대한수학교육학회지 <학교수학> 제 5 권 제 4 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.5, No.4, 477-506. Dec 2003

중학생들의 매개변수개념 분석과 교수-학습방안 탐색[1)]

이 종 희* · 김 부 미**

본 연구는 중학교 3학년 학생들이 문자와 식, 방정식, 함수에 대한 문제 해결과정에서 미지수, 변수, 매개변수로 사용되는 문자의 의미를 어떻게 이해하고 있는지를 살펴봄으로써, 매개변수로서 문자가 이해되는 과정을 분석한다. 그리고 학생들이 문제를 해결할 때 매개변수로서의 문자의 의미를 이해하면서 유연하게 변환할 수 있도록 메타인지 사고전략을 활용한 수업 설계 모형인 '자기질문에 의한 자기조정형 수업모형'을 제안한다. 분석결과, 학생들은 문제의 문맥에서 매개변수의 역할을 미지수, 변수의 역할과 비교해볼 때 매개변수는 상수를 대신하는 문자로 인식하는 경향이 강했으며, 주어진 방정식의 매개변수였던 문자는 구문론적 조작을 거치면서 변수나 미지수의 역할로 변환하는 경우에 그 의미와 역할을 불확실하게 이해하고 있었다. 그리고, 문맥상 매개변수의 의미를 파악하여 생각하기보다는 문맥의 전후관계를 살피지 않고 연산과 기호조작을 이용하여 파악하는 경향이 강했으며, 직선의 그래프로 제시했을 때 학생들은 매개변수의 의미를 좌표평면 상에서 직선의 위치를 결정하는 요소로서 해석하는 능력이 부족하였다.

I. 서론

학교 대수에서 다루어지는 문자는 주로 일반화된 수, 미지수, 변수 등으로 사용된다. 특히, 대수 영역에서는 문자의 재배열 및 연산, 산술의 규칙을 표현하기 위한 문자사용, 문제 해결을 위한 미지수로서의 문자사용, 주어진 양의 관계를 나타내는 변수로서의 문자사용은 근원이 되는 활동이며, 다양한 대수식들을 파악하기 위해 사용되는 문자들은 수학적 다양성의 원리를 이해하고 가르치는 방법의 기초로서 강조되고 있다. 일반적으로, 문자는 Usiskin(1988), Schoenfeld & Arcavi(1988), Kieran(1989), Lee (1996), 김남희(1997), Ursini & Trigueros(2001) 등의 많은 연구들에서 서로 약간씩 다른 목적으로 사용되고 있지만, 공통적으로 미지수로서의 문자, 일반화된 수로서의 문자, 어떤 양 사이의 함수적 관계에 있는 변수로서의 문자로 분류되며, 각각의 기능을 하는 문자를 효과적으로 교수·학습할 수 있도록 다양한 방법이 제시되고 있다.

그러나, 학교 대수에서 어떤 문자는 미지수나 변수와 상호 작용하지만, 미지수나 변수와는 다르게 구별될 때가 있다. 예를 들어, " x에 대한 일차 방정식 $m(x-5)=m+2x$의 해가 없을 조건은 무엇인가?"라는 문제를 풀 때, x를 미지수로 하면서 $(m-2)x=6m$과 같은 동치인

* 이화여자대학교(jonghee@ewha.ac.kr),
** 구월여자중학교(bumi71@ewha.ac.kr)
1) 이 논문은 한국 학술진흥재단의 지원(KRF-2002-030-B00051)에 의하여 이루어진 연구임.

방정식을 유도하는 과정에서 m이라는 문자는 미지수로 사용된 것이 아니다. 그리고, "(2,5)를 지나고 기울기가 3인 직선의 방정식을 구하라"는 문제를 풀기 위해 학생들은 방정식 $y=ax+b$를 쓰는 것으로 시작하는데, 이 때 사용되는 문자 a, b는 변수 x, y와는 다르게 사용된다. 이처럼 학교 대수에서는 문제를 풀 때 문맥과 쓰임에 따라 파악해야 할 문자가 있다. 즉, 매개변수로서의 문자의 사용이다. 이처럼 매개변수가 학교 수학 곳곳에서 사용되고 있지만, Bloedy-Vinner(1994, 2001), Furinghetti & Paolo(1994), Bills(2001) 등에 의하면, 학생들은 이러한 문제들을 해결하기 위해서 매개변수를 사용하면서도 미지수, 변수 등과 구분하는 것을 어려워한다고 한다.

현재 시행되고 있는 7차 교육과정에서는 문자로 된 식이 7학년 과정의 '문자와 식'단원에서 처음부터 바로 도입되며, 연산할 때 곱셈기호를 생략하는 방법 등을 통해 대수식을 단순화하는 방법으로 학습된다. 그 뒤, 등식의 성질을 이용한 방정식의 풀이가 주된 학습 내용을 이루고 있으며, 학생들은 이 때 미지수로서의 문자 개념을 학습한다. 변수 개념은 방정식단원을 배운 뒤, '규칙성과 함수'단원에서 다루어진다. 매개변수 개념은 일차방정식과 일차함수의 정의를 내리는 과정에서 $ax+by+c=0$, $y=ax+b$와 같은 형식으로 접하게되며, 연산규칙을 사용한 문자의 조작을 연습할 때 주로 다루어진다. 이와 같이, 학교 대수에서는 문자를 사용한 기호적 표현에 대한 학습을 먼저 행한 뒤, 이를 이용한 방정식의 조작 및 풀이 능력, 관계를 기호적으로 표현하는 함수 학습을 중요시하고 있다. 이 때, 학생들은 문자를 학습할 때 그 의미대신 형식적인 규칙의 학습에 집중함으로써 문자의 기호적 표현과 의미 사이의 관계를 정확하게 파악하지 못할 수 있으며, 이로 인해 자신이 사용한 문자가 미지수인지, 변수인지, 매개변수인지를 구별하지 못할 수 있다. 또한, 매개변수로서의 문자의 역할은 문제상황과 문맥의 전후 관계에 의존하기 때문에 문제 풀이 과정 중 몇 차례 바뀌게 되는데, 학생들은 이를 인식하지 않은 채 문제를 풀기 위한 기술적인 조작 능력만을 습득할 수도 있다.

따라서, 학생들이 문자와 식, 방정식과 함수단원에서 제시되는 매개변수를 포함한 문제들을 성공적으로 해결하고 문제 해결 과정에서 문자의 의미를 파악할 수 있도록 하기 위해서, 미지수, 변수, 매개변수로 쓰이는 문자들을 구분하고 이들 사이를 유연하게 변환할 수 있도록 돕는 교수-학습 방법에 대한 연구가 필요하다. 이에 본 연구에서는 고등학생에 비해 비교적 매개변수에 대한 학습 경험이 적은 중학교 3학년생들을 대상으로, 문자와 식, 방정식, 함수 문제 해결과정에서 문맥과 쓰임에 따라 다르게 사용되는 문자의 의미를 어떻게 이해하는지를 살펴보고, 이를 바탕으로 매개변수로서 문자가 이해되는 과정을 분석해보고자 한다. 그리고, 이 과정에서 학생들이 매개변수로서의 문자를 유연하게 그 의미를 변환하며 적절하게 사용하도록 도울 수 있는 사고전략과 이를 지도하기 위한 수업 모형을 탐색해보려고 한다. 본 연구의 연구문제는 다음과 같다.

1. 문자와 식, 방정식, 함수 단원의 문제를 풀 때, 학생들의 매개변수 개념을 이해하는 실제는 어떠한가?
(1)학생들은 문제의 문맥에서 문자의 매개변수로서의 역할을 미지수, 변수의 역할과 비교하여 어떻게 파악하는가?

(2)학생들의 매개변수에 대한 선개념[2)]은 무엇이며, 매개변수의 표현 양상은 어떠한가?
(3)그래프를 사용하여 기울기, y절편과 같은 기하적 의미를 갖는 매개변수 개념을 제 시할 때, 학생들은 매개변수로 사용된 문자를 어떻게 해석하는가?
2. 중학생들이 매개변수로서의 문자를 의미 있고 유연하게 사용하도록 안내하는 사고전략을 활용한 수업 모형은 어떠해야 하는가?

II. 이론적 배경

1. 매개변수

학교 수학에서 문자는 Kuchemann(1988)의 분류처럼 주로 문자를 수치화 하는 경우, 문자를 사용하지 않고 □나 ○와 같은 상징을 사용하는 경우, 문자를 어떤 대상으로 사용하는 경우, 문자를 특정 미지수로 사용하는 경우, 문자를 일반화된 수로 여기는 경우, 문자를 변수로 보는 경우로서 사용된다(김남희, 1997, 재인용). 특히, 이 중 일반화된 수로서의 문자는 하나 이상의 값을 가지는 경우로 '$a+b=b+a$'와 같이 패턴을 나타내는 것으로 보며, 변수로서의 문자는 $y=-2x^2+3x+1$과 같이 체계적인 관계를 구성할 때 사용되는 문자이다. 이처럼, 대수식에서 사용되는 문자는 서로 다른 의미가 부여되는데, 학생들은 대수식에서 문맥의 전후 관계와 적용되는 상황에 따라 매개변수로서의 문자를 다양하게 사용한다.

예를 들어, $y=ax+b$, $ax^2+bx+c=0$과 같은 대수식에서 변수 x, y와는 달리, a, b, c라는 매개변수를 특별한 언급이 없이 상수 대신으로 사용한다.

또한 이차식 $k(k-1)x^2+2(k+3)x+2$ 또는 부등식 $kx>0$에서 각각을 k에 대한 이차식, k에 대한 일차부등식으로 기술하는 것도 수학적으로는 옳지만, 관습적인 규약과 친숙함 때문에 각각을 매개변수 k를 포함하는 x에 대한 이차식과 일차부등식으로 파악한다. 이밖에도, 곡선이나 곡면 등을 $x=\sin\theta$, $y=\cos\theta$와 같은 삼각함수표현을 사용하여 매개변수로 표현이 가능하다.

이상에서 제시된 매개변수의 다양한 사용을 Freudenthal(1983)의 관점에서 해석한다면 매개변수는 잠재적인 이차적 독립변수로 볼 수 있다. Freudenthal은 $f_a(x)=x+a$를 매개변수 a에 의해서 얻는 것처럼, 매개변수를 필요할 때만 깨워서 고려할 수 있는 잠자는 이차적인 독립변수로 보았다. 이 때 함수 f_a는 매개변수 a에 좌우되므로 그 자체가 종속 변수와 같은 역할을 한다. 또한, $y^2=4px$의 p와 같이 도형의 구조를 결정할 때 발생적인 면에서 매개변수 p는 외형상 독립변수이나 기원상 종속변수로 보았다(우정호, 1998, 재인용).

'매개변수는 변수 개념과 미지수 개념과 차이가 있으나 모호하게 유추되는 문자로 개념이 잘 잡히지 않는다'는 Hanna의 말에서 알 수 있듯이(Furinghetti & Paola, 1994, 재인용), 매개변수로서의 문자는 변수나 미지수와 상호작용하지만 대수식의 문맥과 적용될 상황에 따라 미지수, 변수와 구별된다. 또한, 매개변수 개념을 이해하기 위해서는 구문론적 측면에서 문자의 조작을 이해하는 동시에 의미론적 측면에서 그 문자의 의미 변환을 이해해야 한다. 이처럼 미

2) Ausubel 등은 학생들이 학습에 들어가기 이전부터 이미 각각의 경험을 통해 학습과 관련된 개념을 가지고 있는데 이러한 개념을 선개념(preconception)이라 하였다. 예를 들면, 학생들이 실제 교과서에서 제시된 정의를 이해하기 전에, 용어 자체의 뜻만을 생각하고 가지고 있던 개념이 선개념이다(최승현, 1999).

지수, 변수와는 달리 이중성을 띄고 있는 매개변수에 대한 사전적 정의는 다음과 같다.

'한국 브리태니커 온라인 사전'의 정의[3)]
수학의 변수 가운데 하나. 가능한 범위 안에서 그 값이 달라지는 변수에 따라 문제는 여러 경우를 나타내게 된다. 매개변수로 표현된 방정식을 매개변수방정식이라 한다. 기울기와 절편으로 표현된 직선 방정식의 일반형인 y=mx+b는 m과 b가 매개변수인 매개변수 방정식의 한 예이다. 기울기 m=2와 y 절편 b=3이 매개변수에 주어질 때 생기는 식 y=2x+3은 더 이상 매개변수방정식이 아니고 특수한 직선의 방정식이다.

'두산세계대백과 EnCyber'의 정의[4)]
파라미터 또는 보조변수(補助變數)라고도 한다. 즉, x=f(t), y=g(t)가 모두 t의 같은 변역에서의 함수이면, t의 어떤 값에 대하여 정해지는 x의 값에, 같은 t의 값에 대하여 정해지는 y의 값을 대응시키면, x에서 y로의 대응이 정해져서 y는 x의 함수로 생각할 수 있다. 이와 같은 경우, 실제로는 x=f(t), y=g(t)에서 t를 소거한 식을 만들면 되며, t를 매개로 하여 x와 y의 함수관계가 정해진다. 이 t를 매개변수라고 한다. 기하학적으로는 t의 값에 따라 점 (x, y)가 정해지므로, 일반적으로 점 (x, y)는 한 곡선을 그리게 된다. 이를테면, x=cos t, y=sin t 또는 $x=\frac{1+t^2}{1-t^2}$, $y=\frac{2t}{1-t^2}$ 와 같은 식에서 매개변수 t를 소거하면 $x^2+y^2-1=0$이라는 방정식을 얻게 되고, 이들은 단위원(單位圓:원점을 중심으로 하는 반지름이 1인 원)의 매개변수 표시가 된다. 또, 공간의 단위구면(單位球面) $x^2+y^2+z^2-1=0$에 대해서도 두 매개변수 u, v를 써서, x=sin u cos v, y=sin u sin v, z=cos u로 표시할 수가 있다.

