대한수학교육학회지 <학교수학> 제 5 권 제 4 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.5, No.4, 421-440. Dec 2003

비 개념에 대한 역사적, 수학적, 심리적 분석[1)]

정 은 실*

본 논문에서는 비 개념이 역사적으로 어떤 의미를 가지고 있으며, 비에 대한 생각이 어떻게 변화되어 왔는지 살펴본다. 또한 비에 대한 여러 가지 수학적 의미를 찾아보고, 비 개념의 본질이 어떠해야 하는지를 알아본다. 그리고 비례적 추론의 직관적 근원과 발달 과정을 찾아보고 비 개념의 심리적 측면을 분석해봄으로써 비 개념 지도와 관련하여 교육적 시사점을 탐구한다.

I. 서론

비는 우리에게 여러 가지 모습으로 나타난다. 어떤 때는 수로, 어떤 때는 관계로 나타나는가 하면, 그 용어에 있어서도 비율, 비의 값, 비례 등과 혼용하여 사용하는 경우가 많아 우리에게 혼란을 일으킨다. 초등학교 학생에게 비라는 학습 대상은 분명히 다른 수학적 대상과는 다른 특이한 대상이다. 수나 도형도 추상적 대상이긴 하지만 학생들에게 어느 정도 분명한 모습으로 다가온다. 그러나 비라는 대상은 수나 도형과는 다른 형태의 학습 대상이다. 두 양 또는 두 수를 다루면서도 그것을 하나의 대상으로 보는 것은 어린 학생에게 쉽지 않은 일이다. 이러한 비 개념을 바탕으로 하고 있는 비례적 추론은 초등학교 산술의 관석인 반면, 뒤따르는 모든 과정의 초석이라고 말할 정도로 초등학교에서 중요하다(Lesh, Post, Behr, 1988). 그러나 초등학교 학생들이 비 개념을 제대로 파악하고 있는지에 대한 연구의 결과는 바람직스럽지 않다(Noelting, 1980a; 유현주, 1995). 이러한 결과가 나온 원인은 비 개념 그 자체의 혼란에서 오는 것일 수도 있다. 본 연구의 목적은 이런 비 개념이 역사적으로 어떤 변화를 거쳐 발달하여 왔으며, 수학적으로 비는 어떤 의미를 갖고 있으며, 비 개념의 본질은 무엇인지를 알아보는 것이다. 나아가 교육을 시작하기 전 아동이 비에 대해 갖고 있는 비형식적 지식은 무엇이며, 어떤 지식이 비에 대한 토대가 되는지, 비 개념이 심리적으로 어떻게 형성되는지를 검토하고자 한다. 이런 연구를 통해 비에 대한 지도 방향이 어떠해야하는지에 대한 교육적 시사점도 찾을 수 있을 것이다.

---

* 진주교육대학교(esjeong@cue.ac.kr)
1) 이 논문은 2002년도 진주교육대학교 학술연구비의 지원을 받아 작성된 것임

II. 비 개념의 역사적 분석

비 개념이 처음 어떻게 생겨났는지를 추측하는 것은 어렵지 않다. 우리 부족이 다른 부족보다 두 배가 더 많다든지, 이 가죽 끈의 길이가 다른 것에 비해 반밖에 안된다든지 하는 생각에는 모두 비 개념이 포함되어 있다. 실제로 오래전 사람들은 살아가면서 이런 식으로 비교하기를 시작했을 것이다. 전자는 수의 비와 관계가 있고, 후자는 양의 비와 관계가 있다. 이와 같이 비에 대한 생각은 오래전부터 형성되었음을 짐작할 수 있다. 이집트, 바빌로니아 문명의 초기 문헌에도 비와 비례식에 대한 내용을 담고 있으며, 인도와 아라비아에서도 비가 널리 사용되었다. 그리스인들은 비를 사용함에 있어서 획기적인 진전을 이룩하였다. 실제로 Smith(1925)에 따르면 니코마코스(Nichomachus)는 산술, 오이독소스(Eudoxos)는 기하, 스미마(Smyrna)의 테온(Theon)은 음악에 비를 사용하고 있다. 피타고라스학파에서는 비를 사용하여 음악 이론을 개발하였으며, 플라톤도 그의 국가론(Republic)과 티마이오스(Timaeos)에서 여러 가지 비에 대해 논의하고 있다. 유클리드는 그의 원론 제 5권, 제 7권[2]에서 플라톤의 스승인 오이독소스 등 몇 명의 다른 수학자들의 연구물인 비와 비례에 관한 이론을 정리하고 있는데, 이 책에는 기하, 산술, 음악 그리고 모든 수학 이론에 꼭 같이 적용할 수 있는 일반적인 비례론을 포함하고 있다. 유클리드는 원론 제5권 정의 3에서 비를 다음과 같이 정의하고 있다.

> 비는 같은 종류의 두 양(magnitude) 사이의 크기(size)에 대한 일종의 관계이다(Heath, T.L. 1956, p.114).

여기서 주목해야 할 중요한 아이디어는 유클리드는 양을 다루고 있다는 것이다(Katz, 1993). '양'으로 번역한 magnitude는 Heath(1956)에 따르면 '크기의 속성을 가진 것'(p.117)을 말한다. 그러므로 양은 그 길이나 넓이가 아닌 선이나 평면 그 자체를 가리키기 위해 사용되었다. 현대 수학에서는 양이 수에 쉽게 포함되지만, 유클리드에게는 그렇지 못했다. 그는 원론에서 수와 양은 서로 다른 형태임을 분명히 하고 있다. 두 개념은 별개였고 서로 구별이 되는 것이었기 때문에 별도로 다루어야만 했다. 유클리드는 수와 마찬가지로 같은 종류의 양에 대해서 같다, 보다 크다, 보다 작다와 같이 서로 비교했다. 두 양끼리 더하거나 빼기도 하였지만, 수와 양 사이에 연산에 있어서의 주요한 차이점은 곱셈과 관련된 것이었다. 양은 수에 의해서 곱해질 수 있었지만, 원론 어디에서도 같은 종류이든 아니든 간에 양끼리 곱하지는 않았으며, 마찬가지로 양끼리 나누지도 않았다.

앞의 정의에서 주목해야할 또 하나의 사항은 두 양은 같은 종류 즉 둘 다 선이거나 평면일 때만 비를 생각하고 있다는 것이다. 이처럼 같은 종류의 양 사이의 비 즉 내적비에 대해서만 생각하는 전통은 이론과학에서 오랫동안 지속되었다. 이런 관습은 케플러의 법칙에도 나타나는데, '행성의 속도와 그 동경이 그리는 넓이의 곱은 항상 일정하다'는 제2법칙을 '행성과 태양을 연결하는 동경(動徑)은 같은 시간에 같은 넓이를 휩쓸며 지나간다'라고 표현하고 있다. 이론 과학보다 상업 수학이나 기술 수학에서 다른 종류의 양 사이의 비 즉 외적비를 보다 일찍 인정하였다 (Freudenthal, 1983, p.184). 또한 유클리드는 제5권에서는 같은 종류의 양일 뿐 아니라 통약가능한 양 사이의 비만을 생

2) 제 5권은 양 즉 연속량에 대한 비례론을 다루고 있고, 제 7권은 수 즉 이산량에 대한 비례론을 다루고 있다.

각했고(Heath, T.L. 1956, p.117), 통약불가능한 양 사이에는 '비를 가지지 않는다'라고 했다. (Heath, T.L. 1956, p.118) 그러나 제 10권에서는 비를 보다 넓은 의미로 생각하여 통약가능한 것은 물론 통약불가능한 양도 포함하고 있다.

유클리드의 정의에서 가장 눈여겨봐야 할 것은 유클리드는 비를 수나 양으로서가 아니라 관계로 여기고 있다는 것이다. 비를 수로 보느냐 아니냐는 그 후 오랫동안 논쟁의 핵심이었다. 유클리드에 따르면 비는 수직선 위의 특별한 점에 대응하는, 그래서 표준적인 산술 연산에 적용할 수 있는 분수로 해석할 수 없었다. 비 $a:b$는 분수 $\frac{a}{b}$와 다른 것이었고, 따라서 비를 더하거나 곱하지 않았다. 그래서 오늘날에는 $a:b=c:d$는 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$와 동치인 것으로 생각하지만 유클리드 시대에는 비 대신에 분수를 사용하지 않았다. 그러나 중세 시대에 들어와서 비와 분수 사이의 구별이 눈에 띄게 줄어들었고, 르네상스시기에는 통약불가능한 경우를 제외하고는 그 구별이 거의 없어지게 되었다 (Smith, 1953, p.481).

유클리드의 이론의 주 목적은 수와 양의 비를 비교하는 것이었다. 비는 '단위와 차원'의 문제를 피해갈 수 있다는 장점이 있다. 만일 a, b가 같은 종류의 양이라고 하면, 그 비는 차원이 없으므로 다른 비와 비교할 수 있다. 두 비는 '같다'[3], '보다 크다', '보다 작다'와 같이 서로 비교되었다. 예를 들면 두 비가 '같다'는 정의 5를 현대의 대수 기호를 써서 번역하면 다음과 같다.

주어진 양의 정수 m, n에 대해서 $ma>mb$일 때는 언제나 $mc>md$가 되고, $ma=mb$일 때는 언제나 $mc=md$가 되며, $ma<mb$일 때는 언제나 $mc<md$가 된다면, $a:b=c:d$이다.(Katz, 1993, p.76)

유클리드는 양을 곱하지 않은 것과 마찬가지로 비끼리 곱하지는 않았지만, 곱셈과 비슷한 연산을 비에 대해 수행했다. 그 예로 복비(compound ratio)를 구하는 연산을 들 수 있다. 이 연산은 구조적으로는 곱셈과 닮음이긴 하지만, 곱셈은 아니다. 복비를 구하는 연산을 •으로 표시할 때, (2 : 3) • (3 : 7)=2 : 7은 $\frac{2}{3}\times\frac{3}{7}=\frac{2}{7}$과 다르다. 뒤의 연산의 결과는 수 그것도 유리수인 반면에 앞의 연산의 결과는 비이다.

