우 크게 되면 어떻게 되는가? 삼각형에서 얻을 수 있는 가장 작은 각은 무엇이고, 가장 큰 각은 무엇인가? 약간의 시도로 가장 작은 각은 원하는 만큼 0에 가깝게 할 수 있고, 가장 큰 것은 원하는 만큼 직각의 두 배, 180°에 가깝게 할 수 있다는 것이 분명해진다.

이와 같이 하여 모든 삼각형의 세 각의 측정값의 합은 180° 곧 2직각에 가깝다는 것을 발견하도록 할 수 있다. 극단적인 경우를 생각해 보는 것을 선호하지 않거나, 요구했던 발견이 이루어지지 않았다면 정삼각형이나 직각이등변 삼각형과 같은 특별한 삼각형을 살펴본다. 여기서 거의 확실하게 내각의 합이 180°라는 것이 발견된다. 이러한 경우를 살펴보는 것은 다음 '직관적' 사고 단계의 훌륭한 준비가 된다.



이 단계에서 다음 두 가지 실험을 권하고 있다. 종이로 된 삼각형의 각 모퉁이를 잘라서 함께 모으면 한 점의 둘레의 절반을 채울 수 있어 180° 가 된다는 성질을 알아볼 수 있다. 그리고 종이 삼각형을 위의 그림과 같이 접으면 삼각형의 세 각의 합이 2직각처럼 보인다는 것을 알게 된다. 그러나 이는 실험적인 증거일 뿐이며 아무리 많은 삼각형을 취한다고 해도 일반적인 증명이 아니다.

이러한 실험적 증거는 절대적 정확성을 확립하지 못한다는 것에 주목하게 되면서 다음과 같은 질문이 발생한다. 이러한 관계가 모든 상상 가능한 삼각형에 대해서 성립하는가, 그것은 완벽하게 그려진 삼각형에 대해서 정확하게 성립하는가? 이 시점에서 실제적인 측정보다 더 낳은 방법의 필요성이 대두된다. 역사적 발달 과정에 따라 이제 직관적인 증거에 주로 의지하여야 한다. 직관적이란 요컨대 일련의 체계적인 추론을 거치는 매개 없이 '분명한' 일차적 원칙에 직접 호소하는 것을 의미한다. 실험

적 단계는 직관적 단계의 지각적 근거를 제공하므로 잠재의식적 경험 단계라고 부를 수도 있으며 교사가 이를 의식적인 직관이 되도록 자극하게 되는 바, 직관은 직접적인 판단이지만 그를 위한 사전의 많은 감각 경험을 내포하는 것이다. 여기서 다음과 같은 직관에 의존한다.

똑같은 두 개의 직각삼각형을 합치면 직사각형이 된다. 어떤 직사각형도 두 개의 똑같은 직각삼각형으로 나누어질 수 있다. 여기서 간단한 질문을 통해 모든 직사각형의 네 각의 합은 4직각이며, 모든 직각삼각형은 직사각형의 반이라는 사실을 이끌어낸다. 이로부터 모든 직각삼각형의 내각의 합은 2직각임이 분명해진다. 여기서 내포되어 있는 기본원리는 직사각형이 존재한다는 것, 그 각은 직각이라는 것 등이다. 이 단계에서는 그것을 명확히 언급하는 것은 불필요하다. 이러한 직관은 학생이 일상 생활에서 책표지, 종이, 탁자 표면, 방의 벽과 천장 등과 같은 직사각형 모양의 대상에 대한 충분한 감각 경험을 하였으면 성공적으로 작용할 수 있을 것이다. 이러한 모든 잠재의식적 감각 경험을 최대한 이용하여 기하에서 의식적으로 적용하게 하는 것은 교사의 역할이다. 여기서 학생들에게 이러한 결론의 일반성과 그 완전한 양적 정확성에 인상을 받게 한다. 이 새로운 증명 방법의 이러한 특성은 실험적 방법의 특수성 및 근사성과 극명하게 구분된다. 이제 다음과 같은 사실을 보였다.

(I) 완벽한 직각삼각형이 그려질 수 있다면 그 세 각의 합은 항상 정확히 2직각과 같다. 그리고 여기서 직각삼각형의 두 예각은 항상 그 합이 직각이라는 성질이 나온다.

학생들에게 이러한 완전한 가설적 증명과 실험적 증명 사이의 본질적인 차이가 학생들의 마음에 분명하고 확고하게 새겨져야 한다. 여기까지 이른 다음에 이와 관련된 풍부한 양적인 연습문제와 간단한 논리적 응용문제를 제공한다. 여기서 주목해야 할 것은 기하에서 모든 증명은 가설적이라는 전통적인 견해를 의도적으로 채용하였다는 점이다. 만약 직선이 그 정의를 완전하게 만족시키게 그려질 수 있다면 보편적으로 참이며 절대적으로 정확한 결과가 따라나올 것이다. 그러나 실제로 그려진 모든 그림과 사용되는 도구는 불완전하기 때문에 실제 측정 결과나 구체적인 확인 결과는 근사적일 뿐이다.