위의 두 사전적 정의에서 나타난 매개변수는 설명 방식에서 약간의 차이는 있지만, 모두 이차적 관계를 설정해주는 변수로서 매개변수를 정의하고 있다. 매개변수가 들어 있는 방정식이나 함수는 방정식족 또는 함수족을 나타내는데, 매개변수에 수를 대입함으로써 특정한 방정식 또는 함수가 된다. 이 때, 매개변수 외의 다른 문자들은 변수나 미지수로 가정된다. 이처럼 매개변수가 포함된 방정식이나 함수는 이차적(second order) 관계의 함수이고, 매개변수는 함수에서 독립변수(argument)이며 매개변수가 변함에 따라 그에 상응하는 방정식 또는 함수가 결정된다. 동시에, 특정한 매개변수 값에 대응하는 각 방정식과 함수에서는 다른 문자들이 미지수이고 변수인 반면 그 매개변수는 상수이다. 이러한 수학적 정의는 매개변수가 변화하는 속성에도 불구하고 상수처럼 느껴지는 이유를 설명해준다. 예를 들어 '직선의 방정식 $y=b$는 직선의 방정식 $y=ax+b$의 특수한 경우인가?'(Bloedy-Vinner,1994)라는 질문을 생각해 보면, 전후 문맥으로 주어진 식들이 직선의 방정식이라는 것을 알고 a, b가 매개변수이며 x, y가 변수라는 것을 추리해 낼 수 있다. 그리고 특정한 방정식을 얻기 위해서는 특정한 a, b의 대입이 필요한 이차적 관계라는 것을 알 수 있다. 또한 직선의 방정식 $y=b$는 $a=0$의 경우에 의해 생기는 것이지, $x=0$의 경우에 의해 생기는 것이 아니기 때문에, x-대입이 적절하지 않다는 것을 알 수 있다.

이처럼 매개변수와 미지수, 변수의 역할을 구분할 때, 이차적 단계의 함수라는 한정사가 내포된 역동적인 개념을 적용한 Bloedy-Vinner (2001)에 따르면, $m(x-5)=m+2x$라는 매개변수 m을 가진 방정식은 다음과 같이 단계적인

3) http://preview.britannica. co.kr/bol/ topic.asp? article_id =b07m1776a, "매개변수" 한국 브리태니커 온라인 사전에서 인용.

4) http://100.naver.com/100.php?id=60408&cid=AD1057742420807&adflag=1, '두산세계대백과사전 Encyber'에서 인용.

양화 구조로 분석될 수 있다.

(a1) 모든 m에 대하여 방정식 E가 존재하며, 그 결과로 방정식 E는 상수 m과 미지수 x를 가진 방정식이 되고 m-대입에 의한 양화로 인하여 방정식 E안에서 m은 상수가 된다. 또한 이러한 문장에서 존재한정사는 이차 구조를 가진다. 즉, 수를 양화하는 것이 아니라 방정식을 양화한 것이다.

(a2) 미지수 x는 방정식 E에서 m-대입에 의해 양화된다. 즉, m을 양화하여 방정식을 얻고 그런 다음 x를 양화하는 것이다.

이상에서 살펴본 바에 의하면, 매개변수를 가진 방정식이나 함수의 특징은 역동적이고 순서화된 양화 구조로 형식화될 수 있다. 따라서, 매개변수를 가진 방정식과 함수를 다루기 위해서는 매개변수와 미지수, 변수 사이의 역할을 구분 짓는 대입과정을 이해하고 그 관계를 해석하며, 특정한 양에 대한 수뿐만 아니라 동시에 수 전체에 대한 사고를 할 수 있어야 한다.

2. 학교 수학에서의 매개변수에 대한 연구

실제 학교 수학에서 문자는 미지수와 변수로 주로 사용되며, 매개변수는 대수식에서 상수의 역할을 하는 문자로 제한적으로 표현된다. 그러나, 학교 수학에서 매개변수가 미지수, 변수와 구별될 수 있다는 관점에서 행해진 연구가 최근 들어 진행되고 있다.

Bloedy-Vinner(1994)는 1주일에 3-5시간의 수업시간동안 틈틈이 한정사와 관련된 대수를 배운 82명의 학생들을 대상으로 매개변수 개념에 대한 양화 구조[5]의 인식 여부를 조사하였다. 먼저 직선의 방정식 $ax+by=c$는 무수히 많은 직선을 인식할 수 있는지를 조사하였는데, "모든 a,b,c에 대하여 x,y에 대한 방정식이 존재한다"고 매개변수 개념을 설명한 학생들은 전체 학생수의 54%이었다. 그리고, 직선의 방정식 $y=b$는 직선의 방정식 $y=ax+b$의 특수한 경우인지를 질문하자, 전체 학생들의 40%가 '모든 a,b에 대하여 방정식이 존재하고 $a=0$일 때 방정식 $y=b$가 존재한다'는 정답을 말하였다. 그러나, 어떤 수 A가 주어질 때, (A-3)(B-2)=1을 만족시키는 수 B를 항상 찾을 수 있는지를 질문하자 "A≠3인 모든 A에 대하여 방정식 E(B)가 존재하고 B=$\frac{1}{A-3}+2$라는 해를 얻는다"라고 정답을 말한 학생들은 전체의 16%에 불과하였다. Bloedy-Vinner는 이러한 연구결과를 바탕으로 매개변수 개념은 피할 수 없는 양화 구조를 가지고 있으며, '모든', '존재한다'와 같은 한정사를 사용한 양화 구조로 매개변수를 교수함으로써, 학생들이 매개변수로서 문자를 사용할 때 그 의미에 주의를 기울이도록 할 수 있다고 주장하였다.

Furinghetti & Paolo(1994)에 의하면 16~17세 학생들 199명에게 매개변수를 포함한 문제들로 구성된 과제를 풀도록 한 결과, 학생들은 미지수를 하나의 숫자, 변수를 수의 집합, 매개변수를 고정된 점이나 수와 같은 역할을 하는 문자라고 인식하였다. 이 과정에서 학생들 대부분은 문자가 각 역할에 따라 개념적인 이해와 더불어 구문론적 조작도 수행해야 하므로 미지수, 변수, 매개변수 사이의 차이를 이해하는 것을 어려워하며, 특히 매개변수는 문맥에 의존적이고 암묵적인 형태로 그 의미를 이해하기 때문에 더욱 어려워하는 경향이 있다고 한다.

미지수, 변수, 매개변수의 역할 사이의 이동에 대한 연구를 살펴보면, Bills(2001)는 학생들이 문제 해결 과정에서 사용한 문자의 역할을

5) II.이론적 배경의 1.매개변수에서 설명함

이해하는 과정을 중심으로 연구하였으며, 김성준 외(2002)는 우리나라 교과서의 문제 분석을 통하여 매개변수의 역할 이동을 고찰하였다. 특히, Bills(2001)는 문제 해결 과정에서 미지수, 변수, 매개변수로서 사용된 문자의 역할이 변화할 때, 학생들은 변수에서 구해야 할 미지수로의 역할이동, 매개변수에서 구해야 할 미지수로의 역할이동, 주어진 미지수에서 변수로의 역할이동을 인식할 수 있다고 보고하였다. 각각의 이동을 구체적으로 살펴보면, 첫째, 변수에서 구해야 될 미지수로 이동의 경우, 학생들은 문자를 다른 양과의 관계를 더 중시할 때는 변수로서, 특정한 값을 구할 수 있을 때는 미지수로서 인식하였으며, 이 때 매개변수는 수를 대신하는 것으로 생각하는 경향이 있었다. 예를 들어, 직선 $x+2y-4=0$과 직선 $y=2x-2a+b$가 만나는 점의 좌표를 찾으라는 문제에서, 학생들은 처음에는 x와 y를 서로의 관계에서 중요한 변수로써 인식하여 각각을 어떤 실수 값으로 받아들였으나, 만나는 점(x, y)를 방정식의 해로 보기 시작하자 변수 x, y는 미지수로, 매개변수 a, b는 상수로 인식하였다. 둘째, 매개변수에서 구해야 할 미지수로의 역할이동의 경우, $y=mx+c$에서 매개변수 m과 c는 특별한 문맥에서는 구해야 할 미지수로 역할을 바꾼다. 예를 들어, '점 (2, 8)을 지나면서 기울기가 3인 직선의 방정식은 무엇인가?'라는 문제에 답할 때, 학생들은 m에 3을 대입하여 식 $y=3x+c$를 만들고 식에 x=2, y=8을 대입한다. 이 때, c는 y절편의 의미를 갖는 매개변수에서 구해야 할 미지수로 역할이 변화한다. 셋째, 주어진 미지수에서 변수로의 역할이동은 자취 문제에서 원래 상수로 생각되어졌던 양이 변화할 때 발생한다. '좌표가 (a, b)인 점 P는 x축과 점 (3, 2)와 같은 거리에 있다. a와 b를 연결하는 관계식을 구하라'라는 문제를 풀 때, 학생들은 $|b|=\sqrt{(a-3)^2+(b-2)^2}$라는 방정식을 세워 a, b를 미지수로 인식한다. 그러나, 해가 포물선을 의미하는 a와 b 사이의 관계식으로 구해지자 학생들은 미지수로 인식하였던 문자 a, b를 변수로 보았다.

이상에서 살펴본 선행 연구에 의하면, 학생들이 매개변수를 미지수와 변수와 구분하여 이해하고 주어진 문제를 잘 해결할 수 있도록, 학생들의 문자의 의미를 이해하고 변화시켜 나가는 실제 과정을 분석할 필요가 있다. 이러한 연구는 다양한 역할을 하는 문자 개념을 학생들이 적절하게 사용함으로써 문제를 기계적으로 해결하는 것이 아니라, 문제 속에서 문맥의 전후 관계를 살피면서 문자의 의미를 이해하고 수학적으로 유의미하게 학습하도록 도울 수 있는 문자의 교수-학습 방법을 제안하는 데 바탕이 될 것이다.

3. 수업 모형을 개발하기 위한 메타인지 사고 고찰

앞서 살펴본 여러 연구들에 의하면, 학생들은 문자를 학습할 때 그 의미와 역할의 이동을 파악하는 것보다 기술적인 조작 능력의 학습에 주목함으로써 문자의 기호적 표현과 의미 사이의 관계를 정확하게 파악하지 못하고, 자신이 문제를 해결하기 위해 사용하고 있는 문자가 미지수, 변수, 매개변수 중 어느 역할을 하는지를 잘 구별하지 못하고 있다. 따라서 학생들이 문자와 식, 방정식과 함수 단원의 문제를 풀 때 미지수, 변수, 매개변수로서의 문자의 의미를 파악하는 것과 동시에 기술적인 조작도

유연하게 할 수 있도록, 학생들 스스로 자신의 문제를 푸는 과정에서 행한 사고전략을 검토하고 수정·보완하도록 지도해야 할 것이다. 이러한 맥락에서 메타인지 사고를 고찰하고자 한다.

사고란 내적인 과정이며 정신적 활동으로, 김영채(1998)는 사고를 인지조작(cognitive operation), 메타인지, 내용 지식 및 사고 태도 등의 요소로 이루어진 총체적인 정신적 과정으로 정의한다. 이 때, 인지조작은 경험으로부터 의미를 부여·생성하기 위해서 사용하는 정신적 활동으로 이루어지며, 메타인지는 인지조작들을 지시하고 통제하는 조작들로 이루어진다. 또한 인지조작의 구성요소 중 하나인 사고전략(thinking strategies)은 의사결정이나 문제해결과 같이 여러 가지 개별의 사고기능들이 작용하여 수행되는 계획적이고 복합적인 것이라고 정의한다. 이 때, 사고기능(thinking skills)은 관찰, 분류, 비교, 가설 형성, 설명, 예측과 같이 보다 개별적이고 구체적인 것을 말한다. 마치 테니스가 서브, 드라이브, 발리와 같은 구체적인 기능들로 이루어진 것처럼, 사고도 각 개별적인 기능을 습득한 뒤 목적에 맞게 구체적인 기능들을 통합하여 전체적인 전략을 세우고 수행해 나가는 것이다.

메타인지 사고는 흔히 '사고에 대한 사고'로 오케스트라의 지휘자에 비유된다. 즉, 여러 가지 사고기능과 전략들의 수행을 관리하고 지시하며 통제하는 사고이다. Brown, Bransford, Ferara & Campione(1983)에 의하면, 메타인지 활동은 계획(planning), 관리(monitoring), 평가(assessing)의 세 가지 일반적인 과정으로 구성된다고 한다. 메타인지의 핵심적인 내용 중 계획은 목표를 세우고 이를 진술하며 수행할 조작을 선택하고 그 조작들을 시퀀스화 하여 결과를 예측하는 것이다. 관리는 과제를 수행해 갈 때 목표를 마음에 간직하고 시퀀스에서 현재의 위치를 체크하며 하위목표가 달성되었음을 알고 언제 다음의 조작으로 넘어갈 것인지를 아는 것, 오류나 장애를 찾아내는 것과 그것으로부터 빠져나가는 방법을 아는 것을 말한다. 평가는 자기조정이라고 부를 수 있으며 반성적인 측면을 많이 가지고 있는데, 그 내용은 목표 성취 여부나 성취 정도를 평가하고 결과의 정확성과 적절성을 판단하며 사용했던 절차가 적당한지를 평가하는 것으로서 장애나 오류를 제대로 다루었는지 그리고 계획과 실제 수행의 효율성을 판단하는 활동을 말한다.