그런데 파포스(Pappos) 시대에 와서는 복비를 구하는 것이 이전과는 달리 그 범위가 확장되어 그 연산이 마치 곱셈과 같이 되기 시작한다. 즉 원론에서는 $(a:b)\bullet(b:c)=a:c$와 같이 앞에 나오는 비의 둘째 항과 두 번째 비의 첫째 항이 같다는 조건하에서 연산이 이루어졌는데, 파포스 시대에 와서는 그 제한이 없어져서 $(a:b)\bullet(c:d)=ac:bd$와 같이 연산을 하게 된 것이다. 여기서부터 비를 새롭게 보기 시작하였다고 말할 수 있다. '비의 크기' 개념이 도입되고 복비를 구하는 방법으로서 이 크기들을 서로 곱하는 연산을 하게 된 것이다. 이 새로운 종류의 비는 유리수와 흡사해졌고 복비를 구하는 것은 산술 곱셈하듯이 하게 되었다. 그래서 기하학적 양인 선은 길이로 대치되었고,

3) 유클리드는 여기서 '같다'고 하는 말을 두 수가 '같다'고 할 때의 '같다'와는 다른 의미로 사용했다. 그래서 17세기 Oughtred는 두 비가 '같다'고 할 때, 기호 '::'를 사용하여 나타냈다. 예를 들어, 양(예를 들면, 선-그 길이가 아니다)을 a,b,c,d로 나타낼 때, $a\times d=2b\times c$라는 식 대신에 비례식 a:2::c:d와 같이 나타냈다.

그것들은 곱하고 나눌 수 있게 되었다. 이런 생각은 중세판 유클리드 원론에 반영되기 시작했다. 중세의 옥스퍼드 계산가 그룹에서는 직선과 원의 호의 성질을 논의할 때에 이를 사용했다. 예를 들면, 웰링포드(Wallingford)의 리챠드(Richard)는 '만일 $b=c.a$라면, $c.b=a$이고 $a \times b = c$이다'와 같은 식으로 연산을 수행했다. 이 리챠드는 우리가 '비의 값'이라 부르는 것과 같은 의미를 갖는 denomination을 다음과 같이 정의하고 있다.

> "같은 종류의 두 양 중의 하나가 다른 양을 나눌 때, 그 나눗셈으로 생겨난 것을 제수에 대한 피젯수의 비의 denomination이라고 한다"(Katz, 1993, p.291)

Smith(1925)는 denomination과 비를 같은 것으로 보고 있음을 다음과 전하고 있다.

> "1859년 베이루트에서 발간된 현대 아라비아 산술에서는 다음과 같이 언급하고 있다. '이 나눗셈을 서 아라비아 사람들은 denomination이라고 불렀지만, 페르시아인들은 그것을 비라고 한다'"(p.481)

미국에서 비와 비의 값을 구별하지 않게 된 것은 이의 영향을 받은 것인지 모른다. 14세기의 니콜 오렘(Nicole Oresme)은 유클리드의 기하학적 양을 유리수로 변환했는데, 그는 분명히 그 양들을 수로 생각하고 있었다. 그는 복비를 구하는 것을 비의 곱셈으로 여기고 그 절차의 역을 비의 나눗셈으로 생각했다. 따라서 $a.b$의 $c.d$에 의한 몫은 비 $ad.bc$가 된다.[4] 이러한 새로운 비의 해석에서는 모든 비가 그 '크기' 즉 간단히 말해서 그 비를 표현하는 수와 연관되어 있었다. 그래서 복비를 구하기 위해서 그 크기끼리 곱할 수 있었던 것이다. 18세기 초까지도 대부분의 수학자들은 계속되는 일련의 항을 만들고 거기에서 첫 항과 마지막 항을 택함으로가 아니라 이런 식으로 곱셈에 의해 복비를 구하고 있었다. 그러나 유클리드 원론에 이론적으로 기울어진 수학자들은 유클리드의 일반적인 비 이론은 곱셈에 의해 복비를 구하는 것을 정당화하지 않는다고 결론짓고 비에 대한 처음 생각으로 되돌리려는 움직임이 있었다. 그것은 1756년에 발간된 로버트 심슨(Robert Simson)의 원론에 나타나고 있다. 여기에서 그는 제6권의 정의 5[5]와 그 정의와 함께 했던 모든 것을 버림으로써, 첫 전통을 상기시키려고 노력했다. Sylla(1984)는 중세 시대에는 비에 대한 두 가지 전통이 혼재되어 있음을 라이브니츠와 클라크(Clarke) 사이에 교환된 서신을 통해서 알 수 있다고 밝히고 있다. 두 번째 전통의 계승자인 라이브니츠는 비는 양이라고 하면서, 비와 분수를 동일시하고 있지만, 클라크는 관계로서의 비를 생각하고 비가 어떤 종류의 양임을 부정한다는 점에서 보수적이다.

오트레드(Oughtred)의 제자인 영국의 월리스(Wallis)는 그가 비에 대해 둘째 전통에 속해

---

4) 오렘은 주어진 비 그 자체의 곱, 현대적인 표기로 $(a.b)^n$ 그리고 비의 '제곱근'에 대해서도 논의했다. 분수 지수를 가진 비에 대한 연산 규칙을 처음 다루었으며, 심지어 무리수 지수를 다루기도 했다. 그는 이런 비의 해석을 원 궤도에서의 위성의 운동과 같은 역학의 여러 분야에 적용했다. 그는 어떤 수든지 기하학적 선-아마도 길이-에 의해 나타낼 수 있다는 새로운 생각을 제기하기도 했다

5) 이 정의는 유클리드의 사본의 여백에만 나오는 것으로서 유클리드 원론의 번역판에 따라 이 정의가 나오는 것도 있고 없는 것도 있다. Sylla(1984)는 유클리드나 그리이스의 다른 기하학자 누구에 의해서도 이것이 언급되지 않았다고 말하고 있다. 이 정의에 의해 두 번째 비에 대한 해석이 나오게 된 것이다.
"비의 크기를 서로 곱해 어떤 (비? 또는 크기)를 만들 때, 그 비를 복비라고 한다"(Heath, 1956, p.189)

있음을 말해주는 여러 가지 주장을 하고 있다. 그는 원론의 제 6권 정의 5에서 히스(Heath)가 '크기(size)'로 번역한 단어를 '몫(quotient)'을 뜻한다고 보고, 이 몫을 비의 값(denomination)과 동일시하고 있다. 그는 이런 분수들은 비의 표시이며, 수와 다름없는 비는 진짜 양이라고 말한다. 그는 원론의 제 5권과 비에 대한 전체 원칙은 기하적이라기 보다는 훨씬 더 산술적이라고 말한다. Sylla(1984)는 이런 면에서 봤을 때 월리스가 가지고 있는 비 개념은 관계적 측면보다는 그 양적인 면을 강조하고 있다고 말한다. 월리스는 비와 비의 값을 구별하면서도 실제로는 그 둘은 거의 같다고 말한다. 그도 고대의 수학자들은 수보다 선에 의해 비를 나타내는 것을 좋아했음을 인정했다. 이것은 고대 수학자들은 정수 이외의 수를 거의 인정하지 않았기 때문이며, 따라서 모든 비를 수로 표현할 수 없다고 생각했기 때문이라고 월리스는 말하고 있다. 그러나 고대 수학자들이 선을 좋아할 수밖에 없었던 것은 기호 표기법 심지어 인도 아라비아 숫자의 사용도 아직 이루어지지 않았다는 사실로 설명할 수 있다고 보고 있다. 그들은 수를 다루는데 어려울 밖에 없었던 것이다.

오트레드와 월리스와는 대조적으로 배로우(Barrow)와 그 제자 뉴톤은 훨씬 더 보수적이었다. 뉴톤이 복비를 구하는 과정에 첫째 전통과 관련된 + 기호를 사용한 것도 배로우에 의한 것이었다. 뉴톤과 마찬가지로 배로우도 복비를 구할 때 연속적인 일련의 항에서 외항을 택하는 식으로 하지 않았으며, 비례식을 $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$와 같이 쓰기도 했지만, 그는 비는 수이며, 비는 기하보다 산술과 훨씬 관련이 깊다는 월리스의 주장을 반박했다. 월리스 등은 비의 값에만 참이 되는 속성들을 비에 적용하는 잘못을 범하고 있다는 것이다. 배로우는 비는 양이 아니라 관계임을 분명히 했다.

비와 비례식을 나타내는 표기법에도 두 가지 전통이 혼재되어 있다. 첫째 전통과 일치하려면, 비는 분수와 같이 나타내서는 안되며, 비례식을 등식으로 나타내서는 안되지만, 둘째 전통에 비추어 본다면 그래도 괜찮다. 라이브니츠는 둘째 전통을 따르고 있었기 때문에, 비례식을 $a{:}b=c{:}d$라고 나타내었다. 여기서 : 는 나눗셈 표시였다. 라이브니츠는 비례식을 나타낼 때, 같은 각각의 비가 양이라고 생각했기 때문에 등호 = 를 사용했다. 영국에서는 비에 대해 별도의 표기가 사용되었는데, 1631년 오트레드의 수학의 열쇠(Clavis mathematicae)에서는 비에 대한 기호로 점을 도입하여 비례식을 $a.b{:}c.d$와 같이 표기하였다. 그는 비와 분수를 의식적으로 구분했고, 비는 양이 아니기 때문에 두 비가 같다는 것을 등호로 나타내기를 꺼렸음에 틀림없다. 이 기호는 다른 지역보다 영국과 미국에서 더 오랫동안 사용되었다. 그러다가 1651년 천문학자 빈센트 윙(Vincent Wing)에 의해 비에 대한 새 기호 : 가 처음 사용하기 시작하였고, 처음에는 기호 . :: .과 : :: : 가 서로 병행하여 사용되다가 18세기 후반에 와서는 : :: : 가 점차 많이 사용되었다. 영국에서는 나눗셈에 대해 : 를 사용하지 않고 ÷를 사용하게 되었다.