다음 단계는 직각삼각형에 관한 위에서 확인한 성질을 모든 삼각형으로 확장하는 것이다. 여기서 다음 사실을 직관적으로 받아들인다.

(II) 모든 삼각형은 두 개의 직각삼각형으로 나뉘어질 수 있다.

물론 학생은 모든 삼각형이 두 개의 직각삼각형으로 분해될 수 있다는 가능성을 인정하기에 앞서 다양한 경우에 대하여 종이 접기를 통해 그 사실을 확인하여야 한다. 아무리 많은 예가 주어진다고 해도 양적인 실험, 측정을 통해서는 일반성이 수립될 수 없는 반면, 이러한 예는 직관을 확립하기에 충분하다는 점에서 실험적 측정과는 분명히 다르다. 만일 교사가 학생들이 그러한 직관의 보편성을 느끼지 못한다고 생각할 충분한 이유가 있으면, '우리가 현재 상상하거나 볼 수 있는 한 모든 삼각형은 두 직각삼각형으로 나누어질 수 있다'고 수정할 수도 있다.

이제 학생들이 삼각형의 내각의 합에 대한 성질의 일반적인 증명을 발견하도록 이끌어야 한다. 성질 I, II로부터 삼각형의 내각의 합에

대한 성질을 이끌어 내는 것은 어렵지 않을 것이다.

삼각형 ABC를 A에서 수선 AD를 BC에 내려 두 개의 직각삼각형으로 나누면

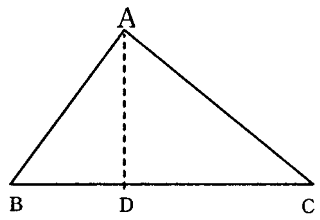
$\angle BAD + \angle ABD$=직각

$\angle DAC + \angle DCA$=직각

$\therefore \angle BAD + \angle ABD + \angle DAC + \angle DCA$=2직각

그런데 $\angle BAD + \angle DAC = \angle BAC$

$\therefore \angle A + \angle B + \angle C$=2직각



증명의 전체 줄거리는 다음과 같다. (대칭성을 갖고 있는) 직사각형이란 도형이 존재한다. 모든 직사각형은 두 개의 똑같은 직각삼각형으로 분해될 수 있다. 똑같은 임의의 두 직각삼각형은 직사각형으로 합쳐질 수 있다. 직각삼각형의 각의 합은 정확하게 직사각형의 각의 합의 절반이다. 그러므로 직각삼각형의 각의 합은 2직각이다. 그러므로 직각삼각형에서 직각이 아닌 다른 두 각의 합은 직각과 같다. 모든 삼각형은 두 개의 직각삼각형으로 분해될 수 있다. 그러면 위와 같은 증명을 할 수 있다.

이 모든 과정은 처음에는 감각 지각에 의존하는 주로 실험적인 과정이었다가, 뒤에서는 주로 직관적이 되고, 전체적으로 수학적 체계의 특징을 갖는다. 실험적 요소의 중요성을 다음과 같은 이유에서 강조되어야 한다. 향후 발달에 필요한 준비가 된다. 공간의 실제 구조를 보여주는 자료를 감각 지각에 제공한다. 특수하고 근사적인 성질을 확립한다. 일반적이고 정확한 성질을 암시한다. 모든 단계에서 추론을 검사하고 확인하며, 신념을 새롭게 하고, 논의할 새로운 공간적 대상을 개발하고, 최종적으로 추론된 성질을 응용하기 위한 근거로 작용한다.

반면에 직관적 요소의 역할은 다음과 같다. 실험에 의한 암시를 정확하고 일반적인 명제로 전환하는 데 있어서 상상력을 발휘하게 한다. 감각을 사용하여 세계를 이해하는 데 내재된 원리를 의식과 언어적 표현으로 끌어내어 감각의 부분적인 판단을 의미 있게 해석하게 한다. 감각적 산물에 대한 해석을 생생하게 하고 그것이 참이라는 확신을 준다. 합리적 결론의 합리적 토대로서의 역할을 하며, 단순한 감각 경험을 지식과 그것을 주변 세계에 응용할 수 있는 기술로 변환시키는 데 주요한 매개 역할을 한다.