사고과정을 전체적으로 볼 수 있게 하는 메타인지 사고의 적용 단계를 살펴보면, 김영채(1998)는 메타인지 사고는 정신적 준비, 효과적인 수행의 준거, 전이 그리고 반성의 4단계로 이루어진다고 말한다. 단계 1의 정신적 준비는 과제에 대한 정신적 이미지를 형성하며 특히 과제에서 주목해야 할 필요가 있는 핵심적인 사항이나 국면을 떠올림으로써 과제를 실제로 시작하기 전에 효과적인 정신적 상태를 준비하는데 그 목적이 있다. 단계 2의 효과적인 수행의 준거는 사고과제를 수행해 갈 때 과제의 목적을 확인하고 각 단계에서 효과적으로 수행할 수 있게 하는 기준을 인식하여 수행 중 일어날 수 있는 문제나 약점 등을 주목하고 조정해 가도록 돕는 단계이다. 이 단계의 목적은 과제의 각 단계를 '대충', '얼른얼른' 끝내버리는 것이 아니라 '사려 깊고, 철저하게 그리고 잘' 수행해 가도록 도와주는 데 있다. 단계 3의 전이는 사고과제를 완성한 후 메타인지를 수행하는 것으로, 과제를 수행함으로서 얻을 수 있었던 경험이 사장되지 않고 다른 것에 적용될 수 있도록 의도적인 노력을 기울이는 것이다. 즉, 과제 수행 때 활용했던 과정을 다른 맥락에서 다시 활용할 수 있는지, 사용하였던 내용 지식이 다

른 과제와 관계가 있는지, 일반화가 가능한지를 생각해보는 것이다. 단계 4의 반성은 현재의 수행을 반성적으로 평가해 보고, 앞으로 있을 비슷한 과제에서의 수행을 향상시키기 위하여 사고과정을 평가해보고 잘 안되던 부분에 대한 전략의 내용을 확인하고 스스로의 개선방법을 찾는 단계를 말한다.

Flavell(1987), Kluwe(1987), 김영채(1998), Koutselini & Hadjiyianni(1999) 등에 의한 많은 연구들을 살펴보면, 메타인지 사고를 개발하는 방법은 세 가지로 정리할 수 있다.

첫째, 메타인지 사고를 할 수 있도록 학생 자신의 사고과정을 그림을 그리듯이 내려다보고 조정할 수 있도록 하는 구체적인 질문을 자주 한다. 구체적으로 보면, 학생이 수업에서 요구하는 과제를 해결하기 위해 어떤 사고과정을 사용하였는가, 목적은 분명했는가, 어떻게 수행하였으며 이 때, 어떤 전략을 사용하였는가, 어디에 초점을 두었고 다음에는 어떻게 할 것인가, 이러한 사고의 장점과 어려웠던 점은 무엇인가, 효과성과 다른 것에 적용할 수 있는가 등을 자각하고 자기관리를 할 수 있게 주목토록 하는 용어와 질문을 자주 사용한다.

둘째, 학생 자신의 사고과정에 주목하게 한다. 과제를 수행할 때 메타인지 전략의 요령을 계속 연습함으로써 자동화 수준에 도달하여 의식적인 노력 없이도 과제의 요구에 따라 아는 전략을 저절로 사용할 수 있어야 한다. 앞에서 서술한 메타인지 사고의 단계들을 가능한 대로 순환적으로 온전하게 사용하는 것이 좋으며 특히 반성적인 자기조정을 강조하면 효과적이다. 이 때, 자기조정은 학습자가 문제를 해결할 때 자신의 사고과정을 의식적으로 자각하고 계획적이고 효과적으로 통제하면서 조정하는 것을 말한다.

셋째, 학생이 자율적으로 행할 수 있도록 한다. 메타인지 사고 요령을 지도하는 목적은 학생이 자기의 사고과정을 관리, 평가, 안내해 가도록 가르치는데 있으므로, 학생들 스스로 생각하고 행하는 것이 중요하다. 보다 구체적으로, 학생들이 핵심 아이디어를 찾아내면서 현재의 과제에 적절한 준거는 무엇이며 수업에서 배우는 내용 지식에 대한 이해와 전이, 그리고 반성을 어떻게 해야 할 것인지에 대한 아이디어를 실습해 보고, 과제 수행 후에 이를 앞서 말한 단계에 따라 서술해 보는 것이 효과적이다.

III. 연구 방법

본 연구는 중학생들이 매개변수 개념을 어떻게 이해하고 있는지를 조사하고 효과적인 지도 방법을 모색하기 위해 인천의 G여중 3학년 학생 115명을 대상으로 Furinghetti& Paolo(1994)가 사용한 설문지를 우리나라의 교육과정에 맞도록 번안·수정하여 질문지 검사를 45분 동안 실시하였다. 그리고 수학 성취도가 상, 중, 하 수준의 학생 5명을 대상으로 질적 연구 방법의 심층적 인터뷰를 각각 1시간씩 병행하여 실시하였다. 중학교 3학년 학생들은 이미 문자와 식, 일차·이차 방정식단원, 일차·이차 함수단원을 학습하였으므로 미지수, 매개변수, 변수를 다룬 경험이 있으며, 심층 기술을 위한 인터뷰를 실시한 5명의 학생들은 1학기말 고사 성적(학년 평균:69.15점)을 기준으로 각 수준별로 자원한 학생들 중 2명씩 선발하였다. 상수준의 학생들은 90점이상의 자원한 학생 중 100점, 96점인 학생 2명으로 각각 J와 H로 표기할 것이며, 두 학생 모두 교내 수학 경시 대회에서 입상한 학생으로 수학적 성취도와 태도 모두

매우 긍정적인 학생이다. 중수준의 학생들은 70점대의 자원한 학생들 중 수학에 대한 자신감이나 흥미, 태도가 보통 수준으로 비슷하고 성적도 72점으로 같은 학생 2명을 선발하였으며 E와 M으로 표기할 것이다. 하수준의 학생은 50점이하의 학생들 중 수학적 태도가 긍정적인 2명의 자원자를 뽑았으나, 44점을 받은 학생이 인터뷰 도중 포기하였기 때문에, 48점을 받은 학생 Y만을 인터뷰하였다.

연구문제 1의 매개변수 개념에 대한 학생들의 이해의 실제를 파악하기 위해 질문지 검사를 실시하였는데, 질문지의 문항은 모두 9개이다. 각 문항은 학교 대수에서 주로 제시되는 형태의 매개변수를 포함한 문제에 대하여 미지수, 변수 개념과의 구분 능력, 매개변수에 대한 선개념, 대수식과 그래프로 제시하였을 때 매개변수 개념에 대한 표현과 해석 능력 중 어떤 이해 상황을 조사하려는 의도인지에 따라 3개 영역으로 나누어 아래의 <표Ⅲ-1>과 같이 구성하였다. 이 때, 학생들에게는 매개변수에 개념의 이해 정도를 조사하기 위한 각 문항의 해당 영역과 질문 의도를 밝히지 않았다.

또한 질문지의 각 문항에 대한 답은 3점-척도로 제시하여, 자신이 선택한 답이 정답이라고 확신하는 정도에 따라 스스로 점수를 부여하고 선개념을 알아보는 문항 5를 제외한 모든 문항은 그렇게 선택한 이유를 쓰도록 하였으며 문항의 정답은 1개 이상인 경우도 제시하였다. Furinghetti& Paolo(1994)에 의하면, 3점-척도를 이용하여 답의 확신정도를 타나나도록 하는 방법은 실제로 학생들이 이해하고 있는 관념과 어려워하는 관념 또는 관련된 선개념, 개념 이미지 등을 측정할 수 있기 때문에 학생들의 사고과정 속에 숨어있는 관념이 어떻게 존재하는지를 살펴볼 수 있다고 한다.

문항에 대한 답안 선택의 3점 척도는 다음의 <표 Ⅲ-2>와 같다.

질문지의 각 문항 당 점수는 학생들이 각각 선택한 3점-척도의 점수들의 총합으로 계산한 후, 백분율로 환산하여 문항의 질문 목적에 비추어 학생들의 실제적인 이해 경향을 보다 쉽게 알아보았다. 그리고 필요한 경우, 한 문항에서 학생들이 선택한 각각의 답안에 대한 확신 정도를 백분율로 제시하였다.

인터뷰 방법은 심층적 기술을 위해 반-구조화된 인터뷰(semi-structured interview)[6]를 실시

<표 Ⅲ-1> 질문지의 문항 구성

영역구분	측정 내용	관련문항번호
I	문제 내의 다른 변수와 독립적인 매개변수 개념을 파악하는 정도 : 미지수, 매개변수, 변수의 역할의 인식	1, 2, 3, 4
II	매개변수에 대한 선개념과 매개변수 관념의 표현 양상	5, 6
III	그래프로 제시하였을 때 매개변수인 문자에 대한 해석 능력	7, 8, 9

<표 Ⅲ-2> 3점-척도 선택 기준

3점-척도	선택 기준
1 점	자신이 선택한 답이 정답이라고 확신하는 정도가 약하다.
2 점	자신이 선택한 답이 정답이라고 확신하는 정도가 보통이다.
3 점	자신이 선택한 답이 정답이라고 확신하는 정도가 강하다.

6) Fontana & Frey(1998)에 의하면, 반구조화된 인터뷰는 구조화된 인터뷰와 구조화되지 않은 인터뷰의 중간 형태로 면담자에게 이전에 설계된 일련의 질문들을 묻고 반응을 기록하되, 연구자와 면담자 사이에 질문 또는 주제에 대한 상호작용을 허락하여 면담자의 행동을 이해하려고 시도하는 인터뷰이다.

하면서 이를 녹화하여 회고적 분석7)방법으로 분석하였다. 인터뷰 문항은 질문지 검사에서 사용한 문항들을 그대로 사용하였으며, 학생들에게 질문지 검사를 할 때 어떻게 그런 생각을 하였는지를 묻고 학생들이 선택한 답을 보다 심도 있게 분석하였다. 이 때, 학생들에게 자신이 풀어서 제출한 질문지를 보여 주었으며, 학생이 질문지의 문항을 다시 풀어 보는 것을 희망할 때는 다른 종이에 풀어보도록 하였다.

연구문제 2에서 중학생들이 매개변수로서의 문자를 의미 있고 유연하게 사용하도록 지도하기 위한 수업 모형을 제안하고자, 먼저 질문지 검사 결과와 인터뷰 결과를 바탕으로 메타인지 활동의 관리와 반성의 측면에서 이론적 배경에서 살펴본 김영채의 메타인지 사고전략 적용단계를 바탕으로 문자 학습을 위한 구체적인 4단계 사고과정을 도출하였다. 이 때, 앞서 살펴본 메타인지 사고의 개발 방법을 준거로 하여 문제해결 과정에서 매개변수로 사용된 문자를 미지수, 변수와 구별하고 그 의미의 변환을 돕는 '자기질문 리스트'를 개발하였다. 자기질문(monitoring working question)이란 이해 과정을 스스로 모니터링하면서 자문 자답하는 질문이다. 자기질문 리스트를 만든 후, 이를 활용하여 학생 개개인이 어떤 구체적인 사고전략을 어떻게 수행하고 있는지를 교사가 관찰할 수 있도록, 김영채(1998)의 일반적인 사고행동 관찰지를 수정하여 사고행동 관찰 체크리스트를 만들었다. 그런 다음, 자기질문 리스트와 교사의 사고행동 관찰 체크리스트를 활용할 수 있는 '자기질문에 의한 자기조정형 수업모형'을 제작하였다.

제작 후 인터뷰했던 학생들을 대상으로 질문지 문항을 I영역과 II, III영역으로 나누어 2차시 동안 사례 연구를 실시하여 '자기질문에 의한 자기조정형 수업모형'을 실제 수업에 적용할 수 있는 지를 알아보았다.

IV. 연구 결과

1. 매개변수 개념에 대한 학생들의 이해

학생들이 매개변수를 실제로 어떻게 이해하고 사용하는지를 조사한 결과, 학생들은 매개변수는 미지수, 변수와 비교하여 상수를 대신하는 역할을 하고, 주어진 문제에서 처음에는 매개변수였던 문자가 식의 조작을 거치면서 변수나 미지수의 역할로 변환될 때, 매개변수의 의미와 역할을 불명료하게 파악하고 있었다. 그리고, 문맥의 전후관계를 살펴서 매개변수의 의미를 파악하지 않고 연산과 기호조작을 이용하여 판단하는 경향이 강하였다. 또한 그래프로 제시된 직선을 보고 매개변수의 의미를 좌표평면 상에서 위치를 결정하는 요소로서 해석하는 능력이 부족하였다.

본 연구의 결과를 질문지의 각 영역별 문항에 따라 보다 자세하게 분석한 내용은 다음과 같다. 이 때 문항5와 문항6을 제외한 각 문항의 정답은 제시된 선택지에 음영으로 표시한다.

I영역: 문제 내의 다른 변수와 독립적인 매개변수 개념을 파악하는 정도 -미지수, 매개변수, 변수에 대한 역할 인식-

7) Steffe, Thompson, & Glasersfeld(2000)에 의하면, 회고적 분석(retrospective analysis)은 비디오로 녹화하여 교수 실험 후에 다시 세밀하게 보면서 분석하여 학생들이 구성한 수학적 행동에 대한 더 깊은 이해를 할 수 있도록 하는 실험 교수 방법의 한 과정이다.