이렇게 이론 수학, 음악, 물리학과 관련을 가진 첫째 전통의 비 이론과 비를 사용한 실제적인 계산과 천문학과 관련을 가진 둘째 전통의 비 이론은 함께 발전하며 두 이론 사이의 논쟁은 뉴톤 시대까지 오랫동안 계속되었다. 현대에 와서는 비와 분수를 동일시하는 것이 너무 당연시되었기 때문에 비의 성질에 대해 논의하

는 것은 흥미를 끌지 않게 되었다. 수학자들은 정의는 그 근원이 임의적이고 약정에 의한 것으로 보기 때문에 정의에 대해 더 이상 논쟁을 하지 않는다. 그러나 오랜 기간 동안의 이 논쟁의 흔적은 아직도 학교 수학에 남아 있다(정은실, 2003). 비에 대한 정의는 나라별로 차이를 보이고 있으며, 우리나라의 교과서와 교사용 지도서에 소개된 비의 정의와 이와 관련된 내용도 시기별로 조금씩 차이가 있음을 알 수 있다.

III. 비 개념의 수학적 의미와 그 본질

앞의 비에 대한 역사적 발달 과정에서 원래의 비 이론은 비 그 자체에 대한 이론이었음을 알 수 있다. 수학의 현대화 이후 추상 수학적 관점에서 비를 어떻게 보는가 하는 것은 사람마다 다르다. 그 해석이 상황 의존적이기 때문이다. 비를 어떻게 해석하느냐에 따라 비의 수학적 위치가 달라질 수밖에 없다. 가장 먼저 생각할 수 있는 것은 비를 유리수로 보는 것이다.[6] 유리수로서의 비는 정수의 순서쌍 사이의 동치관계로 도입할 수 있다. 동치관계는 $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$이며, 그 순서쌍의 동치류가 비가 된다. 연산(덧셈, 곱셈)을 적절하게 정의하여 유리수체를 정역(整域)으로부터 구성할 수 있다. 그리고 이러한 각 순서쌍 사이의 동치관계에 의해 얻어지는 동치류는 분수로 표현이 가능하다.

사실 비를 유리수로 본다는 것은 비를 수 또는 양의 순서쌍으로 된 함수로 보는 것이다. 사칙 연산처럼 비는 하나의 특별한 순서쌍에 하나의 함수값이 지정되는데, 그것은 비를 몫으로 변형시켜서, 예를 들면, 비 3 : 4에 대하여 수 $\frac{3}{4}$을 지정하는 것이다. 그러나 Freudenthal(1983)은 비를 이런 식으로 생각하는 것은 비로서의 가치를 떨어뜨리는 것이라고 말한다. 그는 "비가 얼마나 큰지 알지 못해도 비의 같음(과 다름)에 대해 말할 수 있는 것, 다시 말하면, $a:b$는 수 $\frac{b}{a}$로 바꿀 수 있고, 마찬가지로 $c:d$는 수 $\frac{c}{d}$로 바꿀 수 있으므로 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$임을 내다보지 않고도, '$a$가 b에 대한 것은 c가 d에 대한 것과 같다'라고 의미 있게 말할 수 있는 것이 비의 의미"(p.180)라고 하고 있다. 그는 '같음'이나 '다름'을 인식하는 것이 덧셈 연산이나 측정보다도 현상학적으로 앞선다고 말한다. 하나의 단위 e를 선택한 후 순서쌍 (a, b)의 동치류는 $a:b = u:e$에 의해 하나의 수 u로 표현될 수 있음은 사실이지만, 이러한 접근은 사후적인 통찰이다. 선험적으로는 비는 두 가지 자료에 의존하며 그 결과로 비에 대한 각 명제 즉 비례식은 거기에 나오는 네 가지 자료에 의존하게 된다. 이러한 복잡성 때문에 프로이덴탈은 비의 논리적 위치가 분수나 몫 같은 개념들보다 더 상위에 있다고 말하고 있다. 분수나 몫은 이런 복잡함을 줄이는 수단이며, 비에 대한 통찰을 희생시키면서 그 논리적인 위치를 강등시키는 수단이라는 것이다.

한편, Ohlsson(1988)은 비 개념에 대한 적당한 수학 이론은 이항벡터에 기초한다고 제안하고 있다. 벡터는 절대적 측면인 크기와 비교적 측면인 기울기 또는 방향이라는 두 가지 다른 성질을 갖는다. 주어진 벡터 (a, b)에 대해 크기는 $\sqrt{a^2+b^2}$, 방향 또는 기울기는 $a \div b$가 되

6) 초등학교 교과서의 정의로 생각한다면, 비를 유리수로 보는 것이 아니라 비의 값을 유리수로 보는 것이다.

며, 덧셈은 $(a, b) + (c, d) = (a+c, b+d)$와 같이 수행된다. Ohllsson(1988)은 여기서 기울기에 초점을 맞춰 이를 비에 적용시키기고 있다. 그는 Freudenthal과 마찬가지로 비를 내적비와 외적비로 나눈다. 더 나아가 직사각형의 가로와 세로처럼 한 대상의 서로 다른 측면을 비교하는 비와 두 나라의 인구비처럼 두 개의 다른 대상의 한 가지 측면을 비교하는 비를 구분하기도 한다. 한 대상의 두 측면을 비교하는 비는 내적비가 될 수도 있고 외적비가 될 수도 있으나, 두 대상의 한 측면을 비교하는 비는 당연히 내적비이다. 그는 비에 대한 개념적 혼란은 비는 더할 수 없다는 것이라면서, 만일 비를 유리수라고 한다면, 비는 수이기 때문에 당연히 더할 수 있어야 할 것이라고 말한다. 예를 들어 한 학급은 남자 3명당 여자 2명, 다른 학급은 남자 3명당 여자 4명이라고 할 때, 두 학급의 구성비는 $\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=\frac{6}{3}$ 즉 남자 3명당 여자 6명이 되지 않는다. 이를 벡터의 기울기로 해석하면, (2, 3) + (4, 3) = (6, 6)이 되어 두 학급을 합치면 남자 6명당 여자 6명으로 구성되어 있는 상황과 일치하게 된다. 그러면서 Ohllsson(1988)은 비를 벡터의 기울기로 해석하고 이에 벡터의 덧셈을 적용하는 것은 비교하는 양에 대한 좋은 이론이 된다고 주장하고 있다. 그러나 Mochon(1993)과 Thomson(1994)은 비를 벡터의 기울기로 해석하여 벡터의 덧셈 방법을 사용하는 것이 두 비를 포함하는 실제 상황을 언제나 올바르게 나타내는 것은 아니라고 주장한다. 올슨의 예에서 각각 두 학급의 남녀 학생 수를 각각 G_1, B_1, G_2, B_2라고 하자. 이 때 남녀 학생의 비는 $G_1 : B_1$와 $G_2 : B_2$로, 전체의 남녀 학생의 비는 $G_1 + G_2 : B_1 + B_2$로 표현될 수 있다. 남녀 학생의 비를 약분하여 이를 비 g_1: b_1과 $g_2 : b_2$로 나타내고, 이 비의 값을 각각 f_1, f_2라고 하면 $f_1 \equiv \frac{g_1}{b_1} = \frac{G_1}{B_1}$, $f_2 \equiv \frac{g_2}{b_2} = \frac{G_2}{B_2}$이다. 그러면 전체 남녀 학생의 비는 $B_1 f_1 + B_2 f_2 : B_1 + B_2$가 되고 양쪽 항을 $B_1 + B_2$로 나누면 전체 학급을 나타내는 비의 값 $(\frac{B_1}{B_1+B_2})f_1 + (\frac{B_2}{B_1+B_2})f_2$를 얻는다. 이제 약분된 비에 대해 벡터의 덧셈 방법으로 더하면, $g_1+g_2 : b_1+b_2$를 얻게 되고 전체비에 대해 마찬가지 방법으로 계산하면, 비의 값 $(\frac{b_1}{b_1+b_2})f_1 + (\frac{b_2}{b_1+b_2})f_2$를 얻는다. 여기서 $\frac{B_1}{B_1+B_2}$과 $\frac{b_1}{b_1+b_2}$은 언제나 같게 되는 것이 아니라, 전체 비가 같은 약수에 의해 약분이 될 때만 같아지기 때문에 대부분의 경우 벡터로서 약분된 비의 합은 적절한 답이 되지 않음을 알 수 있다. 예를 들면 전체 비가 20 : 30, 24 : 18일 때, 약분된 비는 앞의 예에서처럼 각각 2 : 3, 4 : 3이다. 그러나 전체 비는 같은 수에 의해 약분이 된 것이 아니기 때문에, 각각의 비를 더한 결과가 같지 않다. 그러므로 비를 벡터의 기울기로 보고 더하는 방법이 언제나 의미 있는 결과를 가져오는 것은 아님을 알 수 있다. 그 비가 주어진 양의 전체 값을 나타내는 경우에만 올바른 결과를 가져오는 것이다. 만일 그렇지 않다면, 위에서처럼 좀 더 일반적인 접근 방법을 택하는 것이 적절하다.