수학적 증명의 역할은 전제와 결론의 형식적인 논리적 상호 의존성을 보여주고, 수학을 체계화되고 의식적으로 정돈된 전체로서 드러내는 것이다. 그 이상은 결코 도달할 수 없지만 모든 사고에 공통인 궁극적인 가정과 특정한 분야에 한정된 제 1원리의 집합으로부터 모든 나머지 결론이 엄밀한 추론의 연쇄에 의해 연역될 수 있는 명제체계를 구성하는 것이다. 추론 형식이 보다 더 엄밀할수록 추론의 연쇄가 더 길어지고, 감각과 직관에의 의존이 적어질수록 추론은 더 어려워진다. 증명의 엄밀함의 정도가 동화 가능한 것이 되려면, 학생의 지력과 경험의 성숙도에 맞추어야 한다. 일단 증명의 각 단계가 파악되면 결론이 참이라는 확신감이 생기도록 전체 증명 과정을 가능한 하나의 그림으로 한 눈에 알 수 있도록 하는 것이 매우 중요하다. 임의의 삼각형 ABC로 시작하여, 그림과 같이 직사각형 $EDCB$를 만

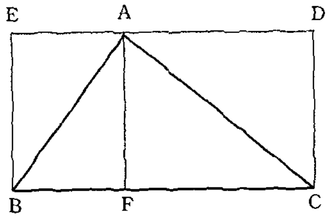
들어 AF가 BC에 수직이 되게 그린다. 그러면 전체를 곧바로 보기 위해서 증명의 요소를 약간 수정하면, 삼각형 ABF는 BEA와 똑같고,
따라서

$$\angle AFB + \angle FAB = \text{직각}$$

같은 방법으로

$$\angle FAC + \angle FCA = \text{직각}$$

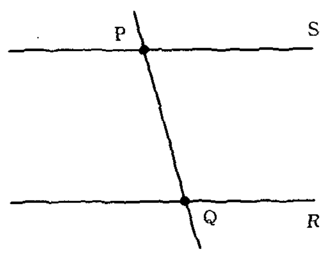
그러므로 세 각 B, C, A의 합은 2직각과 같다.



지금까지 기술된 증명의 전체 과정은 이 명제의 역사적 발견과정에서 실제로 밟았던 과정과 본질적으로 일치한다. 초기 이집트인들은 주로 실험적으로, 이집트의 결과를 연구한 초기 그리스 수학자들은 주로 직관적으로, 후기 그리스 수학자들은 주로 논리적으로 이 명제를 증명하였다. 그러나 엄밀한 논리적 전개로 보편적으로 타당한 증거를 달성하려는 목적은 결코 달성될 수 없으며, 고등 수학에서도 구체적이고 직관적인 증거 없이는 해낼 수 없다. 이는 학교교육에서는 더욱 더 그러하다.

명제가 확립된 후 여러 가지 연습문제로 적용과 이해를 익히는 것이 절대로 필요하다는 것은 강조할 필요가 없을 것이다. 연습문제는 다양해야 하며 다음과 같이 분류될 수 있을 것이다. 측정에 의해서 확인될 수 있고 작도도 포함되는 간단한 양적인 적용, 실제적인 적용 (간단한 측량, 수 작업, 기계적 실험 등), 일반화를 요하는 적용과 다른 명제 곧, 그 자체로 매우 중요할 수도 그렇지 않을 수도 있지만 적어도 스스로 발견하였다는 점에서 흥미 있는 명제를 발견하도록 자극하는 적용, 이 경우 그 자체로 중요한 명제인 연습문제가 다루어질 수도 있다. 이 때 새로 발견된 명제는 교사가 도입하려는 명제의 기초와 준비가 될 수 있다. 이러한 종류의 적용 문제로 삼각형의 한 외각은 두 내대각의 합과 같다는 성질의 발견이나 원래의 명제로부터 형식적으로 증명되는 일반적인 명제 형태로 주어지는 응용 문제 혹은 쉽게 일반화될 수 있는 성질을 발견하는 문제를 다룰 수 있다. 예를 들어, 사변형의 두 이웃한 각의 이등분선 사이의 각과 나머지 두 각의 관계를 발견하는 문제를 생각해 볼 수 있다. 그리고 그 결과를 n개의 변을 가지는 다각형으로 일반화하고, 그 일반적 성질을 삼각형에 적용함으로써 그 진위를 점검해 보도록 할 수 있다.