I영역의 문항들은 매개변수가 미지수 또는 변수와 함께 제시된다. 문항 1의 경우, 해를 구하는 전략은 문자를 조작하는 데 근거하지만, 다른 문항들은 문자의 해석과 관련이 있다. 학생들의 매개변수 개념을 각 문항별로 어떻게 이해하고 있는지 살펴보면 다음과 같다.

> 문항1) 주어진 방정식(x는 미지수), $(1-k)x^2+2kx+3=0$에 대하여 다음 명제의 참, 거짓을 판별 하여라.
> 명제: k=1이면 이 방정식은 해를 갖지 않는다.

문항 1에서 대부분의 학생들은 k=1을 맨 처음 대입함으로써 미지수가 잘 정의되어 있는 방정식을 풀어서 답을 선택하였다. 그러나, k=1일 때 해를 갖지 않는다는 오류를 범한 학생들은 k가 1이면 이차항이 없어지기 때문에 해를 구할 수 없다고 판단을 하거나 계산을 실수한 경우가 대부분이었다. 그리고 [A]와 [B]부류의 학생들 모두 스스로 해를 구한 구체적인 경험 때문에 자신의 답이 정답이라고 강하게 확신하였다.

I영역의 나머지 세 개의 문항은 1번 문항과 비교할 때, 학생들의 정답률이 매우 낮았고 이를 근거로 학생들이 매개변수와 변수, 미지수의 역할을 혼동하고 있음을 알 수 있었다. 각 문항별로 학생들의 매개변수의 해석을 구체적으로 분석하면 다음과 같다.

> 문항 2) 수영이는 "부등식 kx>0을 만족하는 x를 구하여라"라는 문제를 다음과 같이 풀었다.
> i) x>0이면 k>0이라는 해를 갖는다.
> ii) x=0이면 해 k는 존재하지 않는다.
> iii) x<0이면 k<0이라는 해를 갖는다.
> 수영이가 옳게 풀었다고 생각하는가?

문항 2에 대한 응답 결과, 학생들은 매개변수와 미지수를 구분하지 못했으며 x=0, x<0, x>0의 각 경우에 대하여 k에 임의의 수를 대입하여 계산한 결과를 근거로 자신의 답이 옳다고 주장하였다. 두 문자 k와 x가 서로 나란히 놓여있는 부등식과 같은 유형의 문제는 중학교 수학 교과과정에서 학생들이 직접 풀도록 제시되지 않는다. 교과서에서는 주로 일차부등식의 일반형을 나타내는 공식에서 k를 상수를 대신하는 것으로 제시하기 때문에, 학생들은 k와 x의 차이를 명확하게 인식하지 못한 것으로 보인다. 특히 성취 수준이 높은 학생인 H조차 질문지 검사에서 이 방법이 옳지 않다고 정답을

<문항1) 답안 선택지>

정답을 아래의 제시된 답지에서 고르고, 자신이 선택한 답이 정답이라고 생각하는 확신정도를 3점 척도에서 선택하세요.		정답으로 선택한 비율	정답을 3점의 확신으로 선택한 비율
[A] 1 2 3	이 명제는 참이다. 왜냐하면, ______	10%	56%
[B] 1 2 3	이 명제는 거짓이다. 왜냐하면, ______	90%	82%

<문항 2) 답안 선택지>

정답을 아래의 제시된 답지에서 고르고, 자신이 선택한 답이 정답이라고 생각하는 확신정도를 3점 척도에서 선택하세요.		정답으로 선택한 비율	정답을 3점의 확신으로 선택한 비율
[A] 1 2 3	예, 왜냐하면,_	71%	55%
[B] 1 2 3	아니오. 왜냐하면,______	29%	76%

선택했음에도 불구하고 인터뷰를 하자, 다음 녹취록의 line4부터 line13에 보여지듯이 처음에는 매개변수 k를 부등식의 해 x와 구분하는 것을 혼란스러워하였다.

1 T: 이 부등식을 해결하는 방법이 옳지 않다고 설문지 검사 때 답을 했었는데, 맞니?
2 S: 네..
3 T: 그 이유가 뭔지 설명해 주겠니?
4 S: [일단 자신의 설문지를 가만히 지켜본 후] 이건 x를 구하는 건데 반대로 했어요.
5 T: 반대로 한다는 말이 무슨 뜻이야?
6 S: x가 미지수니까 x를 구해야 하는데 k를 구하는 형식으로 계산을 하고 있어요. K는 미지수가 아닌데요.
8 T: K가 미지수가 아니라니?
9 S: 음...K는 조건이에요..그러니까 x를 구할 수 있도록 하는 변하는 조건인데요.
10 T: K가 조건이라는 뜻이 뭐지? 숫자가 아니라는 얘기니?
11 S: 음..숫자가 될 수 있지만,, 변하는 수니까..[잠깐 멈춤] K는 변수에요..
12 T: 그러면 X도 변하는데..X도 변수야?
13 S: 미지수인데..아휴..헷갈린다. X도 변수네.. 그럼 차이가 없나? 아니에요,, X와 K는 분명 차이가 있는데..[잠시 생각한 후] 그러면 X는 처음에는 구하는 것이니까 미지수가 맞는데, 나중에는 변수가 되는데..선생님, 이렇게 자꾸 바뀌어도 되요?
14 T: 의미가 계속 변할 수는 있어.. 그러면 네가 생각하는 변수하고 미지수의 차이가 뭔데?
15 S: 변수는 어떤 영역이 있어요, 그러니까 함수처럼 정의역이나 치역같이요..그리고 미지수는 해에요, 즉 구할 수 있는 거요..
16 T: 그럼 K는 미지수이니? 변수니?
17 S: K는 변수인데 X와는 약간 달라요..그러면 변수에도 여러 종류가 있나요?

문항 2와 같은 경우가 발생하는 것은 "$\forall k \in R^+$, $\exists x \in R^+$ such that $kx > 0$"라고 수학적으로 형식화될 수 있는 문항 2의 답에서 원인을 찾을 수 있다. 이 형식적 표현을 살펴보면, 방정식이나 부등식에서 매개변수를 도입할 때는 보편한정사와 존재한정사가 필요하며 이는 학생들은 매개변수 이상의 개념, 즉 이 표현 속에 숨어있는 무한의 개념을 관찰할 수 있어야 한다. 그러나, 중학생들이 이것을 이해하기는 어렵다. 단, 위의 학생 H와 같이 동기유발이 된 학생에게는 적절한 발문을 통하여 그 의미를 이해하도록 지도가 가능할 것으로 보인다.

다음의 문항 3과 4는 문자의 개념 학습에 표기의 중요성을 나타내주는 문항이다.

문항 3) y=f(x)= $2kx+3x^2$에 대한 설명 중 옳다고 생각하는 것을 고르고 그렇게 생각한 이유를 서술하세요.

<문항 3) 답안 선택지>

정답을 아래의 제시된 답지에서 고르고, 자신이 선택한 답이 정답이라고 생각하는 확신정도를 3점 척도에서 선택하세요.		정답으로 선택한 비율	정답을 3점의 확신으로 선택한 비율
[A] 1 2 3	x는 y의 함수이다.	19%	50%
[B] 1 2 3	x와 y는 각각 서로 다른 문자의 함수이다.	6%	65%
[C] 1 2 3	k와 y는 x의 함수이다.	5%	60%
[D] 1 2 3	y는 x의 함수이다.	58%	56%
[E] 1 2 3	k의 변화는 x의 변화와는 상관없다.	12%	48%

문항 4) "주어진 방정식(x는 미지수), $3ax-1=5x+3(a+1)$의 해가 2가 되도록 a의 값을 구하여라."라는 문제에 대한 설명으로 옳다고 생각하는 것을 고르고 그렇게 생각한 이유를 서술하세요.

문항 3과 4는 모두 주어진 표기에서 매개변수, 미지수, 변수의 구분이 되는 경우지만, 문항 3에서는 전체 학생의 30%만이 오답을 선택한 반면, 문항 4에서는 70%의 학생이 오답을 선택하였다. 이러한 현상은 문항 3이 문항 4와는 달리, 'y=f(x)'라는 표현을 사용함으로써 x와 y의 관계를 설명해 주는 표기이기 때문에 학생들은 매개변수 k는 변수 x, y와는 다른 역할을 하는 것으로 의식한다. 그러나, 문항 4에서는 첫 번째 문자 a가 매개변수이고 그 다음의 문자 x는 미지수라고 관례적으로 사용하였기 때문에 오답률이 문항 3보다 두 배 이상 높은 것으로 보인다. 즉, 문항 3은 문맥상 변수 개념이 나타나도록 잘 정의되어 있지만, 문항 4는 양변을 정리해야 하는데 그 과정에서 문맥상 매개변수와 미지수로 사용된 문자의 의미가 변하므로 그때마다 의미를 다르게 해석해야 하기 때문에 문항 3과 문항 4의 오답률에서 차이가 발생한 것으로 볼 수 있다. 문항 4의 방정식 $3ax-1=5x+3(a+1)$에서 매개변수 a는 문제의 문맥을 살펴볼 때 구해야할 미지수이나, 이 때의 미지수 x는 문제의 문맥상 '2'라는 수를 대입함으로써 상수가 된다. 따라서 문항 3과 문항 4에서 문자의 해석 차이는 학생들이 문자의 의미를 정확하게 이해하지 못하면서도 대수식의 연산은 비교적 능숙하게 수행함으로써, 즉 문자에 대한 의미론적 이해와 구문론적 이해 사이의 격차 때문으로 볼 수 있다.

성취수준이 중인 학생 E와 M의 문항 4에 대한 인터뷰 내용인 <표 Ⅳ-1>에서 학생들은 정답의 선택 여부와 관계없이 매개변수로 사용된 문자에 대한 구문론적 이해와 의미론적 이해 사이의 불일치를 경험하고 있음을 보여준다. 두 학생 모두 제시된 방정식에서 해를 구하는 대수적 조작으로 a의 값을 구할 수 있기 때문에 즉 구문론적 조작이 가능하기 때문에, 매개변수 a를 문제의 미지수로 보고 있다. 이 때 두 명 모두 a가 처음에는 주어진 방정식의 매개변수였다는 것을 인식하지 못하였다. x를 주어진 방정식의 미지수로 인식하는 경우, 학생 E는 정답 D를 선택했지만 관례적으로 x를 미지수라고 했었기 때문이라는 이유를 말한 것으로 볼 때 정답의 선택 여부와 관계없이 문자의 의

<문항 4) 답안 선택지>

정답을 아래의 제시된 답지에서 고르고, 자신이 선택한 답이 정답이라고 생각하는 확신정도를 3점 척도에서 선택하세요.		정답으로 선택한 비율	정답을 3점의 확신으로 선택한 비율
[A] 1 2 3	a와 x는 문항 4의 미지수이다.	5%	60%
[B] 1 2 3	x는 주어진 방정식의 미지수a와 달리 상수역할을 한다.	55%	56%
[C] 1 2 3	a와 x는 모두 문항 내 주어진 방정식의 미지수이다.	10%	70%
[D] 1 2 3	a는 문제의 미지수이고 x는 문항 속 주어진 방정식의 미지수이다.	30%	60%
[E] 1 2 3	a는 문항 속 주어진 방정식의 미지수이고 x는 문제의 미지수이다.	5%	75%

미를 불확실하게 인식하고 있음을 알 수 있다. 또한, 오답 A를 선택한 학생 M도 방정식의 미지수는 해가 구해지는 문자인데 해가 2로 문제에서 제시되었으므로, x가 주어진 방정식의 미지수라고 말하면서도 문제의 전체 틀 속에서 x의 의미를 해석하지 못하는 것으로 보아, 문자의 의미를 명확하게 인식하지 못하고 있음을 알 수 있다.

II영역: 매개변수에 대한 선개념과 매개변수의 표현 양상

비록 매개변수 개념이 중학교 교육과정에서 용어의 정의와 함께 도입되지는 않지만, 매개변수에 대한 학생들의 선개념은 무엇이며, 학생들이 매개변수를 표현하는 양상을 살펴보려는 의도에서, II영역의 문항 5와 6을 구성하였다.

문항 5는 문자를 사용할 때 학생들의 선개념을 검사하는 문항이며, 문항 6은 학생들의 매개변수의 표현 양상을 검사하는 문항으로 음영 표시를 하지 않았다.