그러나 비를 벡터의 기울기로 해석하는 것은

비가 선형함수 개념과 도함수 개념의 기초가 됨을 예시해주고 있다. 남자 4명당 여자 3명이 있다는 말은 기울기가 $\frac{3}{4}$인 선형함수를 정의해준다. 선형함수는 한 양에 대해서 다른 양이 얼마나 변하는지를 말해주는, 다시 말해서 비례 관계를 말해주는 표현이다.[7] 각 비는 함수 관계를 정의하고 있는 모든 순서쌍의 집합에서 단 하나의 쌍이며, 원점을 지나는 선형함수의 집합에 대응한다는 면에서 비는 선형함수보다는 분명히 더 원초적인 개념이다. 이와 같이 비 개념은 수학적으로 여러 분야와 관련을 맺고 있다. Thomson(1994)은 비 그 자체에 대해 좀 더 심층적으로 분석하여 비 개념에 대해서도 수준이 있음을 밝히고 있다. 그는 상황 그 자체가 아니라[8] 사람들이 곱셈적 상황을 구성하는 지적 조작에 기초해서 비 개념을 구분하고 있다. 그는 비나 비율(rate)이라는 것은 상황을 인식하는 사람이 구성하고 실행하는 지적 조작의 산물임을 강조하고 있다. 비는 두 개의 특정한 불변의 양 사이를 곱셈적으로 비교한 결과라고 하고 있는 반면, 비율(rate)은 반영적으로 추상화[9]된 일정한 비, 그의 표현을 빌면 내재화 된 비(interiorized ratio)이다[10]. 그의 생각에 따르면 비는 사람이 두 양을 곱셈적으로 비교하되, 그 비교하는 양을 독립적이고, 정적인 상태에서 비교하는 것이다. 그런데 원래 생각했던 현상의 범위를 넘어서서 그 비를 적용하는 것으로 상황을 재인식 하자마자, 그 비는 비율로 일반화하는 것으로 본다. 그는 비와 내재화 된 비 즉 비율 사이에 또 하나의 비를 생각하고 있는 데, 그것은 내면화 된 비(internalized ratio)이다. 예를 들어 배와 사과가 3 : 4의 비로 있는 바구니에 배가 24개가 있을 때, 사과의 개수를 구하는 문제를 생각해보자. 아동들이 '배 3개 대 사과 4개, 배 6개 대 사과 8개, ...배 24개 대 사과 32개'와 같은 식으로 같은 비를 연속해서 구하게 한다면, 이것은 아동에게 '사과 4개에 대해 배 3개'라고 하는 관계를 추상화하는 기회를 제공하는 것이다. 이것은 사과와 배 중 어느 것의 양이 변하더라도 사과와 배의 집합을 관련짓게 하는 반복 가능

7) 森毅(1975)는 비례 관계와 벡터 해석과의 관계를 다음과 같이 정리하고 있다(pp. 89-90).
정비례 관계 $y=ax$는 학교수학의 바탕이 되며, 미적분에서는 비선형인 함수 $y=f(x)$를 해석하는 수단으로서 국소적으로 정비례인 함수 즉, 무한소 정비례 함수 $dy=f'(x)dx$를 상정한다. 일변수 함수가 다변수 함수가 될 때, 다차원의 정비례가 Y = AX(X와 Y는 벡터, A는 행렬)가 된다. 이 경우 정비례일 때의 상황이 차원에 의한 다양화로 인해 여러가지 변화를 수반하게 된다. 이것을 일반 다변수 함수에대해 행하는 것은 다변수 해석에서이다.

8) 상황에 기초하여 구분한다는 것은, 예를 들어, 같은 양을 비교하는 것은 ratio이고 다른 양을 비교하는 것은 rate이다와 같은 구분을 말한다.

9) Thomson에 의하면 반영적 추상화의 첫 의미는 지적 조작 수준에서 행동을 재구성하고 기호화하는 것이고, 두 번째 의미는 상황 개념이 구성되는 것처럼, 그 개념의 형상적 측면이 지적 조작 수준에 반영되는 것이다. 그는 첫째 의미로 학습했다(예를 들면, 속도를 비율로 학습했다)고 말하고 두 번째 의미로 이해했다(예를 들면, 사물의 운동을 비율로 인식했다)고 말하고 있다.

10) Thomson(1994)은 반영적으로 추상화된 일정한 수의 차가 정수라고 말하는 것과 같은 의미로, 반영적으로 추상화된 일정한 비가 비율이라고 말하고 있다. 하나의 정신 구조로서의 수의 차는 감수, 피감수, 그리고 뺄셈의 결과를 포함한다. 반영적으로 추상화된 수의 차로서의 정수는 그 구조를 전체로 기호화한 것이지만, 여기서 중요한 것은 뺄 결과가 일정하다는 것이다. 즉 주어진 양만큼 차이를 둔다는 조건하에서 감수와 피감수는 얼마든지 변할 수 있다. 마찬가지로 비교되는 양에 관련된 특수한 비는 하나의 정신 구조이다. 반영적으로 추상화된 일정한 비인 비율은 그 구조를 전체로 기호화한 것이지만, 여기서 중요한 것은 곱셈 비교의 결과가 일정하다는 것이다. 그 결과가 일정하기만 하면 비교되는 두 양의 값은 얼마든지 변할 수 있다.

한 비인데, Thomson(1994)은 이 비를 내면화된 비라고 부르고 있다.[11] Harel 등(1994)은 Thomson이 구분한 세 수준의 비 가운데 첫 수준의 비와 둘째 수준의 비는 양이 가지는 일정성(constancy)의 질과 관련이 있는 것으로 보고 있다. 첫 수준인 '비' 단계에서는 특정한 불변인 두 양 사이에 존재하는 곱셈적 관계를 인지하는 단계인 반면, 그 다음 수준인 '내면화된 비'의 수준에서는 관련된 두 양은 물론 그 관계의 결과가 고정적이지만, 관련된 양의 값들은 변하는 단계이다. 위의 '사과 4개 당 배 3개'라는 것을 '비'로서는 사과와 배의 두 집합 그 자체의 비교로 인식하는 것임에 비해, '내면화된 비'로서는 그 집합의 값들은 곱셈적으로 변하지만(예를 들면, 사과 4개 당 배 3개에서 사과 8개 당 배 6개로) 두 집합 사이의 모든 비의 대표 자격으로 인식되는 것이다. 곧 '비'가 두 크기나 양의 값을 비교하는 정적인 이미지를 인식하는 단계임에 비하여, '내면화된 비'는 정적인 이미지로서의 비교의 의미만이 아니라 그것을 통하여 외적인 상황과 두 양의 값은 계속 변하지만 본질적으로는 동일한 관계가 그 안에 있음을 인식하는 단계인 것이다. 그러므로 Freudenthal(1983)이나 유현주(1995)의 주장대로 이 '내면화된 비'가 바로 비 개념의 본질로서 아동들에게 경험되어야 할 양적인 그리고 구조적인 동치관계인 것이다. 이와 같이, 상황이나 크기가 바뀌어도 그 안에 내재하는 관계가 같다는 구조의 불변성을 인식하는 것이 비의 진정한 의미이다.

Freudenthal(1983)은 Thomson이 이야기하는 '내면화된 비'에 대한 패러다임으로 등속운동을 예로 들어 설명하고 있다. 즉, 등속운동에서 '같은 시간동안 같은 거리를 움직인다'라는 것은 '거리는 시간에 비례한다'와 동치이며 이를 형식화하면 '거리는 시간의 선형 함수이다'와 같이 표현할 수도 있고, 다르게 보일지 모르지만, 이는 '속도는 일정하다'와 같이 표현할 수도 있음을 식을 써서 나타내고 있다. 여기에서 시간과 거리라는 두 크기가 관계되며, 함수는 시간에 거리를 할당한다. 여기에서 고려되는 비는 동일한 체계(거리, 시간) 내에서의 비이며 한 체계 내에서의 비는 다른 체계 내에서의 대응되는 비와 같아지도록 요구된다. 이것이 운동의 균등성의 공리이다. 여기에서 한 체계 내의 비는 내적비로, 두 체계 사이의 외적비와 구분된다. 따라서 등속운동은 내적비 사이의 관계와 외적비 사이의 관계로 표현된다.[12] 비는 몫으로 바꾸어서 해석될 수도 있는데, 이런 해석으로 보면 내적비는 수이고 외적비는 양, 여기에서는 속도가 된다.

이것을 일반화하여 이야기하면, '내적비의 불변성'은 '외적비의 일정성'과 동치이며, 이것은 '사상의 선형성'을 의미한다. 한 양 체계 내에서의 내적비가 다른 양 체계 내의 내적비로 보존되는 비례 관계는 선형 사상이다. 선형 사

11) 이 예에서 결국 '사과 하나의 3/4이 배가 된다'는 것을 알게 되는데, 이것은 사과와 배의 양의 크기가 변할 수 있지만 다른 것에 대해 일정한 비를 유지한다는 것이다. 이 비 즉 일정한 비로 된 전체적인 축적을 Thomson은 내재화된 비 즉 비율이라고 부르고 있다.

12) 여기서 프로이덴탈은 내적비 사이의 관계인 s1:s2=t1:t2에서 내항을 서로 바꾸어 외적비 사이의 관계인 s1:t1 = s2:t2으로 바꾸는 과정에서의 학생들에게 일어나는 심리적 비약을 지적하고 있다. 예전의 산술지도에서는 이를 의식하고도 그 간격을 메우려고 하는 대신에 등분제와 포함제라는 두 종류의 나눗셈을 만들어 이 문제를 사라지게 하는 것처럼 하고 있다는 것이다. 오늘날에는 아무도 내적비에서 외적비로의 심리적 도약을 의식하지 않기 때문에 이것이 학습자에게 큰 문제가 될 수 있는지 없는지에 대해 문제를 제기하는 사람이 아무도 없다. 앞에서도 알아보았듯이 역사적으로 볼 때 고대 그리스의 기하학적 전통은 내적비에 의한 형식화만을 허용하였는 바, 외적비의 도입은 최근의 일이다. Tourniaire 등(1985)은 외적비는 비에 대해 좀더 추상적인 관점을 나타낸다고 말하고 있다.