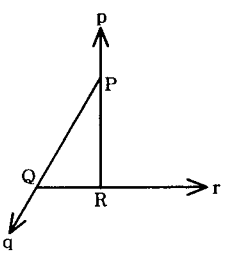
평행선의 성질은 삼각형의 내각의 합에 대한 성질에서 쉽게 유도될 수 있을 것이다. 오른쪽 그림과 같이 한쌍의 막대를 제삼의 막대와 P와 Q에서 움직일 수 있도록 연결시킨 모형에서 QR과 QP를 고정시키고 PS를 P를 중심으로 PQ와 일치된 상태로부터 QR의 여러 점을 지나면서 Q와의 거리가 점점 멀어져서 평행이 될 때까지 회전시킬 수 있다. 이러한 모형이나 그림을 이용하여 학생에게 "삼각형에서 한 각이 무한히 작아지면 내각의 합에 관한 성질이 어떻게 되겠는가?"라고 질문한다. 한 각이 점점 작아져 0이 되면 두 변이 평행이 되어 삼각형은 한 쌍의 직선이 제 삼의 직선과 만나는

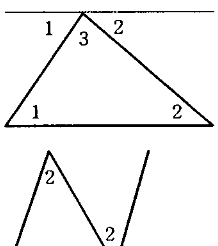


도형이 되므로, 여기서 직선이 두 평행선과 만나면 동측내각의 합은 직각의 두 배가 된다는 성질을 이끌어 낼 수 있다. 이러한 극단적인 경우에 삼각형의 외각은 그 내대각의 합과 같다는 성질은 두 평행선이 제 삼의 직선과 만날 때 엇각이 같다는 성질로 된다. 이러한 성질의 역은 모순법으로 쉽게 증명될 수 있다.

평행선의 성질은 삼각형의 내각의 합에 대한 성질과 밀접한 관계가 있으며 공리, 공준으로부터 이 중 어느 것을 먼저 증명하면 다른 것은 그로부터 이끌어내어진다. 그런데 위와 같은 지도 과정은 매우 분명하고 확실하고 체계적이며 공간의 가장 기본적인 성질을 먼저 제시하므로 교육적으로 바람직한 것으로 생각된다.

삼각형의 내각의 합에 대한 성질과 같이 기본적인 성질인 경우에는 가능한 한 다양한 증명을 제공하는 것이 바람직하다. 다음은 잘 알려진 Hamilton의 증명의 간단한 요약이다. 삼각형의 한 변 QR을 따라 뾰족한 끝이 r을 향하도록 막대를 놓는다. 이 막대를 R을 중심으로 QRr에서 RPp에 이르도록 회전시킨다. 그리고 P를 중심으로 PQq와 일치하도록, 마지막으로 Q를 중심으로 원래의 위치 QRr와 일치하도록 회전시킨다. 첫 번째, 두 번째, 세 번째 회전이동을 통해서 막대는 세 개의 외각을 각각 통과하였다. 막대가 다시 원래의 위치에 왔다는 것은 완전히 한 바퀴를 회전하였다는 것, 즉 직각의 네 배를 회전하였다는 것이다.





그러므로 삼각형의 세 외각의 합은 직각의 네 배이다. 이로부터 삼각형의 내각의 합이 2 직각이라는 것이 쉽게 따라 나온다. 마지막으로 오른 쪽 그림과 같이 평행선의 성질을 가정한 잘 알려진 두 가지 형태의 우아한 증명에 주목할 수 있다.

2. 실험 수업 및 그 결과

우리나라 수학 교육과정의 경우 중학교 과정(7-나 단계)에서 제공되는 이 명제의 증명을 살펴보면, 평행선이 한 직선과 만나는 경우 그 동위각이 같다는 성질을 직관적으로 받아들이게 하고, 맞꼭지각이 같다는 성질을 이용하여 평행선의 엇각이 같다는 성질을 증명한 후, 삼각형의 한 변에 평행한 보조선을 그어서 엇각이 같음을 이용하여 삼각형의 내각의 합이 180°임을 증명하는 순서로 되어 있다.

이는 평행선의 성질을 공리가 아니라 '직관적으로 당연한 명제'로 받아들이는 점만 다를 뿐 사실상 「Euclid원론」에서 명제 13과 명제 29를 이용해서 32번째의 이 명제를 증명하는 것과 같은 연역적인 형식 구조를 가지고 있다고 볼 수 있다.

그러나 앞에서 언급한 선행연구 결과에 따르면 이러한 과정을 이수한 학생들은 이러한 증명의 의미를 이해하고 있지 못하다. 여기서 위에서 살펴본 Branford의 전개 방법에 따라 형식적인 증명에 앞서 실험적 증명과 직관적 증명 단계를 거치도록 하는 것이 학생들의 증명의 의미에 대한 이해를 증진시키는 데 도움을 주는 지를 알아보고자 위의 과정을 이수한 중학교 1학년 학생 8명의 학생을 대상으로 하여 실험 수업을 실시하였다.