<표 IV-1> 문자의 의미론적 이해와 구문론적 이해의 격차

E의 인터뷰(정답 [D]를 선택한 학생)	M의 인터뷰([A]를 답으로 선택한 학생)
T: a는 문제의 미지수이고 x는 문제에 주어진 방정식의 미지수라고 답을 했구나. 왜 그렇게 했는지 설명해보렴. S:[설문지를 다시 보더니] 선생님 다시 풀어도 되요? 저는 **문제를 직접 식을 계산해서** 답을 구했거든요. T: 그래? 그러렴. [시간이 잠시 흐른 뒤] 이유가 뭔지 설명해 볼래? S: 해가 2라고 해서 x에 2를 대입하면 a를 구할 수 있어요. 그러니까 a는 미지의 수, 미지수에요. 맞죠? T: 그럼, a값이 구해지니까 미지수라는 뜻이니? S: 네, **x에 2를 대입하면 a만 구해야될 수로 바뀌고 이 방정식을 풀면 a가 14/3로 구해지니까 a는 미지수에요. 또 문제에서 a의 값을 구하라고하니까 a가 미지수인 게 확실해요..** T: 다시 한 번 말해줄래? S: a는 문제에서 구하라고 한 값이니까 그리고 a가 구해지니까 문제의 미지수라고요... T: 그럼 x는 왜 주어진 방정식의 미지수이니? 8: 음..그러니까 **x는 원래 미지수인데..방정식에서는 항상 x가 미지수잖아요.**	T: a와 X가 미지수라고 했는데, 이유가 모두 미지수를 구하는 방법으로 풀 수 있기 때문이라고 썼구나..왜 그런 생각을 했는지 설명해줄래?. S:[설문지를 한동안 바라보더니] **해가 2라고 하니까 x는 이미 구해진 수잖아요, 방정식에서..그러니까 x는 방정식의 해의 역할을 하니까 미지수구, a도 아직 모르는 수니까 미지수에요..** T: 아~그래. 좀 더 구체적으로 설명해 주겠니? S: 선생님, .음.. 다시 풀어봐도 되죠? S: [시간이 흐른 뒤] **a는 14/3 이라는 숫자**인데, 2를 대입하면 구해지거든요. 하지만 **지금 주어진 방정식에서는 구할 수 없는 수이니까 미지수고요.. 음..** x는 2라고 대입할 수 있어서 a를 구하게 해주는 역할을 하지만...어 그럼 답이 B인가? [시간이 흐른 뒤] 아니에요..**어쨌든 해로 구해지는 수를 방정식에서는 미지수라고 하니까 x도 미지수**에요... T: 그럼, x는 a를 구하게 해 주는 역할을 하는 거니? s: 네. T: 그럼 a는 처음 방정식에서는 어떤 역할을 하지? [학생이 망설여서 질문을 바꾸어] a나 x나 모두 구할 수 있는 숫자이기 때문에, 미지수라고 했는데, 차이가 없이 똑같은 미지수인 거야? s: **x는 미지수였지만 문제에서 2라고 알려주니까 숫자로 바껴서 a를 구하게 해준 것이 다르다면 다를 수 있지만.. a도 처음 방정식에서는 미지수였잖아요, 다만 x를 알려주어서 구해지는 수이니까 큰 차이는 모르겠는데요.**

문항 5) 주어진 식 $x^2+cxy+y^2$에 대해 다음 물음의 밑줄 친 부분에 알맞은 용어라고 생각되는 것을 고르세요.

문항 5에 대한 검사 결과, 학생들은 문자에 대한 선개념을 문맥에서 그 의미를 파악하지 않고 나름대로 형성하고 있음을 알 수 있다. 선개념은 학생들의 이전 경험에 좌우되며 학교 대수에서 주로 문자를 대수식이나 방정식에서 조작이 가능한 미지수로 다루는 데서 기인한 것으로 보여진다. 그러나, 일부 학생들은 x, y를 변수라는 선개념을 가지고 있었으며, 이 학생들에게 그 이유를 묻자, x, y가 연산이 가능한 범위에서 변할 수 있는 수는 모두 될 수 있기 때문이라고 대답하였다.

그리고 전체 학생의 70%가 주로 방정식이나 대수식의 계수를 나타내는 문자로 c를 배웠기 때문에, c는 상수나 구해야할 미지수라고 답하였다.

중학교 과정에서 매개변수라는 용어가 사용되지 않고 있어서 답안 선택에 제한점이 있었지만, c의 역할을 묻는 문항의 기타 답 중 상수의 역할을 하지만 여러 숫자를 대신할 수 있으므로 변수의 역할도 한다는 답을 한 학생이 17명으로 매개변수의 개념을 약간은 인식하고 있음을 알 수 있었다.

문항 6) 주어진 방정식 $x^2+2kx+1=0$(x는 미지수)이 실근을 갖도록 실수 k의 값을 구하려고 한다. 실근을 갖기 위한 k의 값을 표현할 때,

(1) x는 ________이다.

정답을 아래의 제시된 답지에서 고르고, 자신이 선택한 답이 정답이라고 생각하는 확신정도를 3점 척도에서 선택하세요.		정답으로 선택한 비율	정답을 3점의 확신으로 선택한 비율
[A] 1 2 3	변수	22%	56%
[B] 1 2 3	미지수	59%	76%
[C] 1 2 3	상수	14%	50%
[D] 1 2 3	기타:	5%	60%

(2) y는 ________이다.

정답을 아래의 제시된 답지에서 고르고, 자신이 선택한 답이 정답이라고 생각하는 확신정도를 3점 척도에서 선택하세요.		정답으로 선택한 비율	정답을 3점의 확신으로 선택한 비율
[A] 1 2 3	변수	24%	50%
[B] 1 2 3	미지수	61%	60%
[C] 1 2 3	상수	10%	55%
[D] 1 2 3	기타:	5%	60%

(3) c는 ________이다.

정답을 아래의 제시된 답지에서 고르고, 자신이 선택한 답이 정답이라고 생각하는 확신정도를 3점 척도에서 선택하세요.		정답으로 선택한 비율	정답을 3점의 확신으로 선택한 비율
[A] 1 2 3	변수	15%	55%
[B] 1 2 3	미지수	33%	46%
[C] 1 2 3	상수	37%	60%
[D] 1 2 3	기타:	15%	60%

다음 중 가장 적절한 표현으로 생각되는 것을 고르고 그렇게 생각한 이유를 서술하세요.

문항 6의 결과, [A]를 선택한 학생들은 자신의 답에 대한 확신정도가 70%라는 결과에서 보여지듯이 판별식을 계산하면 답을 [A]로 구할 수 있다고 매우 자신 있게 말하였으며, [B]를 선택한 학생들 중 대부분은 판별식을 계산하여 답을 구하였지만 ‘ , ’를 ‘또는’의 의미로 해석하여야 문제의 의미를 더 정확하게 전달할 수 있기 때문이라고 선택이유를 설명하였다. 이는 판별식을 계산하여 얻은 구문론적 연산 결과로 학생들이 설명을 정당화하는 경향이 있다는 것을 보여주는 예이다. 그러나, 판별식의 결과를 언어로 표현하려고 한 학생들 중 [C]를 선택한 학생들이 12%라는 것은 방정식이나 부등식을 풀 때 관례적으로 사용하고 있는 ‘ , ’의 의미를 ‘또는’이라는 의미와 연결시켜 언어로 표현할 경우에는 불명확하게 이해하고 있음을 추측할 수 있다. 그리고 [D]를 선택한 학생들은 판별식으로 구한 계산 결과에 대한 가장 알맞은 표현은 다른 사람들에게 말로 설명할 수 있어야 한다는 이유 등 의사소통을 강조한 답을 하였다. 그러나 자신의 답에 대한 확신정도는 [A]와 [B]에 비해 낮았다. 이러한 문항 5의 결과로부터, 학생들은 문자를 언어로 바꾸어 표현하면서 문맥의 전후관계를 살펴 그 의미를 파악하는 것보다는 연산, 식의 조작을 이용하여 판단하는 경향이 있음을 알 수 있다.

III영역: 그래프로 제시하였을 때 매개변수인 문자에 대한 해석 능력

III영역의 문제들은 직선을 다룰 때 좌표평면상에서 그 위치를 결정하는 요소로서 매개변수를 해석할 수 있는지를 묻는 문항들로서 이 때 학생들이 범하는 오류는 그래프를 잘못 이해하는 데에서 비롯된다기보다 매개변수의 의미를 잘못 해석하는 데서 기인하는 것으로 나타났다. 문항별로 살펴보면 다음과 같다.

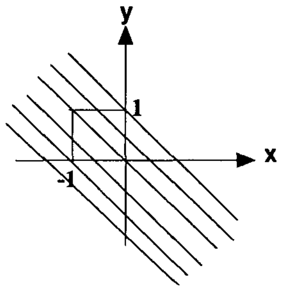
문항 7) 오른쪽 그림의 직선들의 방정식으로 적절한 것은 .
무엇인가? 답을 선택하고 그렇게 생각한 이유를 서술하세요.

<문항 6) 답안 선택지>

정답을 아래의 제시된 답지에서 고르고, 자신이 선택한 답이 정답이라고 생각하는 확신정도를 3점 척도에서 선택하세요.		정답으로 선택한 비율	정답을 3점의 확신으로 선택한 비율
[A] 1 2 3	$k \geq 1$, $k \leq -1$일 때, x는 실근을 갖는다	34%	70%
[B] 1 2 3	$k \geq 1$ 또는 $k \leq -1$이면 x는 실근을 갖는다	35%	66%
[C] 1 2 3	k가 1이상이고 k가 -1이하이면 x는 실근을 갖는다	12%	60%
[D] 1 2 3	k가 1이상이거나 k가 -1이하이면 x는 실근을 갖는다	19%	52%

<문항 7) 답안 선택지>

정답을 아래의 제시된 답지에서 고르고 자신이 선택한 답이 정답이라고 생각하는 확신정도를 3점 척도에서 선택하세요.		정답으로 선택한 비율	정답을 3점의 확신으로 선택한 비율
[A] 1 2 3	y=kx	14%	50%
[B] 1 2 3	x+y=k	60%	76%
[C] 1 2 3	y=x+k	20%	70%
[D] 1 2 3	기타:	6%	56%



문항 7은 학생들이 매개변수 k가 직선의 위치를 결정하는 요소인 y절편으로 매개변수의 의미를 해석하고 있음을 보여주는 문항이다. 선택지에서 [A]를 선택한 학생들 대부분은 매개변수 k를 그래프에 나타난 여러 직선의 기울기를 표현하는 것으로 잘못 해석한 경우로 평행한 직선의 기울기가 같음을 이해하지 못하고 있었다. [C]를 선택한 학생들은 매개변수 k를 y절편으로 해석하였으나 기울기를 1로 잘못 계산한 경우가 대부분이었다. 또한 [B]를 선택한 학생들의 79%는 문항 8과 비교해볼 때 자신의 답이 정답이라고 확신하는 정도가 매우 강하였다.

문항 8) x · y축으로 이루어진 좌표평면에서 방정식 a(x-1)+b(y-1)=0은 점 (1, 1)을 지나는 직선들을 나타낸다. 이 때, a, b, x, y는 수 집합 중 어디에 속하는가? 답을 선택하고 그 이유를 서술하세요.

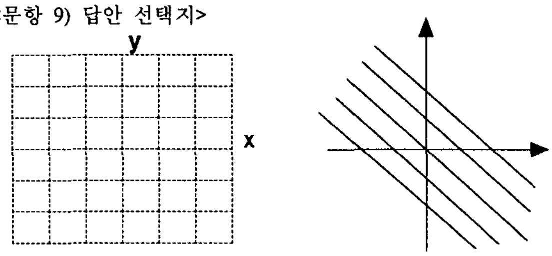
문항 8은 매개변수의 의미를 정확히 파악하고 있는지를 검사하는 문항으로 정답을 선택한 학생들 중 자신이 선택한 답을 강하게 확신하고 있는 경우는 23%밖에 되지 않는 것으로 볼 때, 그래프와 함께 y=ax+b형식으로 제시될 때보다 방정식 형태의 매개변수 개념을 이해하기 어려워함을 알 수 있다. 또한 오답을 선택한 학생들의 경우, 매개변수를 실수에서 변화하는 변수이면서 동시에 주어진 문제에 따라 고정된 어떤 상수라는 이중적인 의미로 이해하고 있었다.

문항 9) 아래의 그림에서 직선은 모두 y= -x+k 라는 직선의 방정식을 만족한다. 이 때 x, y, k는 어느 집합에 속하는가? (이 때, 좌표평면의 모눈 칸은 모두 1씩 증가한다.)

<문항 8) 답안 선택지>

정답을 아래의 제시된 답지에서 고르고 자신이 선택한 답이 정답이라고 생각하는 확신정도를 3점 척도에서 선택하세요.		정답으로 선택한 비율	정답을 3점의 확신으로 선택한 비율
[A] 1 2 3	a, b는 자연수 집합에 속하고 x, y는 실수 집합에 속한다	13%	50%
[B] 1 2 3	모두 실수의 집합에 속한다.	53%	23%
[C] 1 2 3	a와 b는 상수이고 x와 y는 실수의 집합에 속한다.	30%	45%
[D] 1 2 3	기타:	4%	50%

<문항 9) 답안 선택지>



정답을 아래의 제시된 답지에서 고르고 자신이 선택한 답이 정답이라고 생각하는 확신정도를 3점 척도에서 선택하세요.		정답으로 선택한 비율	정답을 3점의 확신으로 선택한 비율
[A] 1 2 3	k는 자연수 집합에 속하고 x, y는 실수 집합에 속한다	4%	50%
[B] 1 2 3	모두 실수의 집합에 속한다	16%	60%
[C] 1 2 3	k는 -2와 2사이의 실수의 집합에 속하고 x와 y는 실수의 집합에 속한다	24%	46%
[D] 1 2 3	k는 {-2, -1, 0, 1, 2}의 원소이고 x, y는 실수에 속한다	56%	50%

이 유 : ______________________________

문항 9는 문항 8과는 달리 구체적인 직선을 제시한 뒤 매개변수의 정의역을 묻는 문제로, 매개변수를 이산적으로 파악하여 정답을 고른 학생들은 56%였다. 오답 중 [c]를 고른 학생들의 선택이유는 크게 두 부류로 나뉘었는데, 첫 번째는 제시된 그래프 표현을 해석할 때 -2와 2 사이에 무한히 많은 직선이 존재할 수 있기 때문이라고 생각하고 있었고 두 번째는 자신들이 비슷한 문제를 풀어봤던 이전 경험에 의해 별다른 생각 없이 선택하였다고 대답하였다. 따라서, 매개변수 k가 직선의 위치 결정 요소라는 의미를 명확하게 인식하지 못하고 있음을 알 수 있다.