상은 역사적인 발달에서 먼저 내적비의 보존, 즉 사상의 선형성, 비례성을 의식하는 것이 선행되었고 오랜 후에야 그것은 외적비의 일정성으로 정리되었다. 이런 의미에서 사상의 선형성은 암묵적으로는 예를 들면 등속운동의 경우에서와 같이 시간이 늘어난 만큼 거리가 늘어난다는, 즉 합은 합에 대응한다는 방식으로 $f(x+y)=f(x)+f(y)$로 정의된다. 유현주(1995)는 이러한 암묵적인 사상의 선형성의 인식은 '한 대상에서의 변화'를 '다른 한 대상에서의 변화'로 수송해서 두 대상 사이의 변화의 관련성, 즉 '공변(covariation)'에 바탕을 두고, 각 대상의 변화가 가지고 있는 나름대로의 구조를 서로 대등하게 보고자 하는 '비례 관계' '비례성'의 인식이라고 해석하고 있다. 다시 말해 한 양 내에서 또는 양 사이의 관계로서의 비는 '한 대상에서의 곱셈적인 변화'가 '다른 대상에서의 곱셈적인 변화'로 수송되는 관계를 인식하는 것이며, 이것이 알고리즘화되어 '외적비의 일정성' 즉 구조적인 동치관계로 파악하는 것이다. 한편 사상 f의 선형성은 알고리즘적으로 $f(x)=mx$로 정의된다.

Freudenthal(1983)은 위와 같은 양 내의, 양 사이의 관계로서의 맥락뿐만 아니라 기하학적 맥락에서도 비가 나타난다고 하면서 그 예로 '닮음'을 들고 있다. 닮음도 앞에서 살펴보았던 등속운동의 경우와 같은 특징을 가지고 있다. 먼저 한 평면도형에서 같은 거리를 갖는 점의 순서쌍을 다른 평면도형에서 같은 거리를 갖는 점의 순서쌍으로 보내는 사상을 생각하자. 이 때 이 사상은 거리의 동등성을 보존하며, 합동인 도형을 합동인 도형으로 보낸다. 또한 이 사상은 비를 보존하는데 그것은 내적비의 보존성이며, 또한 외적비의 일정성을 나타낸다. 이러한 두 평면도형 사이의 사상은 '닮음'으로 표현될 수 있는 것이다. 기하학적 맥락에서의 구조적 동치관계인 '닮음'은 다른 맥락에서와는 달리 시각화할 수 있다는 장점을 가지며, Freudenthal은 교수학적으로 중요한 것은 시각적 추론을 점진적으로 언어화하는 것이라고 하면서 이런 장점을 학습-지도에 적극적으로 이용할 것을 권고하고 있다.

결론적으로 비의 진정한 의미는 단순히 두 양을 비교한 정적인 결과만을 생각하는 것이 아니라, 상황이나 크기가 바뀌어도 그 안에 내재하는 관계가 같다는 구조의 불변성을 인식하는 것이다. 따라서 비 개념의 본질을 파악하기 위해서는 비례 관계에 대한 이해가 필요하다. 비례적 추론은 비례 상황에 내재해 있는 수학적 관계를 이해하는 것이다.(Karplus 등, 1983, Cramer 등, 1993) 이 관계는 항상 곱셈적으로서, 대수적으로 비례 관계는 $y=mx$ 형태의 규칙을 통하여 표현될 수 있다. 그래프로는 비례 상황은 원점을 지나는 직선에 의해 기술된다. $y=mx+n$으로 특징된 과제는 비례적 상황과는 구별되어야 한다. 방정식 $y=mx$의 m은 직선의 기울기를 의미하는데, 이 기울기 m은 또한 단위 비율이며 두 측도 공간 사이의 양을 관련

13) 비례적 상황이 아닌 경우에 비례적으로 문제를 해결하는 것도 제대로 된 비례적 추론이라고 할 수 없다. 즉 기계적으로 비례식을 조작할 수 있는 능력이 있다고 해서 그 학생이 비례적 추론을 하고 있는 것은 아니다. Cramer 등(1993)은 수학 방법 수업에서 33명의 예비 초등 교사에게 다음과 같은 문제를 제시했다. "숙이와 진이가 운동장을 똑같은 속력으로 달리고 있다. 숙이가 먼저 출발하였다. 숙이가 9 바퀴를 달렸을 때 진이는 3 바퀴를 달렸다. 진이가 15 바퀴를 돌았을 때 숙이는 몇 바퀴를 돌았는가?" 이 예비 초등 교사들 중 32명이 비례식을 이용하여 다음과 같이 문제를 풀었다.

$$\frac{9}{3}=\frac{x}{15}\ ;\ 3x=135\ ;\ x=45$$

시키는 상수 인수이다. 그 상황에 대한 모든 비율의 쌍은 직선 $y=mx$ 위에 나타난다. 또한 비례적 추론은 또한 다양한 문제 유형을 해결할 수 있는 능력, 비례적이지 않은 상황과 비례적인 상황을 식별하는 능력을 포함한다.[13)]

Ⅳ. 비 개념의 심리적 분석

1. 비 개념의 직관적 근원

비 개념의 직관적 근원은 무엇인가? Freudenthal(1983)은 개념으로서의 비나 지적 대상으로서의 비는 꽤 높은 발달 수준을 요구하지만, 비에 대한 느낌을 가지는 것이나 비에 대한 시각을 갖게 되는 것은 발달 초기에 이뤄진다고 말하고 있다. Resnick과 Singer(1993)도 수를 사용하지 않고 비와 같은 관계에 대하여 추론하게 하는 원시 양 개념 도식(protoquantitative schema)을 아동들이 가지고 있다고 주장하고 있다. 그 중에서 맞추기(fittingness)[14)] 도식과 공변(covariance)[15)] 도식이 원시 양 개념 지식의 기초를 형성하고 있다고 본다. Hoffer(1988), Lesh 등(1988), Cai 등(2002)도 비 개념의 근원은 비교와 공변 개념이라고 말하고 있다. Resnick과 Singer(1993)가 말하는 맞추기 도식도 두 사물을 맞추기 위해서는 비교를 해야 한다고 보면 결국 비 개념의 근원은 비교와 공변이라고 할 수 있을 것이다.

이에 대한 이들의 주장을 중심으로 비 개념이 심리적으로 어떻게 형성되는지를 살펴보기로 하자. 관계적 양에 대한 지식은 일상의 언어적, 물리적 경험으로 유래될 것이라는 가정 밑에 Resnick, Singer (1993)는 수에 대해 관계적으로 추론하는 능력의 심리적 근원을 탐구하고 있다. 일상의 언어적, 물리적 경험으로 형성된 원시 양 개념 도식은 별도로 개발된 수에 대한 지식과 연결시킴으로써 궁극적으로 계량화하게 되고, 계량화된 관계 도식은 최종적으로 여러 자료 사이의 관계가 아니라 수 사이의 관계에 대한 추론을 지원하게 된다. Resnick, Singer (1993)에 따르면, 맞추기(fittingness)는 아동들이 쉽게 이해하는 가장 간단하고 기초적인 관계이다. 언어를 사용하지 않는 순수한 지각적 수준에서 아이들은 구멍의 크기에 맞는 대상을 고를 수 있으며, 보다 기초적인 수준에서 아이들은 자기 몸에 맞는 곳을 찾아 낼 수 있다. 그 다음에 아이들은 이러한 맞추기를 표현하는 단어(맞다, 너무 크다, 너무 작다 등)를 사용하게 된다.[16)] 그들은 이러한 맞추기 관계는 외적비 관계를 원시 양 개념적으로 포착하고 있는 것으로 보고 있다.

또 하나의 원시 양 개념 지식의 기초는 공변이다. Lesh 등(1988), Resnick, Singer(1993)는 비례적 추론은 공변을 포함하는 수학적 추론 형태로 보고 있다. 어린 아이들도 두 양의 수열 사이의 공변 규칙에 민감하여 한 수열이 커짐에 따라 다른 수열도 커진다는 규칙을 안다.

---

14) 그 크기 또는 양이 서로 맞기 때문에 두 사물이 함께 한다는 생각을 말한다.

15) 크기 순서로 배열된 두 수열이 비례적으로 또는 반비례적으로 함께 변한다는 생각을 말한다.

16) 아동들이 사용하는 크기에 대한 언어(크다, 작다, 높다, 낮다 등)는 대상에 따라 사용 시기가 다르다. 예를 들어 두 살된 아이의 경우 '큰 사람'은 알아도 '큰 산'을 알기는 어렵다. 또한 크기 규준에 대한 지식은 대상의 집합에 따라 다르게 발달한다. 예를 들어 두 살 어린이는 자기 자신이나 아버지의 신발에 맞는 주머니를 정확하게 선택할 수는 있지만, 단추 또는 식판에 맞는 것을 선택하는 것은 어려워한다. 이것을 통해서 크기가 기능성에 분명히 중요한 영향을 줄 때 크기 맞추기에 대한 감각이 우선적으로 발달함을 알 수 있다.