수업에 앞서 설문조사와 면담조사를 통해 학생들의 기본적인 추론 능력과 증명에 대한

인식을 조사하였다. 학생들은 2003개의 이등변 삼각형의 밑각을 측정하여 '이등변삼각형의 두 밑각의 같다'는 명제를 보였다면 그 명제가 증명된 것인가라는 질문에 4명이 그렇다고 대답하는 등 증명의 의미는 제대로 파악하고 있지 못하고 있었다. 삼각형을 그리고 그 각을 측정하여 더하는 활동이 끝난 후 180°라는 결과를 얻은 학생을 면담하였는데 그 학생은 남들에게 삼각형의 내각의 합이 180°라는 것을 보여주려면 각도기로 재어서 보여주면 된다고 하였다.

3개씩의 삼각형을 추가로 그려 그 각을 측정하는 활동을 하도록 함으로써 학생들에게 실험적 증거의 한계를 인식하도록 하는 활동을 시켰다. 실제로 이러한 활동을 거친 후 실시 된 면담에서 학생들은 다음과 같이 반응하였다.

-굉장히 정확하게 측정한다면 어떻게 되겠는가? (한참을 생각한 이후) 그래도 오차는 있을 것 같다.

다음에는 Branford의 방법을 따른 증명과 교과서의 증명을 지도 한 후 학생들의 반응을 알아보기 위한 면담을 하였다. 면담의 주요 내용은 삼각형의 내각의 합이 2직각이라는 명제를 보장하여 주는 것은 무엇인가를 묻는 것이었다. 학생들의 반응은 크게 두 가지로 나눌 수 있었다. 하나는 '평행선에서 엇각의 크기가 같다는 것', '직각 삼각형의 내각의 합이 180°가 된다는 것'과 같이 결론을 함의하는 전제 조건을 정확하게 지적한 학생들이고, 다른 하나는 '(이 수업을 받고 나서) 지금까지 믿고 있는 것이 무너졌다... 잘 모르겠다'는 것이었다.

첫 번째 유형의 답변을 한 학생 중에는 명제의 실제적 수준과 개념적 수준을 구분한 학생도 있었다. 그 학생은 다음과 같이 말하고 있다.

-만약 180°가 되지 않는다면 오차가 난 것이므로.... 다시 생각해 보자... 임의의 삼각형을 그린 후.... 엇각을 이용하여 생각해 본다 ..... 그러면 이론적으로 180° 라는 결과가 나온다....

이러한 반응은 보인 학생은 사전 조사에서 2003개의 이등변삼각형의 밑각을 측정하면 '이등변삼각형의 두 밑각의 크기가 같다'는 명제가 증명되었다고 볼 수 있다고 대답했던 학생이다. 이는 학생에게 결정적인 인식의 전환이 일어났음을 말해주는 것이다.

두 번째 유형의 반응을 보인 학생들 역시 2003개의 이등변삼각형의 밑각을 측정하면 '이등변삼각형의 두 밑각의 크기가 같다'는 명제가 증명되었다고 볼 수 있다고 말하거나, 너무 당연한 명제는 증명할 필요가 없다고 말한 학생들이다. 증명에 대하여 초보적인 이해에 머물고 있던 학생들이 이 수업을 받고 나서 '지금까지 믿고 있는 것이 무너졌다... 잘 모르겠다'는 반응을 보인 것 역시 인식의 전환이 일어났음을 보여주는 것이다.

증명의 구성 요소는 추론의 구성과 관련된 요소와 증명의 의미와 관련된 요소로 나누어 볼 수 있으며, 증명의 의미와 관련된 요소는 대체적으로 증명의 일반성의 인식과 함의 관계의 인식으로 볼 수 있다(서동엽, 1999). 이상의 결과는 역사발생적 원리에 따른 접근 방법이 학생들에게 증명의 의미 인식의 전환을 가져오게 하여, 이론적 수준의 증명의 의미를 이해하고 어떠한 전제로부터 결론이 추론되었는지를 알게 하는 데 도움을 줄 수 있다는 것을 보여준다.