이상에서 살펴본 바와 같이, 중학생들은 매개변수를 대수식이나 방정식의 특별한 항이나 계수로서 역할을 하거나 미지수나·변수와는 다르게 사용될 수 있다고 암묵적으로 이해하고 있었다. 즉, 학생들은 주어진 문제가 문자와 식의 단원에 속한 것이라면 매개변수를 나타내는 문자를 조작가능한 변수나·상수 대신 쓰이는 역할을 주로 수행하는 것으로 인식하며, 방정식이나 부등식에서의 매개변수는 여러 가지 법칙이나 공식을 나타내는 변수나 질문지의 문항 4와 5의 경우처럼 필요할 때는 미지수로서 역할을 할 수 있는 것으로만 문자의 의미를 제한하여 사용한다. 또한 함수단원에서는 매개변수가 기울기나 y절편 등의 기하적 의미를 갖는 것으로만 제한하여 상황에 따라 다르게 인식하고 있다. 또한 대부분의 학생들은 문항 6에서 매개변수의 의미를 문맥의 전후관계를 파악하여 언어로 표현하는 것보다 연산에 근거한 기호조작의 결과로 표현하는 것을 선호하는 경향을 볼 때 구문론적 조작 수준에 비해 의미를 이해하는 수준은 불명확함을 알 수 있다. 그리고 문자의 연산을 하면서도 왜 이 연산을 사용하였는지, 변수의 여러 다른 사용들을 구별하지 않고 있었다. 끝으로, 학생들은 구체적인 그래프로 제시된 직선을 보고 매개변수의 의미를 기울기, y절편 등으로 해석할 수는 있었으나, 형식적인 직선의 방정식만으로 제시할 때는 매개변수의 의미를 제대로 해석하지 못하였다.

2. 자기질문에 의한 자기조정형 수업설계

앞의 연구 결과를 바탕으로 학생들은 상황에 따라 문자의 의미를 파악하기보다는 규칙과 절차를 암기하면서 구문론적 조작에 의존하고 있음을 알 수 있었다. 또한, 매개변수 개념을 인식하고 있는 학생들이라도 정답을 선택할 때 확신의 정도가 낮은 편이었다. 이는 학생들에게 문맥의 전후 관계에 따라 가변적인 매개변수 개념을 단순히 $y=ax+b$나 $ax+by+c=0$ 등과 같은 형식적인 표현이나 문제 풀이를 통해서 가르치는 것은 한계가 있음을 시사한다. 물론 중학교 교육과정에서 명시적으로 매개변수의 개념을 형식화하여 교수할 필요는 없지만, 문자의 역할이 문제를 해결하는 과정에서 어떻게 변화되어 가는 지를 학생들이 의식하고 이를 이해함으로써, 문자의 의미를 파악하는 것은 물론 문자에 대한 역동적 사고를 할 수 있도록 해야 할 것이다. 이에, 연구문제 2에서 학생들이 문제를 풀 때 문자를 기호조작과 더불어 미지수, 매개변수, 변수개념 사이의 의미를 구별하고 변환할 수 있도록 안내하는 사고전략[8]을 활용한 수업 모형을 제안하고자 한다.

사고전략을 활용한 학습을 수업에 적용하려는 이유는 학습자가 메타인지 사고를 자연스럽게 행하면서 암묵적으로 이해하고 있는 매개변

8) 사고기능과 구별되며, 사고전략과 사고기능에 대한 용어는 II.이론적 배경의 '3. 수업모형을 개발하기 위한 메타인지 사고 고찰'에 정의되어 있다.

수 관념을 보다 세련되고 유연하게 자기조정을 할 수 있도록 지도가 가능할 것으로 생각되기 때문이다. 수업에서 학생 스스로 메타인지 사고를 활용하여 모니터링하고 반성적으로 생각해 보는 경험을 하는 것은 여러 가지 사고기능을 내면화시키고 통합·적용하여 매개변수 개념을 명확히 이해하도록 도울 수 있을 것이다. 특히, Blanton & Stylianou(2003)은 학습자의 사고전략을 꾸준히 관찰하고 도약할 수 있는 과제를 조직·제시 및 안내함으로써 학생들의 수학적 이해를 발달시킬 수 있다고 주장한다.

본 연구에서는 질문지 검사 결과와 인터뷰에 대한 분석을 바탕으로 학생들이 매개변수로 사용된 문자를 문제해결 과정에서 미지수, 변수와 구별하고 그 의미의 변환을 돕는 자기질문 리스트를 메타인지 활동의 관리와 반성적 평가의 측면에서 이론적 배경에서 살펴본 개발 방법을 준거로 하여 4단계의 사고과정에 따라 개발하였다. 학생들이 자기질문을 하면 그 부분에 집중하게 되고 스스로 질문해 보면서 이해되는 것과 이해되지 않는 것을 찾아낼 수 있다. 특히, 김영채(1998)는 공부시간의 80% 정도를 자기질문 활동을 하는 것이 바람직하다고 하였다. 먼저, 4단계의 사고과정은 김영채의 메타인지 사고전략을 활용하기 위한 4단계를 바탕으로 문자 학습을 할 때 메타인지 사고전략을 활용할 수 있도록 구체화한 것이다. 즉, 문자에 대한 기술적인 조작을 하면서 그 변환되는 여러 의미를 학습하기 위해 요구되는 사고기능의 요소들을 자각하고 사용중인 문자의 역할에 대한 생각의 범위를 좁혀가며, 이들을 평가해 어떤 의미로 문자가 사용되었는지를 전략적으로 판단하도록 구성하였다.

단계 1, 문자의 인식 및 수행 단계는 정신적 준비 단계에 해당되는 것으로, 문제를 읽고 문자의 조작을 수행한다. 문자를 사용한 연산을 실제로 수행하면서 스스로 왜 이 연산을 사용하였는지를 반성하는 것은 문맥에서 문자의 의미를 파악하여 학습할 수 있도록 효과적인 정신 상태를 준비하는 단계이다. 단계 2, 문자의 의미 파악단계와 단계 3, 의미의 이동 파악 단계는 효과적인 수행의 준거 단계를 문자의 의미와 역할 이동의 학습에 적합하도록 세분화하였다. 단계 2, 문자의 의미 파악단계에서는 진행중인 조작과정 속에서 각 상황별로 미지수 개념, 변수 개념, 매개변수 개념을 구분하면서 각각에 대한 문자 사용의 의미를 모니터링 할 수 있는 분석적인 자기질문을 통하여 문자의 의미를 파악한다. 이는 문자의 의미에 주목하고 조정함으로써 '사려 깊고 철저하게' 학습하는 것을 도울 수 있다. 이 때, 문자를 미지수, 변수, 매개변수로서의 사용을 완전히 구분하지는 않으며 조작 중인 문자의 의미가 어떻게 변할지를 예측하도록 한다. 단계 3, 의미의 이동 파악 단계에서는 학생들이 2단계에서 모니터링하면서 분석한 것을 토대로 문자의 의미가 어떻게 변화해왔는지에 대한 반성적 사고를 하도록 한다. 학생들 스스로 행한 문자의 연산과 문제 해결 과정에서 매개변수, 미지수, 변수 사이의 이동을 스스로 반성적으로 사고할 때 비로소 문자의 여러 다른 사용을 구별하는 힘을 가질 수 있기 때문이다. 단계 4, 적용 단계에서는 전이와 반성 단계를 바탕으로 문자의 여러 다른 사용들 사이를 유연하게 이동한 과정을 자연스럽게 숙달함으로써 학생들이 문자를 구문론적 측면과 의미론적 측면을 통합하여 의미 풍부하게 조작하면서 사용하는 단계이다.

이상의 4단계를 거쳐 매개변수, 미지수, 변수 개념을 구분하여 문자의 의미를 학습한다면, 매개변수만을 특별히 분류하여 학습한 것보다 각 문자의 의미와 역할을 자연스럽게 학습하는 과정 속에서 학생 스스로 매개변수의 의미를

구성할 수 있을 것이다. 이는 고등학교 교육과정에서 도입되는 매개변수의 개념 학습과의 연계선 상에서 발달을 도모할 수 있는 계기를 제공할 수 있을 것이다.

각 단계를 학생들이 메타인지 사고를 활용하여 습득할 수 있도록 안내하는 사고전략을 스스로 행할 수 있도록 '자기질문 리스트'를 개발하였다. 자기질문 리스트는 문자에 대해 학생들이 아는 것에서 시작하여 그 분명한 의미와 그렇게 생각하는 이유를 따져 볼 수 있게 한다. 또, 해석이나 추론을 할 때 중간 과정의 내용을 찾아 볼 수 있으며 어떻게 그런 생각을 하였는지, 문자가 함의하고 있는 바가 무엇이며, 지적 수행의 준거에 따라 자신의 사고가 명료한지 적절한지를 의식하고, 이에 민감해지도록 스스로 질문한다. 그 구체적인 질문내용은 다음의 <표 Ⅳ-2>와 같다.학생들이 자기질문 리스트틀 활용하여 문자의 의미를 파악하는

<표 Ⅳ-2> 자기질문 리스트

사고 단계		자기질문
1 단계	문자인식 및 수행단계	· 문자에 어떤 연산을 행하였는가? · 왜 이 연산을 사용하였는가? · 행한 연산은 적절한가? · 다른 연산이 가능한가?
2 단계	문자의 의미 파악단계	· 특정한 수치 값을 의미하는 것으로서 사용되는 문자는 무엇인가? · 방정식을 참이 되게 하는 값을 대신하여 문자를 사용하였는가? · 문자를 어떤 값(수)으로 가정할 수 있는가? 그 이유는? · 문자를 미지수로 해석할 수 있는가? 왜 그렇게 생각하는가? · 식을 전개하거나 정리할 때 사용한 문자인가? · 여러 가지 법칙과 공식을 설명할 때 사용된 문자인가? · 두 개 이상의 문자가 서로 관련되는가? · 사용하고 있는 문자가 변수인가? · 독립변수(한 문자)가 주어질 때 종속 변수(다른 한 문자)의 값이 정해지는가? · 표와 그래프, 대수식(관계식)에서 변수들 사이의 변화량이 있는가? · 변량 사이의 관계를 기호화하였는가? · 사용하고 있는 문자의 의미가 변화할 수 있을까? 그 과정을 예측해 본다면? 그렇게 생각한 이유는?
3 단계	의미의 이동 파악 단계	· 현재 사용중인 문자는 문제 속에서 어떤 역할을 하는가? · 미지수인가? 변수인가? 아니면 다른 역할을 수행하는가? (매개변수의 용어를 안다면 사용하고 그렇지 않다면, 문제 속에서 의미만을 설명할 수 있으며 미지수, 변수와는 다른 역할을 한다는 것을 자각하는 수준으로만 지도한다) · 풀이 과정을 살펴볼 때, 하나의 문자는 문제를 완전히 해결할 때까지 계속 같은 역할을 하는가? · 변화하고 있다면 어떻게 변화하고 있는가? · 현재 사용중인 문자는 앞으로 어떤 역할을 할 수 있을까?
4 단계	적용 단계	· 문제를 해결한 후 문제 해결 과정에서 사용한 문자의 의미 변화 또는 그 문맥에 맞게 말로 설명할 수 있는가? · 주어진 문제를 해결하면서 변화하는 문자의 의미를 다른 문제를 풀 때도 적용할 수 있을까? · 문제의 해결과정이 조리 있는가? 문제의 문맥(관계)을 만족하는가? · 문제해결과정에서 가장 자신 있게 문자의 의미를 구분할 수 있을 때는 어떤 상황일 때였는가? · 가장 이해하기 어려웠던 문자의 의미 또는 변화과정에서의 문자의 역할은 무엇이었는가? 그 원인은 어디에 있다고 생각하는가?

과정을 교사가 관찰할 수 있도록, 김영채(1998)의 일반적인 사고행동 관찰지를 토대로 하여 '사고행동 관찰 체크리스트'를 만들었다. 이 때, 학생들은 자기질문 리스트를 가능한 대로 자세하게 소리내면서 생각하도록 한다. 다음 <표 Ⅳ-3>는 교사의 사고행동 관찰 체크리스트이다.

이상의 '자기질문 리스트'와 '사고행동 관찰 체크리스트'를 실제 수업시간에 활용할 수 있고, 대부분의 교사들이 활용하는 교수-학습 지도안에 쉽게 적용할 수 있도록 '자기질문에 의한 자기조정형 수업모형'을 제작하였다. 자기조정형 수업모형은 수업계획영역과 수업과정영역, 두 영역을 중재하는 사고실험영역으로 구성되며 각 영역은 상호 작용한다. 먼저 수업계획영역의 5단계를 살펴보면, 단계 1에서, 교사는 교과 내용 중 문제를 해결하면서 미지수, 변수, 매개변수의 의미를 구분하고 그 역할 이동을 학습하는데 적합한 내용을 선정하고, 그

<표 Ⅳ-3> 사고행동 관찰 체크리스트

( )학년 ( )반 ( )번 이름:________ 관찰 교사:________

관찰일시: 년 월 일 교시

다음은 학생들이 문자의 의미를 미지수, 변수, 매개변수로 구분하여 이해하면서 문제를 해결하기 위해 메타인지 사고전략을 얼마나 활용하여 학습하고 있는지를 관찰해 보기 위한 일반적인 체크리스트이다. 이 체크리스트의 결과는 학생들의 자기질문리스트를 활용한 사고전략을 무의식적으로 사용할 수 있도록 어느 정도 연습이 되고 있는 지를 알아보고 더 나은 수준으로 향상시키는데 참고가 될 것이다.