정비례적인 공변 규칙을 알게되는 것은, 몸이 성장함에 따라 보다 큰 신발과 옷이 필요함을 알게 된다든지, 큰 사람일수록 더 많이 먹는 다는지 하는 아동의 사회적 경험에 근거하고 있는 것 같다. 예를 들어 곰 인형을 가지고 노는 아이들이 "곰 A가 곰 B보다 크다(작다, 같다)면 곰 A의 침대는 곰 B의 침대보다 크다(작다, 같다)" 또는 "아빠 곰 침대가 엄마 곰 침대보다 더 커야만 한다. 왜냐하면, 아빠 곰이 엄마 곰보다 더 크기 때문이다"라고 이야기 한다면 그 아동은 원시 양 개념적인 수준에서 비례 관계를 알고 있는 것이다.

Piaget 등(1977)의 연구에서도 아동의 공변에 대한 이해를 하고 있음을 알 수 있다. Piaget 등(1977)은 아동들에게 길이가 각각 5cm, 10cm, 15cm(각각 A, B, C)인 장난감 뱀장어에게 장난감 먹이를 주도록 했다.[17] 아동들에게 고기의 길이를 재는 도구를 주지 않고 고기 A는 고기 B보다 두 배 더 많이 먹고, 고기 C는 고기 B보다 3배 더 많이 먹는다고 말해 주었다. 그리고 그 중 한 마리에게 특정한 양만큼 고기에게 먹이를 주는 것을 보여주고, 다른 두 고기에게 얼마만큼 먹이를 주어야하는지를 결정하도록 했다. 처음 고기에게 주는 먹이의 양을 변화시키면서 연구자는 아동들이 고기 크기에 따라 먹이의 양을 적절하게 조절하는지를 관찰했다. 5-6세의 아동들은 콩과 같은 이산적 먹이에 대해서, 6-7세의 아동들은 리본과 같은 가늘고 긴 연속적 먹이에 대해서 원시 양 개념적인 비 추론을 성공적으로 수행했다. 이 아동들은 고기 사이의 비교 관계가 먹이 관계로 확장되어야 함을 알았다. 따라서 고기 A는 고기 B보다 작고, 고기 B는 고기 C보다 작기 때문에 A에게 주는 먹이의 양은 B에게 주는 것보다 작아야하며, 따라서 C에게 주는 양보다도 작아야 함을 알았다. 아동들의 정당화하는 말을 통해서 그들이 비교 추론을 사용하고 있음을 분명하게 보여 주었지만, 또한 맞추기 관계(fittingness relation)란 측면에서 생각하고 있음도 보여 주었다. 예를 들어, 콩 한 알을 A에게 주었을 때, Kar(5년 5개월)는 'B는 중간이고, C는 가장 큰 고기이기 때문에' B에게는 두 알, C에게는 세 알을 주었다. B에게 네 알을 주었을 때, A에게는 두 알, C에게는 다섯 알을 주었다. 실험자가 A에게 한 알만 주어도 되지 않는지를 물었을 때, Kar는 "아니에요. 그것으론 충분치 않아요. 그것은 첫 번째와 같아져요."라고 대답했다. 실험자가 C에게 여섯 알을 줄 것을 제안하자, Kar는 "그래요. 그것도 좋아요...."라고 말했다. 아홉 알을 줄 것을 제안했을 때는 "아니에요. 그건 너무 많아요."라고 대답했다(p.42).

따라서 아동들은 고기 문제를 해결하기 위해서, 맞추기 관계와 간단한 질적 공변 형태 모두를 사용하는 것 같다. 아동들은 한 수열에 있는 내적 관계를 주목하고, 그 관계를 다른 수열에 적용한다. 그래서 아동들은 고기 크기와 먹이의 양 사이에 다음과 같은 관계를 생각하고 있는 것이다. 즉, 한 고기가 다른 고기보다 크다면, 그 고기는 더 많은 먹이를 먹어야 한다. 한 고기가 다른 고기보다 작다면, 그 고기는 더 적은 먹이를 먹어야 한다. 한 고기가 다른 고기와 같다면, 그 고기는 다른 고기와 같은 먹이를 먹어야 한다. 사실상 그들은 완전한 비례식은 아니지만 (고기 크기 A) : (고기 크기 B) = (먹이의 양 A) : (먹이의 양 B)를 만들고 있는 것이다.

Resnick과 Singer(1993)에 따르면, 정비례적인 공변에 대한 이해가 반비례적인 공변에 대한

17) 길이만 생각하도록 뱀장어를 선택한 것이다.

이해보다 앞선다. 즉, 아동들은 사물이 반대 방향으로 변하는 것을 이해하기 전에 같은 방향으로 자라거나 줄어든다는 것을 이해한다. 아동들은 6살 정도에 정비례적인 공변 추론을 할 수 있는 반면에, 9살이 되서야 반비례적인 공변 추론을 함을 보여주고 있다. 반비례적인 공변 도식이 생기기 전에는 아동들은 반비례 관계를 포함하는 문제를 해결하는데 정비례 관계를 잘못 사용할 수 있다.

한편 Freudenthal(1983)은 관점을 달리하여 기하학적 맥락에서 비와 비율에 대한 직관적 근원을 '닮음'의 인식으로 해석하고 있다. 그는 아동들이 대상 사이의 닮음을 일찍 인식하는 것으로 보는데,[18] 이는 아동들이 그림을 볼 때 '실제의 모습에서 서로 같은 것은 그 그림에서도 서로 같다'고 생각하는 데서 찾을 수 있다는 것이다. 이러한 닮음의 인식은 실제로 두 대상을 맞추어보고 비교하는데서 시작되며, 한 대상이 변하면 다른 대상도 함께 변한다는 공변에 대한 생각이 숨어있음은 물론이다. 이것은 그들이 '닮음'을 아직 수치화하지는 못하지만 조작적으로 다룰 수 있다는 것을 의미한다고 볼 수 있다. 더구나 그들은 원래의 것과 이미지를 비교함으로써 닮음을 파괴하는 구조는 즉시 거부한다. 그들이 '원래의 것에서 합동인 것은 이미지에서도 서로 합동이다'라고 인식하는 것은 닮음을 규정하는 '내적비의 불변성'을 의미한다. 이는 아동이 일찍부터 '비를 보존하는 사상(mapping)'과 친숙하다는 것을 보여주는 것이다.

2. 비 개념의 발달

비례 문제를 학생들이 어떻게 해결하는가에 따라 비 개념의 발달 과정을 추적해 볼 수 있다. Karplus(1981)는 비 개념의 전조(前兆: precursor)로서 덧셈적 추론이 나타난다고 주장했다. 학생들이 비례 문제를 덧셈적으로 해결하려고 한다는 것은 여러 연구에서 확인되고 있다. 예를 들어 Piaget 등(1977)은 아동들이 고기 먹이 문제를 처음으로 양적으로 풀려고 시도할 때, 그들은 먹이에 덧셈 관계를 적용하고 있다고 보고하고 있다.

고기 A에게 한 알을 주었을 때, Jan(5년11개월)은 고기 B에게는 두 알, 고기 C에게는 세 알을 주었다. 고기 B에게 네 알을 주었을 때, 그는 '고기 A에게는 한 알 적은 세 알, 고기 C에게는 한 알 많은 다섯 알'을 주었다. 고기 C에게 아홉 알을 주었을 때, 그는 '고기 B에게는 한 알 적은 여덟 알, 고기 A에게는 또 한 알 적은 일곱 알'을 주었다. 그들은 비례식 (고기 크기 A) : (고기 크기 B) = (먹이량 A) : (먹이량 B)을 적용하고 있는 것처럼 보이지만, 다음 표에서 보여주는 방식으로 먹이의 양을 양화하고 있음을 알 수 있다.

고기 크기 관계	먹이의 양 관계
$a > b$	$a' = b'+1$
$a = b$	$a' = b'$
$a < b$	$a' = b'-1$

18) Freeudenthal(1991)은 기하학적 닮음이 아동들에게 가장 빠른 기하학적 경험중의 하나라고 말하고 있다.

중간 단계에서는 먹이의 양을 정하기 위해 앞의 고기 먹이에 일정한 양(꼭 1은 아니다)을 더하거나 뺌으로써 관계를 양화했다. 9살이 지나서야 아동들은 곱셈적 양 관계를 체계적으로 적용하기 시작했다.

Lesh 등(1988)도 이러한 덧셈적 추론을 전비례적(pre-proportional) 추론이라고 하면서, 덧셈적 추론이 비례적 추론 발달의 초기 단계에 '자연스럽게' 나타나는 것 같다고 주장한다. Resnick과 Singer(1993)는 아동들이 곱셈 관계에 대해서 덧셈을 적용하는 두 가지 요인으로서, 원시 양 개념적인 곱셈 관계는 덧셈 관계보다 훨씬 더 늦게 발달한다는 것과 아동들이 처음에 원시 양 개념적인 공변과 맞추기 도식을 양화하려고 할 때, 곱셈 구성 성질보다 덧셈 구성 성질에 대해서 더 많이 알고 있다는 점을 들고 있다. Karplus 등(1983)은 비례적 추론 문제에 대한 6, 8학년의 성취도를 조사하였는데 그 보고서에 의하면 문제가 어려워짐에 따라 비례적 추론을 사용한 학생의 비율이 줄어든 반면 덧셈적 비교를 한 학생의 비율은 증가하였고 문제의 난이도에 관계없이 비례적 추론과 덧셈적 비교를 한 비율의 합이 각 학년에서 일정하였다. 그들은 이러한 결과에 대해 대부분의 학생들이 문제의 난이도에 따라 덧셈적인 비교와 비례적 추론 사이를 오가는, 비례적 사고가 안정되지 못한 상태임을 지적하고 있다.

비례성에 대한 이러한 실험 연구의 결과는 학생들이 비례성에 대한 지도를 받은 이후에도 여전히 일정한 차이를 유지하는 관계로서의 가법적인 사고에 대부분 머물러 있고 일정한 비를 유지하는 관계로서의 곱셈적인 관점으로 안정되게 이행되지 못하였음을 보여주고 있다.