V. 결론

Branford(1908, pp.326-345)는 개인에게서의 지식의 발생은 인류의 지식의 발생과 동일한 과정을 따라야 한다는 문화 단계설을 단호하게 적용한 Spencer를 인용하면서, 이 학설은 그 이전에 Condillac, Comte 등에 의하여 형식화되었고 고대 그리스의 Plato에 의하여 암시되었지만 제안적인 것이며, 개인에 있어서의 지식 발생과 지식의 역사적 발생 사이의 평행성의 가능성이나 교육적 권유 가능성과 그 필연성 사이에 혼동이 있어 보인다는 점을 지적하고 있다. 나아가 평행성의 경향을 가정하여 아동의 교육이 필연적으로 얼마나 어느 정도로 지식의 역사를 따라야 하는지, 그러한 경향성을 수정하거나 그와 반대로 행동하기까지 하는 것이 바람직한가 하는 의문이 제기되지만 이 원칙은 그에 답을 주지 않으며, 이 학설을 자유롭게 해석하고 수학에 적용하였을 때 그 학설 속에 숨겨져 있는 진리의 싹을 자세히 보이려는 진지한 시도는 거의 없었다고 말하고 있다. 따라서 Branford는 역사 초기부터의 인류의 기하학적 지식의 실제적인 발전 양식과 학생들이 그러한 경험을 가장 쉽고 효과적으로 이해할 수 있는 실제적인 양식 사이의 평행성을 보이려고 하면서도, 인류와 개인의 기하학적 지식의 발달 사이에 '필연적인' 평행성이 있다는 것을 증명하려고 기도하지 않았다는 것을 특별히 언급하고 있다. 그러나, 교육적인 목적을 위하여 기하학의 제재와 정신을 학생들에게 가장 효과적으로 제시하는 것은 대체적으로 기하학의 역사적 발전 순서를 따른다는 것을 보이고자 하였다.

그리고 결론적으로 교육원리와 교육실제에 대하여 다음과 같이 기술하고 있다. "이 연구에서 옹호하고 있는 원리에 대한 오해를 피하기 위하여 교육원리와 교육의 실제 사이의 관계를 강조하는 것이 중요하다고 생각한다. 모든 원리는 실제의 부분적인 측면만을 나타낸다고 생각한다. 어떤 추상적인 원리나 원리 체계가 보편적으로 타당하다고 믿고 당연히 실제에서 그것에 집요하게 매달리는 공론가의 태도보다 교육이 진보하고 성공하는 데 아마도 더 치명적인 것은 없다. 그렇게 보고 적용된 원리는 생명을 죽이는 메카니즘이다. 현명하게 이용되는 어떠한 교육 원리도 어떤 새로운 경험이 그 원리가 실제에서 거꾸로까지 되어야 하는 때가 있다는 것을 명확하고 단호하게 보여주는 순간 그 원리를 사용하는 사람들에게 그 효과가 최고조에 달하게 된다고 생각된다. 그 때 그 원리는 의식적으로 사용되는 도구로서의 중요성이 실제로 감퇴하게 되고 판단에 영향을 주는 많은 유사한 요소들 중의 하나로서 결국 무의식 속으로 가라앉게 되는 것 같다. 거기서 그것은 의식에서보다 오히려 각 단계에서 새로운 경험의 요구에 부합하는 판단의 건전한 균형을 이루는 데 더욱 기여하는 것같다. 메카니즘의 완성된 조각이 아니라 항상 발달하는 유기체가 교사의 교육원리 체계의 특징이 되어야 한다. 추상적인 원리를 전제적인 군주처럼 생각하는 순수이론가는 추상적인 원리를 단지 훌륭한 종으로 여기는 현실주의자로 발전해야 한다. 삶도 교육도 어떤 추상적인 원리 체계로 지혜롭게 수행될 수 없음을 경험은 보여주고 있다. 진정으로 위대한 교사는 처음에는 새로운 영역에서의 경험을 모으는 틀에 박힌 활동에 열중하고, 그러한 경험을 합리화하는 원리가 완전한 의식의 일광속에서 생기는 과학적 단계를 숙고하며 고통스럽드라도 통과하여, 마침내 그 원리가 무의식의 밤 속으로 가라앉는 창조적이고 즐거운 예술가로서 나타난다. 그리고 새로운 각 경험 분야와 바탕에 놓여 있는 원리로 그 과정을 다시 거친다. ... 활동의 이러한 최고

의 단계-예술적 단계-를 실현하는 힘 속에서 교사는 태어난다, 훈련되는 것이 아니라." (Branford, 1908, p.345)

본 연구에서는 증명의 본질 지도가 결코 포기할 수 없는 수학교육의 중요한 목표임에도 불구하고 현재까지 그 지도가 만족스러운 결과를 얻지 못하고 있다는 문제 의식 아래, 증명이 그 발생의 기원을 기하에 두고 있다는 점에 주목하여, 기하의 역사 발생적 단계에 따른 증명의 본질 지도가 증명 지도 개선을 위한 하나의 방안이 될 수 있음을 밝히고자 하였다. 위에서 살펴 본 바와 같이 기하학의 역사적 발생에서 증명은 그 뿌리가 매우 깊을 뿐만 아니라 수학적 사고의 핵심적인 요소로서 깊은 문화적 철학적 배경을 가지고 있다. 초보자에게 수학적 증명의 본질 이해가 용이하지 않음은 동일한 수학적 지식의 창고를 소유하고 있었음에도 불구하고 고대 중국에서는 공리-연역적인 수학이 발생하지 않았다는 사실로부터 미루어 짐작할 수 있다.