사고 행동	행동의 실제: 드물게	가끔	대개	거의항시
1. 문제의 목적을 분명하게 알고 있다.				
2. 문제의 문맥을 정확하게 파악하고 있다.				
3. 문제를 해결할 때 사고의 4단계를 수행한다.				
4. 각 단계별 자기질문 리스트의 질문을 반 이상 사용하여 스스로 모니터링 한다.				
5. 자기질문 리스트를 활용하면서 자신의 오류나 실수를 찾아내고 고치려고 노력한다.				
6. 이전에 학습했던 지식을 적용해 본다.				
7. 매개변수, 미지수, 변수의 역할을 구분한다.				
8. 문자의 의미를 나타내는 용어를 정확하게 사용한다.				
9. 문자의 의미가 변화된다는 것을 인식한다.				
10. 문자의 의미가 변화되는 과정을 설명할 수 있다.				
11. 문자의 조작/연산을 잘 한다.				
12.. 문제를 해결할 때까지 끈기 있게 자기질문 리스트를 활용한다.				
13. 문제를 해결한 후 자기질문 리스트를 활용하여 문자에 대한 반성적 사고를 수행한다.				

범위와 시퀀스를 확인한다. 이 때, 필요하다면 교과 내용을 재구성할 수 있다. 단계 2에서는 교과 내용에서의 학습목표와 사고 과정에서의 학습목표를 설정한다. 이 때, 교사는 교수하려는 교과 내용의 핵심 내용과 용어, 개념을 선정하고, 4단계의 사고 과정에서 행해야 할 자기질문을 교과내용에 비추어 선정한다. 단계 3에서는, 사고과정의 학습목표에 알맞도록 분석적 사고 수업, 귀납적 수업, 소크라테스식 수업, 연역적 수업과 같은 학습 흐름을 선정하며, 교수하려는 내용에 적합하도록 개별학습, 소집단협동학습, 탐구학습, 문제해결학습, 토론학습 교수-학습형태를 선정한다. 이 때 학생들의 메타인지 사고 전략을 활용한 자기조정형 수업을 하기 위해서는 교사의 강의는 전체 수업에서 20%를 넘지 않도록 설계한다. 단계 4에서는 수업에 알맞은 자기질문리스트, 사고행동 체크리스트 및 수업 지도안을 작성한다. 단계 5에서는 문자의 의미 파악을 학습주제로 선정하였으므로, 이미 알고 있는 문자에 대한 지식들을 잘 연결시켜 새로운 의미와의 관계를 파악할 수 있도록 교사는 수업에 사용할 문제의 형식을 구조화하고 내용은 문맥을 고려하여 교수-학습자료를 제작한다. 이 때, 학습지, PPT, SWF, 애니메이션 등과 같은 ICT 활용자료, 그래프 및 그림자료, O.H.P자료 등과 같은 다양한 양식의 수업 자료 중 학생들의 동기 유발 및 내용 전달에 보다 적합하다고 판단되는 교수-학습자료를 제작해야 할 것이다.

그런 다음, 수업 계획에 대한 교사의 사고 실험을 실시하여 학생들의 메타인지 사고에 대한 예상 반응과 수업 계획에 의거한 수업을 실시했을 때 일어날 수 있는 학습상황과 그 때의 학생들의 반응을 예측한다. 예측한 결과를 수업계획의 단계 4와 5에 피드백 하여 수업 계획을 수정 · 보완한다.

실제 수업 과정에서는 학생들이 교사의 수업 계획에 따라 스스로 자기질문에 의한 자기조정 학습을 수행하면서 문제를 해결할 수 있도록 돕는 수업을 실시한다. 먼저, 동기 유발 및 수업 안내 단계에서는 수업내용과 관련된 예 등을 통해 동기를 유발하고 수업의 목표 및 핵심 개념을 소개하고, 사고를 통한 학습이 왜 가치 있는지를 말해준다. 그리고 학생들에게 본 수업에서 자기질문리스트를 활용하는 방법을 소개하는데, 처음에는 그 활용 방법을 자세하게 설명하고 시범을 보이지만, 점차 주의를 환기시키며 피드백을 주는 방향으로 교사의 개입은 줄이도록 한다. 단계 2는 수업의 전개과정에 해당하는 것으로, 교과내용에 대한 사고전략을 활용한 교수-학습 활동을 수행하는 단계이다. 이 때, 교사는 학생들의 활동을 증가시키면서 되도록 말을 적게 하고 학생들의 자기조정 학습에 대한 피드백과 도움을 주며 코칭(coaching)을 하는 수업을 한다. 이 과정에서 학생들은 자기질문리스트를 활용한 문자의 의미를 자기조정을 하게 되는데, 교사는 학생들이 스스로 소리내면서 생각하는 방법을 활용할 수 있는 시간을 가능한 많이 배분하고 학생들의 사고 과정과 학습 과정을 사고행동관찰 체크리스트를 활용하여 관찰을 한다. 수업을 하는 동안 교사는 수업하고자 하는 개념을 그 사용되는 맥락 속에서 제시하도록 하며, 학생들에게 스스로 문제를 해결할 때, 개념을 해석하고 분석하여 이해하도록 안내한다. 그리고 수업 중 학생들의 소집단 활동에 함께 참여할 때는 자기질문 리스트를 활용하여 학생들 앞에서 '소리내어 사고'를 해 보이며, 학생들과 규칙적으로 소크라테스식 대화를 한다. 단, 필요하다면 자기질문리스트를 발문으로 사용한 강의식 수업을 할 수도 있다. 단계 3에서는 교과내용 요약 및 필수적인 사고전략을 정리하는 단계로,

핵심 내용을 기본 원리에 맞게 소리내어 생각하는 방법으로 교사가 정리하거나 학생들에게 발표를 시킨다. 그리고, 학생들에게 수업내용이나 과제를 재진술해 보게 하거나 수업 중 자신의 활동에 대한 평가를 스스로 해보고 알게 된 점, 미흡한 점을 적어보도록 한다. 끝으로 잘 안 풀리는 문제를 다시 검토해 보고, 필요하다면 숙제로 제시한다.

이러한 수업모형은 교과내용을 사용하여 사고전략을 연습하는 동시에, 그러한 사고의 과정을 통하여 교과내용을 깊게 이해하도록 할 수 있기 때문에, 수업을 계획할 때 차시별로 사고전략의 학습목표와 문자의 의미 학습에 대한 학습목표가 별도로 제시되어야 한다. 자기질문에 의한 자기조정형 수업의 핵심은 학생이 문자의 의미에 대한 학습을 하면서 스스로 이해를 하기 위한 자신의 사고과정을 관리하는 자문자답을 경험하도록 수업을 계획하고 지도하는 것이다.

이를 통하여, 학생들은 문제를 해결할 때 자신의 사고과정을 자각하고 반성하는 자기조정을 함으로써 개념을 습득 할 수 있을 것이다. '자기질문에 의한 자기조정형 수업모형'은 다음의 <표 Ⅳ-4>처럼 정리될 수 있다.

<표 Ⅳ-4> 자기질문에 의한 자기조정형 수업모형

Ⅰ 수업계획

1. 자기질문에 의한 자기조정형 수업을 할 단원 선정 및 그 단원의 학습위계상 위치 확인
필요하다면 교과내용을 재구성한다

↓

2. 교과 내용에서의 학습목표와 사고 과정에서의 학습목표 설정
교수하려는 교과 내용의 핵심 내용과 용어, 개념을 설정한다.
4단계의 사고 과정에서 행해야 할 자기질문을 교과내용에 비추어 선정한다.

↓

3. 사고과정의 학습목표에 알맞은 학습 흐름과 내용의 교수에 적합한 교수-학습형태 선정
학습흐름의 예- 분석적 사고 수업, 귀납적 수업, 소크라테스식 수업, 연역적 수업 등.
교수-학습형태-개별학습, 소집단협동학습, 탐구학습, 문제해결학습, 토론학습 등.

↓

4. 자기질문리스트, 사고행동 체크리스트 및 수업 지도안 작성

↓

5. 수업용 교수-학습자료 제작

⇕ 상호피드백 ⇕

사고실험

수업 예측 사고실험 ⇔ 수업 계획 수정 및 보완

⇕ 상호피드백 ⇕

Ⅱ 수업과정

1. 동기유발 및 수업안내

↓

2. 교과내용에 대한 사고전략을 활용한 교수-학습 활동

학생	· 자기질문리스트를 활용한 문자의 의미를 자기조정 한다. · 학습형태별로 개별학습시간은 조정을 할 수 있지만, 스스로 소리내면서 생각하는 방법을 활용하는 시간을 되도록 많이 배분한다. · 자신의 말로 요약한다. · 교사의 도움을 받는다.	교사	· 사고행동관찰 체크리스트를 활용한다 · 수업을 녹화한 후 수업 후에 분석한다. · 되도록 말을 적게 한다. · 수업하고자 하는 개념을 그 사용되는 맥락 속에서 제시한다. · 문제를 해결하면서 개념을 해석하고 분석하여 이해하도록 한다. · 자기질문 리스트를 활용하여 학생들 앞에서 '소리내어 사고'해 본다. · 규칙적으로 소크라테스식 대화를 한다. · 소집단 활동을 자주 한다.

↓

교과내용 요약 및 필수적인 사고전략의 정리
· 핵심 내용을 기본 원리에 맞게 소리내어 생각하는 방법으로 교사가 정리하거나 학생들에게 발표를 시킨다.
· 수업 중 자신의 활동에 대한 평가를 스스로 해보고 알게 된 점, 미흡한 점을 적어본다.

3. 사례 연구

개발한 '자기질문에 의한 자기조정형 수업모형'의 실제 수업에의 적용가능성을 탐색하고자 인터뷰에 참여했던 학생 5명을 대상으로 질문지를 활용한 개별·문제해결 학습을 2차시동안 실시한 사례 연구의 결과는 다음과 같다. 먼저, 수업 설계는 다음의 <표 Ⅳ-5>과 같다.

본 연구에서 실시한 질문지의 각 영역을 '자기질문에 의한 자기조정 수업모형'의 '수업과정'의 흐름에 따라 수업을 진행한 결과를 살펴보면 다음과 같다. 첫째, 동기유발 및 수업 안내 단계에서는, 이미 사전 인터뷰를 하였기 때문에 학생들은 문자의 의미를 명확히 학습해야 할 필요성을 충분히 느끼고 있었다. 다만, 1차시 때 하수준의 학생은 문자의 의미 학습에 대한 필요성은 공감하였으나 자기질문 리스트를 활용하여 문자를 미지수, 변수, 매개변수로 구분하는 것을 혼자 힘으로 할 수 있을지는 자신없어하였다. 그러나, 2차시 수업에서는 1차때보다 약간의 자신감을 보였다. 자기질문 리스트를 활용하는 방법을 안내하기 위해 먼저 자기질문 리스트를 제시하고 읽어보도록 한 뒤, 각 영역별 문제를 다시 풀 때 자기질문리스트에 제시된 단계별 자기질문을 활용해보도록 설명하였다. 주어진 문제를 읽고 연산을 수행할 때 1단계의 자기질문을 활용하고, 문제에서 요구하는 문자의 의미와 각 문자들의 사용을 자신이 풀이한 과정에서 상황별로 파악할 때 2단계의 자기질문을 활용하도록 안내하였다. 그리고 자신의 문제 풀이 과정에서 문자의 의미나 역할이 변하고 있음을 탐지하였다면 3단계의 자기질문을 활용하여 답을 생각해보도록 안내하였다. 이 때, 각 단계에서 자신이 이해하지 못하는 부분이나 실수한 부분이 있는지, 사고의 전개과정이 조리에 맞는지를 스스

<표 Ⅳ-5>문자(미지수, 변수, 매개변수)에 대한 자기질문에 의한 자기조정형 수업모형의 적용

<table>
<tr><td rowspan="7">수
업
계
획</td><td>단원명</td><td colspan="2">문자와 식(매개변수 개념이해)</td><td colspan="2">소단원명</td><td>종합문제</td><td>수업유형</td><td colspan="2">보충학습</td></tr>
<tr><td rowspan="2">학습목표</td><td>교과 내용</td><td colspan="7">문자를 미지수, 매개변수, 변수의 역할을 구분하고 문제해결과정에 내재된 역동적 의미를 이해·활용할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>사고 과정</td><td colspan="7">자기질문에 의한 자기조정의 메타인지 사고를 자연스럽게 수행할 수 있다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">교수-학습 형태 자료</td><td colspan="2">교수-학습형태</td><td colspan="3">교수-학습자료</td><td colspan="3">문자의 의미에 대한 핵심 내용, 용어, 개념</td></tr>
<tr><td colspan="2">개별학습(○)
문제해결학습(○)
※교사는 교수-학습의 조직 및 안내자의 역할을 수행한다.</td><td colspan="3">자기질문리스트(○)
사고행동 체크리스트(○)
본 연구의 질문지</td><td colspan="3">미지수, 변수, 매개변수</td></tr>
<tr><td>본 차시의 시퀀스(위치)</td><td colspan="3">문자 학습에 대한 연습문제 풀이
(통합적 학습내용 정리단계)</td><td colspan="2">학습 흐름 선택</td><td colspan="3">분석적 사고</td></tr>
<tr><td colspan="9">학습내용(각 문항의 구체적인 문제 해결과정 및 활용할 자기질문 및 자기조정)에 대한
세부 수업 지도안 작성 및 교수-학습자료(ICT활용자료) 제작</td></tr>
<tr><td rowspan="2">사고
실험</td><td colspan="6">수업에 대한 예측</td><td rowspan="2">비
고</td><td colspan="2" rowspan="2">사례연구에서는 이미 사전에 인터뷰를 하였으므로 생략함</td></tr>
<tr><td colspan="6">수업 계획 수정 및 보완 <비디오 녹화 및 분석 준비></td></tr>
<tr><td>수업
과정</td><td colspan="9"><자기질문에 의한 자기조정 수업모형>의 "수업과정"을 준거로 사례 연구를 위한
질문지 영역별 수업 실시(2차시)</td></tr>
</table>

로 살핀 후 최종적으로 답을 선택하도록 하였다. 문제를 해결한 뒤 검토 및 적용 단계를 수행할 때 4단계의 자기질문을 활용해 보도록 하였다. 자기질문 리스트의 활용법을 설명한 뒤 교사가 먼저 질문지의 1번 문항을 자기질문 리스트를 활용하여 소리내어 생각하는 방법에 대한 시범을 보였다.