Tourniaire 등(1985), Nunes 등(1993)에 따르면 피아제학파에서는 비례적 추론 능력의 발달 과정을 네 단계로 나누면서, 이러한 가법적 사고의 수준을 세 번째 단계로 구분하고 있다.[19] 이 단계에서 아동들은 가법적이지만 체계적인 방식으로 관계를 계량화하기 시작한다. 그러나 두 변인 사이에 일정한 비가 유지된다는 것 까지는 생각하지 못한다. 그렇지만 피아제학파에서는 앞 단계와 비교하여볼 때 의미 있는 진전이 있는 것으로 보고 있다. 왜냐하면, 비록 부정확한 덧셈 관계를 사용하고 있지만 이 수준의 아동들은 두 변인을 고려하고 그것을 체계적으로 관련시키고 있기 때문이다. 이러한 인식은 형식적 조작기에 형성되는 '비례성'에 앞서서 학습자가 가지고 있는 '전 비례성'인 것이다. 거듭되는 덧셈의 곱셈으로의 인식이 비례성을 획득하는데 효율적으로 사용될 수 있음을 피아제는 강조하고 있다. 마지막 단계는 피아제가 '논리적 비례식'(Lesh 등, 1988, p.105)이라고 표현한 수준으로 먼저 두 항 사이의 곱셈 관계를 주목하고 그 다음에 그 관계를 다른 두 항에 적용하는 사고 수준을 나타낸다. 변인 사이의 관계를 주목할 뿐 아니라 그 사이에 일정한 비가 유지됨을 아는 단계이다. 유현주(1995)는 이 단계에서 학생은 한 대상에 속하는 원소들의 차이에서 드러나는 구조를 다른 한 대상에 속하는 원소들의 차이에서 드러나는 변화로 수송하는 '비례성'을 획득하게 된다고 말하고 있다.

이와 같이 피아제학파의 이론에 따르면, 비례적 추론을 할 때 구체적인 문제 상황이 중요

19) 첫째 단계는 문제를 이해하지 못하거나, 주어진 정보의 일부에만 기초하여 반응을 나타내는 단계이다. 이 단계에서 학생들은 한 변수에만 관심을 갖거나 변수 사이의 관계를 고려하지 않는다. 둘째 단계는 변수 사이의 관계에 주목하기 시작하지만, 단지 직관적인 방식으로 관심을 갖는 단계이다 예를 들면, 비례식 $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ 에서 A가 증가하면 B도 증가할 것이라고 생각은 하지만 그 증가하는 양을 계량화하려는 체계적인 노력을 하지 않고 예상하는 단계이다.

하지 않다는 결론을 얻을 수 있다. 일단 학생들이 선형함수의 개념을 이해할 수 있다면, 그들은 다양한 상황에서 다양한 비를 가진 문제를 해결할 수 있다고 보는 것이다. 다시 말해서 피아제 이론에 따르면 비례적 추론은 전반적 능력(global ability) 즉 일반적인 인지구조의 구현인 것으로 말하고 있다. 그러나 비례 개념에 대한 연구에 따르면, 문제에 나오는 수, 문제 상황의 형태, 학생들이 대답해야한 형태 등에 따라 학생들이 다른 성취 수준을 보이고 있다. 예를 들면, Lesh 등(1988)은 Piaget의 이론을 학생들의 비례 문제를 해결하는 과정을 통하여 확인해보니 학생들이 사용하는 추론 수준은 과제에 따라 또는 심지어 이미 주어진 한 과제 내에서도 일관성이 없다는 것을 알게 되었다. 학생들은 비례 문제를 해결하는 40여분 동안에 2번에서 10여번의 서로 다른 재개념화가 일어나는데, 이 주기는 피아제의 발달 계열을 농축시킨 것과 거의 흡사하다. 다시 말해서 40여분간에 일어나는 문제 해결 과정의 재개념화 순서는 몇 년에 걸쳐 점진적으로 일어나는 일반적인 비례적 추론 발달 과정과 같다. 이렇게 문제 해결을 '국소적 개념 발달'로 해석하는 것으로부터 Lesh 등(1988)은 국소적 개념 발달 기간에 중요한 것으로 나타나는 메카니즘은 초기의 덧셈적 추론 형태로부터 비례적 추론으로 나가는 일반적인 개념 발달을 설명하는데 도움을 줄 수 있다고 주장하고 있다. 그래서 이들은 비례적 추론은 일반적 인지구조의 전반적인 구현이 아니라 점진적으로 증대되는 국소적 능력으로 생각하고 있다. 다시 말해서 비례적 추론은 초기에는 작고 제한된 문제 상황에서 익히다가, 나중에 능력은 보다 큰 문제 집합으로 점진적으로 확장된다는 것이다.

Lamon(1993, 1994)도 비례적 추론의 성장에 대한 중요한 기제에 대하여 앞서의 학자들과는 다른 입장에서 의견을 개진하고 있다. 그녀는 어린 아동의 사고가 점진적으로 더 복잡해지는 중요한 기제 즉, 반복적이고 순환적이며 점점 복잡해지는 기본적인 과정이 무엇인지를 알아보기 위해 비와 비례를 가지고 탐구했는데, 그녀는 단위화(unitizing)와 기준화(norming)가 비와 비례적 추론의 중요한 기제라고 주장한다. Lamon(1993)의 예를 든 문제를 가지고 단위화를 생각해보자.

최근 9사람이 2대의 차에 나누어 타고 출장을 다녀왔다. 이 회사에서 18명의 사원을 회의에 참석하기 위하여 출장을 보내려고 한다. 나는 이들의 출장을 위해 차를 빌리려고 한다. 몇 대의 차를 빌려야 하는가?

이 상황은 9명 : 2대라는 비를 만든다. 여기서 9는 합성단위가 된다. 왜냐하면 한사람 한 사람이 모인 9명이 하나의 단위 즉 단위의 단위가 되기 때문이다. 마찬가지로 2도 합성단위이다. 즉 차 2대가 모인 것이 하나의 단위가 된다. 비 그 자체를 하나의 단위로 볼 수도 있다. 앞의 보기에서 9 : 2는 9와 2를 관련 지움으로써 형성된 새로운 단위이다. 만일 이 특별한 비의 동치류의 원소에 관심을 갖는다면, 이번에는 그 비교 9 : 2가 단위 그 자체가 되고 단위의 단위를 단위로 만듦으로써 동치인 비를 얻게 된다. 즉 18 : 4는 단위 9 : 2를 둘 모은 것이다. 기호로 표시하면 18 : 4 = 2(9 : 2)이다. Lamon(1994)은 아동의 사고에 의해 점점 복잡해지는 단위화 과정을 4가지 수준 즉, 모델화와 세기, 합성, 추상화, 관계 맺기로 나누고 있다. 첫째 모델화와 세기 수준에서는 비를

쉽게 이해하도록 하기 위해 그림으로 표현했을 때, 포함된 모든 양을 조정하기 위해 직관적 세기 전략이 일어나며, 대응하는 두 양끼리 짝을 지어보는 활동이 포함된다. 세기나 짝짓기와 같은 구체적 활동을 통해 비를 경험해보는 것은 학습 주기의 첫 단계로써 비 개념을 추상화하는 중요한 선결 조건이다. 둘째 수준에서는 합성 단위가 사용된다. 3명에게 사과 5개씩 나눠준다고 할 때, 3단위와 5단위가 반복해서 짝을 맺으면서 세게 된다. 즉 3명에 5개, 하나, 또 다른 3명에 5개, 둘,....등등이다. 다음 수준에서는 비를 되풀이하는 것이다. 6 : 10과 9 : 15는 3 : 5와 같은 관계를 표현한 것이다. 마지막 관계 맺기 수준은 전체의 배수를 각각 다른 합성 단위의 배수로 구성하는 것이다. 예를 들면, 5(8단위)=5(3단위)+5(4단위)+5(1단위)이다.

기준화(norming)라는 말은 Freudenthal(1983)이 먼저 사용한 것이다. 그는 어떤 고정된 단위 즉 기준과 관련하여 한 체계를 재개념화하는 과정을 기준화라고 하였다. 예를 들어 지구를 바늘 구멍(지름 약 1mm)만큼하다고 하고, 태양계를 그 정의에 비추어 재개념화하면 태양은 지구로부터 10m 떨어진 곳에 있는 지름이 10cm인 구로 볼 수 있다. 이런 기준화 과정 즉, 어떤 상황을 개념화하는 어떤 틀의 채택은 수학적 사고 과정에서 자주 일어난다.

단위화와 기준화는 아동들이 비에 대해 이해하기를 바라는 중요한 관계를 포함하고 있으며, 단위화와 기준화 과정은 좀 더 상위 추론을 발생시키는 중요한 기제가 될 수 있다. 비와 비례에 대한 이해는 관계를 단 하나의 양으로 바라볼 수 있는 능력과 그것을 조작할 수 있는 능력에 의존한다.

V. 교육적 시사점

비 개념의 근원인 비교와 공변에 대한 느낌을 가지는 것은 아동의 발달 초기에 이뤄지는 것임에도 불구하고 초등학교 학생에게 비는 학습하기에 어려운 대상임이 분명하다.

비라는 학습 대상이 학생들에게 다른 수학적 대상과는 다른 특이한 대상이라는 점 이외에 비에 대한 분명한 설명을 찾아보기 힘들다는 점에도 기인한다. 역사적 분석 과정에서 밝혀졌듯이 유클리드 원론에서 정의한 비에 대한 해석은 시대에 따라 달랐다. 이것은 학교 수학에서도 그대로 드러나 우리나라의 교과서나 교사용 지도서에서도 비에 대한 설명은 시대에 따라 다르게 나타난다. 또한 '비'와 '비의 값'을 구별하여 정의하고 있으면서 분수의 의미를 생각할 때는 '비로서의 분수'라고 하여 '비'와 '비의 값'을 동일시하는 등 용어 혼용의 문제도 여전하다. 이러한 문제를 해결하기 위해서는 앞으로 비를 어떻게 해석하는 것이 바람직한 것인지에 대한 보다 깊이 있는 연구와 논의가 필요하다.