본 연구에서는 기하 명제에 대한 실험적이고 귀납적인 정당화와 형식화된 수학적 증명 사이의 중간 수준인 직관적 증명 활동을 삼각형의 내각의 합이 2직각이라는 명제의 증명지도에서 시행함으로써 학생들이 증명의 의미를 이해하는 데 도움을 줄 수 있음을 보였다. 형식적 증명은 실험적인 증명이 확보하지 못하는 일반성과 보편성을 그 정당화 과정에 담을 수 있다는 점에서 실험적 증명과 우선 구별된다. 그러나 중학교 수준에서 다루는 도형의 성질은 완전히 형식화되지는 않은 구체적 모델과 결부된 것이며, 증명에 사용되는 언어 또한 일상언어와 형식적인 언어가 포함된 것으로 구체적으로 조작 가능한 대상, 그림 등이 함께 사용된다는 점에서 엄밀한 형식적인 증명과는 구별된다. 완전한 형식적 증명이라고 할 수는 없지만 귀납적으로 특수한 몇몇 사례만을 확인해 보는 수준을 넘어서 일반적인 정당화에 도달하는 수준으로서의 '직관적인' 증명이 가능하다면, 이는 교수학적으로 다양한 활용 가능성을 탐색할 수 있을 것으로 보인다. 우선 주목할 것은, 형식적 증명의 언어를 사용할 수 없는 구체적 조작기의 아동에게도, 그들이 조작할 수 있는 대상만으로 '일반성'을 확보한 내용의 정당화가 이루어질 수 있다는 점이다. 구체적 조작기의 아동에게 이러한 수준의 정당화 경험은 그들의 활동을 형식적 언어로 번역해야 할 필요성을 깨닫게 하는 과정을 통하여 이후 형식적 수준의 증명 학습 단계에 이르도록 하는 토대로 기능할 것이다. 또한, 형식적 증명이 가능한 시기의 학생들에게도 그 증명의 예비 단계 혹은 증명의 발생적 맥락을 탐구하여 그 본질을 이해시키는 단계에서 학습을 돕는 역할을 수행할 수 있다.

한편 고려해야 할 다른 한가지는 직관적 증명의 타당성과 형식적 증명과의 차이점은 학습자 스스로 파악하기에는 많은 어려움이 있다는 점이다. 이는 결국 충분히 교수학적으로 숙련된 교사의 역할을 요구하게 되는 문제이다. 교사는 하나의 직관적 증명을 학생들에게 제공하였다고 해서 곧바로 전이를 기대할 수 없음을 인식해야 하며, 주어진 내용에 대한 서로 다른 수준의 정당화 방법을 탐구하고 자신의 방법의 교육적 적절성을 반성할 수 있어야 할 것이며, 현재의 논증이 엄밀한 것이 아니라고 하더라도 그것은 학습 과정에서 유용하고 건설적인 역할을 할 수 있음을 확신해야 한다.

본 연구에서의 고찰은 실현 가능한 역사 발생적 지도 방법의 극히 일부분에 지나지 않으며 기하의 역사발생 과정 역시 더욱 깊이 있는 연구가 요구된다. 실제로 「Euclid 원론」이 성립하기까지의 과정을 세밀하게 분석하여 그 과

정을 잘 정련된 형태로 따라가도록 하는 지도 방법을 구상한다는 것은 「Euclid원론」 교육적 이상을 실현하는데 있어 무엇보다도 중요한 작업일 것이다. 본고에서 논의한 바와 같은 수학적인 증명 단계에 앞서 경험적 정당화와 직관적 정당화 단계를 거치도록 하는 기하의 지도 방법은 증명의 본질 지도에 있어 큰 시사점을 가질 수 있는 바 이를 더욱 정교화하고 학교 현장에서 실현 가능한 방법으로 세련화, 구체화하는 연구가 요구된다.

참고문헌

교육부(1998). **수학과 교육과정**. 서울: 대한교과서.

나귀수(1998). **증명의 본질과 지도 실제의 분석**-중학교 기하단원을 중심으로-. 서울대학교 박사학위논문.

류성림(1998). **피아제의 균형화 모델에 의한 증명의 지도 방법 탐색**. 한국교원대학교 박사학위논문.

서동엽(1999). **증명의 구성 요소 분석 및 학습-지도 방향 탐색.** 서울대학교 박사학위논문.

우정호(1998). **학교수학의 교육적 기초**. 서울대학교 출판부.

유재근(2003). **대뇌반구의 기능분화를 고려한 수학 학습-지도에 관한 연구.** 서울대학교 석사학위논문.

차종천 역(2000). **구장산술/주비산경.** 서울: 범양사.

Balacheff, N. (1987). Processes of proof and situations of validation. *Educational Studies in Mathematics, 18*, 147-176.

Bell, A. W. (1976). A Study of Pupil's Proof-Explanations in Mathematical Situations. *Educational Studies in Mathematics, 7,* 23-40.

Blum, W., & Kirsch, A.(1991). Preformal Proving: Examples and Reflections, *Educational Studies in Mathematics 22,* 183-203.

Branford, B. (1908). *A Study of Mathematical Education,* Oxford: Clarendon Press.

Cajori, F. (1910). Attempts Made During the Eighteenth and Nineteenth Centuries to Reform the Teaching of Geometry, *The American Mathematical Monthly, 17*(10), 181-201, Mathematical Association of America.

Cajori, F. (1924). *A History of Elementary Mathematics with Hints on Methods of Teaching*. London: Macmillan & Co, Ltd.

Davis, J., & Hersh, R. (1981). *The Mathematical Experience,* Houghton Mifflin Company.

Ernest, P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education.* The Falmer Press.

Eves, H. (1995). *Introduction to the history of mathematics.* (이우영 · 신항균, 역). 수학사. 경문사.(영어 원작은 1953년 출판)

Fawcett, Harold Pascoe (1938). *The Nature of Proof.* New York: Bureau of Publications, Teachers College, Columbia University.

Fischbein, E. (1982). Intuition and Proof, *For the Learning of Mathematics 3*, 9-24.

Greenberg, M. (1980). *Euclidean and Non-Euclidean Geometries*. San Francisco: W. H. Freeman and Company.

Hanna, G. (1983). *Rigorous proof in mathematics education.* Toronto : Oise Press

Heath, T. L. (1956). *The thirteen books of*

Euclid's Elements with introduction and commentary. New York: Dover Publications.

Horng, W. (2000). Euclid vs. Lin Hui: A Pedagogical Reflection, In V. I. Katz (Ed.), *Using History to Teach Mathematics -An International Perspective* (pp. 37-47). MAA, INC.

Kline, M. (1988). **수학의 확실성**. (박세희 역). 서울: 민음사.

Koyama, M. (1990). *A Study on Intuition in Mathematics Education, in 數學教育學의 觀點*. 東京: 聖文社.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. Cambridge University Press, Cambridge.

Lakatos, I. (1986). A Renassance of Empiricisim in the Recent Philosophy of Mathematics? In T. Tymoczko (Ed.), *New Direction in the Philosophy of Mathematics* (pp. 29-48).

Miyazaki, M. (1991). The Explanation by 'Example' - For establishing the generality of conjectures. *Proceedings of Fifteenth International Conference for the Psychology of Mathematical Education.*, Fulvia Furinghetti(Ed.), 3-9 - 3-16.

NCTM(1989), *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.*

Senk, S. L. (1985). How well do students write geometry proofs?. *Mathematics teacher, 78*(6), 448-456.

Siu(2000). An Excursion in Ancient Chinese Mathematics, In V. J. Katz (Ed.), *Using History to Teach Mathematics - An International Perspective* (pp. 159-166). MAA, INC.,

Stamper, A. W. (1909). *A History of the Teaching of Elementary Geometry*. New York: AMS press.

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and Insight*. Academic Press, Inc.

A Study on the Historic-Genetic Principle of Mathematics Education(1)
- A Historic-Genetic Approach to Teaching the Meaning of Proof

Woo, Jeong Ho (Seoul National University)
Park, Mi Ai (Center for Educational Research, Seoul National University)
Kwon, Seok Il (Seoul National University, Graduate School)

We have many problems in the teaching and learning of proof, especially in the demonstrative geometry of middle school mathematics introducing the proof for the first time. Above all, it is the serious problem that many students do not understand the meaning of proof.

In this paper we intend to show that teaching the meaning of proof in terms of historic-genetic approach will be a method to improve the way of teaching proof. We investigate the development of proof which goes through three stages such as experimental, intuitional, and scientific stage as well as the development of geometry up to the completion of Euclid's Elements as Branford set out, and analyze the teaching process for the purpose of looking for the way of improving the way of teaching proof through the historic-genetic approach.

We conducted lessons about the angle-sum property of triangle in accordance with these three stages to the students of seventh grade. We show that the students will understand the meaning of proof meaningfully and properly through the historic-genetic approach.

* key words: the historic-genetic principle(역사발생적 원리), teaching of the meaning of proof(증명의 의미의 지도), the development of proof(증명의 발달 과정), the angle-sum property of triangle(삼각형의 내각의 합에 대한 성질).