우리나라의 교과서를 보면 비 개념의 본질을 인식하게 하는 사고 교육보다는 비 그 자체의 외형적 표현과 기계적 알고리즘에 치우쳐 있음을 알 수 있다. 현실과 관련 있는 것처럼 보이는 문제 하나를 제시한 후에는 순수하게 수에 의한 비를 연습한다든지, 현실과 관련이 없는 비의 값, 비례식 등과 같은 수학적 대상을 가지고 연습하는 것 등 비에 대한 학습 지도가 알고리즘에 지나치게 집중되어 있기 때문에 학생들은 비록 계산은 능숙하게 할 수 있다 해도 그 개념의 진정한 의미를 제대로 파악할 수 없

는 것이다. 6차 교육과정까지는 '비와 비율'라는 단원이 고립되어 비를 지도하는 목적이 불분명하게 되어 있었으나 7차 교육과정에서는 '비와 비율' 단원에 이어 '비례식'을 학습하도록 배치하여 그나마 비의 의미를 보다 잘 파악하게 한 점이 눈에 띈다. 그러나 비를 포함하고 있는 상황이 너무 단순하다. 비의 의미를 제대로 살리기 위해서 비를 여러 가지 방식으로 이해하도록 해야 한다. 맥락도 다양해야 하며, 비를 구현하는 점에 있어서도 다양해야 한다. 이런 다양한 방식에서 수학적 개념과 조작은 아동에게 의미 있게 만들어지고 유용하게 된다. 구체적으로 비에 관한 과제에는 측정, 가격, 기하적 맥락과 기타 시각적 맥락, 모든 종류의 비율 등을 포함하는 것이 좋다. 이러한 과정을 통해 학생들은 그들의 지식을 재구조화하기 위한 강력한 개념적인 기반을 가지게 되는 것이다.

비 개념이 학생들에게 어려운 대상이기는 하지만, 앞에서 살펴보았듯이 비에 대한 느낌을 가지는 것은 발달 초기에 이뤄진다. 따라서 비례적 추론을 개발하기 위한 프로그램을 조기에 도입하는 것에 대해서도 보다 깊은 논의가 요구된다. 현재의 교육과정에 의하면 우리나라에서는 6학년에서 비 개념을 도입하고 있으며, 그 이전에는 비와 관련된 내용을 전혀 다루고 있지 않다. 아무런 준비 과정 없이 비를 명시적으로 가르치는 것보다. 저학년에서부터 비를 직관적으로 이해하도록 프로그램을 개발할 필요가 있다. 문제 해결 과정을 통하여 비에 대한 개념을 파악하게 하는 것도 한 가지 방법이 될 것이다.

참고문헌

유현주(1995). **유리수 개념의 교수현상학적 분석에 의한 학습지도 방향에 관한 연구**. 서울대학교대학원 박사학위논문.

정은실(2003). 비 개념에 대한 교육적 분석. **수학교육학 연구**. 13(3), 247- 265.

森毅(1975). **現代數學の 數學教育**, 基礎數學選書, 裳華房.

Bassarear, T. (2001). *Mathematics for elementary school teachers*, Houghton Mifflin Company.

Cai, J., Sun, W. (2002). Developing Student's Proportional Reasoning : A Chinese Perspective. In B. Litwiller, G. Bright, (Eds.) *Making sense of fractions, ratios, and proportions* (pp. 195-205). Reston, Virginia. : NCTM.

Cramer, K. et al. (1993). Learning and Teaching Ratio and Proportion: *Research Implications, In D. T. Owens (Ed.), Research Ideas for the Classroom :Middle Grades Mathematics* (pp. 159-178). New York: Macmillan Publishing Company.

Freudenthal H. (1976). Five Years IOWO - On H. Freudenthal's Retirement from the Directorship of IOWO. *Educational studies in mathematics*, 7(3).

__________(1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*, D. Reidel Publishing Company.

__________(1991). *Revisiting mathematics education*, Kluwer Academic Publishers.

Grattan-Guinness, I. (1997). *The norton history of the mathematical sciences : the rainbow of mathematics*. New York: W. W. Norton & Company.

Harel, G., Behr, M., Lesh, R., Post, T. (1994). Invariance of Ratio: The Case of Children's Anticipatory Scheme Constancy of Taste, *JRME, 25*(4), 324-345.

Heath, T. L. (1956). The thirteen books of euclid's elements, 2nd Ed. Vol. 2, New York: Dover Publications, Inc

Hoffer, A. H. (1988). Ratio and proportional thinking. In T. R. Post, (Ed.), *Teaching mathematics in grades K-8* (pp. 285-313). Boston: Allyn and Bacon, Inc.

Karplus, R., et. al. (1983). Proportional Reasoning of Early Adolescents, In R. Lesh (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes*, Academic Press.

Katz, V. Z. (1993). *A history of mathematics : an introduction*. Harper Collins College Publishers.

Lamon, S. J. (1993). Ratio and Proportion : Children's Cognitive and Metacognitive Processes. In T. P. Carpenter, E. Fennema, T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers* (pp. 131-156). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Lamon, S. J. (1994). Ratio and Proportion : Cognitive Foundation in Unitizing and Norming. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 89-120), Albany, NY: Sunny Press.

Lesh, R., Post, T., Behr, M. (1988). Proportional Reasoning. In J. Hiebert, M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 93-118). Lawrence Erlbaum Associates: NCTM

Noelting, G. (1980a). The Development of Proportional Reasoning and the Ratio Concept(I), *Educational Studies in Mathematics, 11*, 219-254..

Noelting, G. (1980b). The Development of Proportional Reasoning and the Ratio Concept(II), *Educational Studies in Mathematics, 11*, 331-363.

Nunes, T., Schliemann, A. D., Carraher, D. W. (1993), *Street mathematics and school mathematics*, Cambridge University Press.

Ohlsson, S. (1988). Mathematical Meaning and Applicational Meaning in the Semantics of Fractions and Related Concepts. In J. Hiebert, M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 53-92). Lawrence Erlbaum Associates : NCTM

Piaget, J., Grize, J., Szeminska, A., & Bang, V. (1977). *Epistemology and psychology of functions*, Castellanos, F.X. Anderson, V.D .(trans.), Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Resnick, L. B., Singer, J. B. (1993). Protoquantitative Origins of Ratio Reasoning. In T. P. Carpenter, E. Fennema, T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers* (pp. 107-130). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Smith, D. E. (1925). *History of mathematics*, Vol. II., Ginn and Company.

Sylla, E. (1984). Compounding Ratios : Bradwardine, Oresme, and the First Edition of

Newton's Principia. In E. Mendelsohn, (Ed.). *Transformation and tradition in the sciences* (pp. 11-43). Cambridge: Cambridge University Press.

Thomson, P. (1994)."The Development of the Concept of Speed and its Relation to Concepts of Rate" In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 179-234), Albany, N.Y.: Sunny Press

Tourniaire, F., & Pulos, S. (1985). Proportional Reasoning : A Review of the Literature. *Educational Studies in Mathematics, 16*, 181-204.

Walle, J. A. V. (2001). *Elementary and middle school mathematics : teaching developmentally* (4th edition), Addison Wesley Longman, Inc.

A Historical, Mathematical, Psychological Analysis on Ratio Concept

Jeong, Eun Sil (Jinju National University of Education)

It is difficult for the learner to understand completely the ratio concept which forms a basis of proportional reasoning. And propor- tional reasoning is, on the one hand, the capstone of children's elementary school arithmetic and, the other hand, it is the cornerstone of all that is to follow. But school mathematics has centered on the teachings of algorithm without dealing with its essence and meaning.

The purpose of this study is to analyze the essence of ratio concept from multi-dimensional viewpoint. In addition, this study will show the direction for improvement of ratio concept.

For this purpose, I tried to analyze the historical development of ratio concept. Most mathematicians today consider ratio as fraction and, in effect, identify ratios with what mathematicians called the denominations of ratios. But Euclid did not. In line with Euclid's theory, ratio should not have been represented in the same way as fraction, and proportion should not have been represented as equation, but in line with the other's theory they might be. The two theories of ratios were running alongside each other, but the differences between them were not always clearly stated.

Ratio can be interpreted as a function of an ordered pair of numbers or magnitude values. A ratio is a numerical expression of how much there is of one quantity in

relation to another quantity. So ratio can be interpreted as a binary vector which differentiates between the absolute aspect of a vector -its size- and the comparative aspect-its slope. Analysis on ratio concept shows that its basic structure implies 'proportionality' and it is formalized through transmission from the understanding of the invariance of internal ratio to the understanding of constancy of external ratio.

In the study, a fittingness(or comparison) and a covariation were examined as the intuitive origins of proportion and proportional reasoning. These form the basis of the protoquantitative knowledge. The development of sequences of proportional reasoning was examined. The first attempts at quantifying the relationships are usually additive reasoning. Additive reasoning appears as a precursor to proportional reasoning. Preproportions are followed by logical proportions which refer to the understanding of the logical relationships between the four terms of a proportion.

Even though developmental psychologists often speak of proportional reasoning as though it were a global ability, other psychologists insist that the evolution of proportional reasoning is characterized by a gradual increase in local competence.

* key words: ratio(비), proportionality(비례성), proportional reasoning(비례적 추론), comparison (비교), covariation(공변), pre-proportional reasoning(전 비례적 추론)