둘째, 녹취록의 분석과 학생들의 수행 과정에 대한 교사의 사고행동 관찰체크리스트를 근거로 수업의 전개과정을 살펴보면, 학생들은 자기질문리스트를 활용하여 질문지의 각 영역별 문제를 풀 때 사전인터뷰 때보다 매개변수 개념에 대해 보다 명확한 이해를 할 수 있음이 나타났다. 그리고 전개과정에서 교사는 학생들을 수준별로 묶어서 소크라테스식 대화를 통하여 분석적 사고를 계속 행하도록 중간에 점검하는 과정을 수행하였다. 이 과정을 행할 때 1차시보다 2차시에서 학생들이 더욱 적극적으로 활발히 참가하였다. 먼저, I영역에서 상수준과 중수준의 학생들은 미지수, 매개변수, 변수의 역할을 구분함으로써 매개변수를 문제 내의 다른 변수와 독립적인 것으로 파악할 수 있었으며, 하수준의 학생은 매개변수와 미지수를 구분하기 위해 식을 조작하여 해를 구하는 문항1과 비교적 문자의 역할에 대한 표현이 나타난 문항3에서는 매개변수를 미지수, 변수와는 명확히 구별하였지만, 문항2와 4를 풀 때는 교사의 도움이 필요하였다. 다음은 상수준의 학생 H9)가 자기질문 리스트의 2단계와 3단계를 활용하는 동안의 소리내어 생각하기 학습의 일부이다. 녹취록의 굵은 글씨체에서 보여지듯이 자기질문을 적극적으로 수행하여 매개변수를 미지수와 변수와 구별하였을 뿐만 아니라, 매개변수를 뜻하는 용어가 무엇인지를 교사에게 질문하여 매개변수에 대한 형식적 단계의 학습을 할 준비가 되었음을 보여준다.

1 [자기질문리스트의 2단계를 하나씩 체크하면서] 해가 2라고 하니까 방정식을 참이 되게 하나? 그렇지.

2 그러면 이 문자 x를 미지수로 해석할 수 있나?..음..할 수 있지.. 방정식의 해의 역할을 하니까..

3 그럼 미지수인데.. 어~내가 풀어본 것에는 방정식이 두 개가 나오는데..

4 음... 어떤 식에서 x를 썼었더라..[자신의 풀이과정을 살피면서] 이 문자 x는 문제 속에 들어있는 방정식의 해였으니까 문제 속에 들어있는 방정식의 미지수구나..

5 그런데 이 방정식 안에 있는 또다른 문자 a는 뭐지?

6 a는 14/3 이라는 숫자인데, 두 개이상의 문자가 관련이 있나? 있지.. x에 2를 대입하서 새로 식을 세워서.. 가만히 있자..이 식도 방정식이니까 미지수인가?

7 [자기질문리스트의 3단계를 하나씩 반성하면서] 음.. x는 일단 주어진 방정식의 미지수였었어. 그런데 지금은 상수로 바뀌었지..일단 2를 대입했으니까.. 어디보자~~역할이 변화하고 있냐는 질문에 답이 예이군..

8 그럼.. x는 미지수에서 숫자를 대신하는 문자로 바뀌었군..

9 음, a는 분명 문제의 해이니까.지금의 역할은? 미지수인가? 미지수니까 문제의 해로 a값을 구하는 거군.

10 [시간이 흐른 뒤] 혹시 a도 변화하고 있는가?라는 질문에 해당되니까..a는 처음에 뭐였지?

11 a가 처음에..[자기질문리스트를 검토하면서] 여러 가지 법칙과 공식을 설명할 때 썼던 문자인가?..음..그렇지. .y=ax+b에서 a ,b와 같은 역할을 하지..그럼 변수도 아닌데..음..이런 a같은 문자는 이름이 따로 없나?

12 선생님 질문 있어요! [a를 가리키며] 얘는 이름이 따로 없나요? 있으면 알려주세요....

9) 앞에서 살펴본 문항2의 녹취록에서, 이 학생은 정답을 선택하였으나 매개변수 k와 해x를 구분하는 것을 혼동하였다.

II영역의 문항 5에서 학생들은 자기질문 리스트의 4단계를 활용하여 매개변수를 해석해내는 과정에서 문맥을 고려하여 상, 중, 하 수준의 학생 모두 정답 [D]를 선택할 수 있었다. 아래의 중수준 학생 A[10]의 녹취록의 굵은 부분에서 보여지듯이, 학생들이 매개변수개념을 문맥의 전후관계를 파악하여 이해하고 있으며 자신이 구한 결과를 표현할 때도 문맥을 고려할 수 있음이 나타났다.

1 그럼 이 문제에서.. [자기질문리스트의 2단계와 3단계를 보고 문제를 읽기를 번갈아 하면서] 문제에 x는 미지수라고 되어있고. 실수 k? [자기질문리스트를 보고] 문자를 어떤 수로 가정할 수 있는가? 응..그럼 그 이유는? 문제에 실수K라고 써있으니까..

2 [자기질문리스트를 보고] 식을 전개하거나 정리할 때 사용한 문자인가? 그렇지..판별식 때 썼으니까.

3 [판별식을 계산하여, $K\geq 1$, $K\leq -1$을 얻은 후, 자기질문리스트를 보고] 여러 가지 법칙과 공식을 사용할 때?

그럼..당연하지~~.판별식을 썼으니까.. K는 숫자를 대신하는 문자군..

4 K는 변하는 수인가? 어~~헷갈려..[다시 리스트를 살피다가] 독립변수? 종속변수? 어~이건 아닌데.

5 [시간이 흐른 뒤, 교과서도 찾아본다] 그렇지만,, 함수에서 사용하는 변수는 아닌데..

6 [문제를 다시 읽어보고] 가장 알맞은 표현을 고르라고 했으니까..

7 [자기질문리스트를 검토하면서] 2,3단계에는 없구..아~있다..4단계에서 문제를 해결한 후 문제 해결 과정에서 사용한 문자의 의미 변화 또는 그 문맥에 맞게 말로 설명할 수 있는가? 맞아..말로 설명할 수 있지..이상..이하로 해야겠네..그럼 답이 C다....

8 [자기질문리스트의 4단계를 검토하면서] 문제의 해결과정이 조리있는가? 검토해봐야지~[자신의 풀이과정을 다시 살피면서] 어~이상하다.. 답이 D네..큰일 날 뻔했다! .‘,’는 또는 인데..... 맞나? 한번 계산해볼까?

9 [자기질문리스트를 다시 읽다가 1단계에서] 이 연산이 적절한가? 다시 계산해봐야지..

10 [판별식에서 구한 k값의 범위에서 해당하는 숫자로 2와 -2를 골라 대입하여 확인한 뒤] 둘 다 성립하니까 ‘또는’ 이 맞군..

11 [자기질문리스트의 4단계에서] 그리고 문제의 문맥(관계)을 만족하는가?..계산해보니까 ‘,’는 ‘또는’이 정답이지. 맞다! 선생님께서 이차방정식의 해나 연립방정식에서 사용되는 ‘,’는 또는 의 의미라고 하셨는데..

III영역의 문항을 풀 때, 학생들 모두는 자기질문 리스트의 2단계를 사용한 결과, 매개변수의 기울기와 y절편 등의 특정한 기하적 의미와 역할을 파악할 수 있었다. 다만, 하수준의 학생 Y가 일차함수개념을 잊고 있었지만 수업시간에 교사에게 도움을 청하여 일차함수에 대한 기본 개념을 배운 뒤 질문지의 문항을 풀었다.

마지막으로, 정리 및 차시예고 단계에서 학생들에게 각자 성찰노트를 쓰도록 하였는데, 학생들은 나름대로 새롭게 알게 되었던 사고전략이나 알게 되었던 점, 아직도 혼란스러운 내용, 이 수업의 장점과 개선점을 솔직하게 진술하였다. 특히, 상과 중수준의 학생들은 계속 이런 식으로 공부를 한다면 수학 학습에 큰 도움이 될 것 같다는 답을 하였으며, 하수준의 학생들은 수업 내용이나 과제 중 자신의 힘으로 알게 된 점을 명확하지는 못하더라도 기록하면서 문제 해결에 대한 자신감을 보였지만 수업에서 자기 스스로 생각하는 것에 적응하는 것이 힘들었다는 반응을 보였다.

---

10) I영역의 문항4에서 문자의 구문론적인 조작을 잘 하지만 의미를 명확히 이해하지 못하여 매개변수와 미지수의 역할 이동 및 구분을 혼란스러워하였던 학생이다.

본 사례연구 결과로 볼 때 제한점이 있기는 하지만, 실제 수업에 '자기질문에 의한 자기조정 수업 모형'을 적용한다면 학생들이 메타인지 사고를 습관적으로 행할 수 있기 때문에, 교수하려는 기본 개념들을 스스로 습득할 수 있도록 도울 수 있을 것으로 생각된다. 특히 문자학습에서 구문론적 조작뿐만 아니라 의미를 충실하게 이해하도록 도울 수 있다는 긍정적인 면을 볼 수 있다. 또한 소집단 협력 학습이나 개별 학습, 교사와의 중간점검용 소크라테스식 대화를 수업과정에서 잘 조직화하여 행하고, 교사의 사고행동 관찰리스트를 학생들간의 사고행동 관찰리스트로 변형하여 소집단 활동이나 토론활동 등에서 활용한다면 더욱 효과적으로 본 수업모형을 실제 현장에 적용할 수 있을 것으로 생각된다.

V. 결론

학교 대수에서 문자는 서로 다른 역할과 의미를 지닌 조작가능한 상징이며, 학생들로 하여금 자연스럽게 대수적 사고를 하도록 돕는다. 이에, 본 연구에서는 중학교 3학년생들을 대상으로 문자와 식, 방정식, 함수 문제 해결과정에서 문맥과 쓰임에 따라 다르게 사용되는 문자의 의미를 학생들이 어떻게 이해하고 있는지를, 특히 매개변수로서 문자가 이해되는 과정에 주목하여 분석하였다.

연구결과, 학생들의 매개변수 개념에 대한 이해의 실제는 다음과 같다. 중학생들은 매개변수가 문제에서 요구하는 대수적 또는 산술적 연산을 수행함으로써 조작가능하고 숫자로 구해지기 때문에, 매개변수를 대수식이나 방정식의 특별한 항이나 계수로서 역할을 하거나 일반적인 법칙을 설명할 때 사용되는 문자 정도로 인식하고 있었다. 그리고, 필요에 따라 미지수 또는 변수와는 다르게 사용될 수 있다고 암묵적으로 이해할 수 있었지만, 그에 대한 확신정도는 이미 배워 익숙한 형식으로 제시되는 경우를 제외하고는 낮은 편이었다. 또한, 대부분의 학생들은 문맥의 전후관계를 파악하여 매개변수의 의미를 표현하는 것보다 계산에 근거한 기호 조작에 능숙한 것을 볼 때 구문론적 조작과 문자의 의미를 이해하는 데에 격차가 있다는 것을 알 수 있었다. 그리고 직선의 그래프와 같이 구체적으로 제시할 때 학생들은 매개변수를 기울기, y절편 등의 의미를 부여하여 해석할 수 있었으나, 형식적인 직선의 방정식으로 제시될 때는 매개변수의 의미를 제대로 해석하지 못하였다.

매개변수로서의 문자에 대한 학생들의 이해를 보다 나은 수준으로 향상시키기 위해 학교에서 사용할 수 있는 수업 모형을 모색하고자 연구문제 2에서 "자기질문에 의한 자기조정형 수업모형"을 제안하였다. 현재의 중학교 교육과정에서 매개변수 개념은 명시적으로 제시되고 있지 않기 때문에, 문자의 역할이 문제를 해결하는 과정에서 어떻게 변화되어 가는지를 학생들이 의식화하도록 수업모형을 설계하였다. 이러한 수업의 목적은 학생들이 매개변수에 대한 문자의 의미를 스스로 파악함과 동시에 문자의 의미를 탐구하기 위해 스스로 역동적 사고를 행할 수 있도록 하는 것이다. 이를 위해 본 연구에서는 앞서 실시한 질문지 검사 결과와 인터뷰 분석을 바탕으로 메타인지 활동의 관리와 반성적 평가의 측면에서 학생들이 매개변수로 사용된 문자를 문제해결 과정에서 미지수, 변수와 구별하고 그 의미 변환을 할 수 있도록 안내하는 자기질문 리스트를 만들었다. 그리고 학생들이 사고전략을 습관화 할 수 있도록 연습할 수 있는 일반적인 수업 모형과 학생들의

사고 행동을 관찰할 수 있는 교사용 체크리스트를 제시하였다. 본 연구에서 개발한 수업모형을 5명의 학생들을 대상으로 실제로 수업해 본 결과, 이 수업 모형은 학생들로 하여금 미지수, 변수, 매개변수개념을 구분할 때, 문자를 대수의 지식 유형에 따라 분리되고 해체된 단위로서 기호 조작만을 인식하는 것이 아니라 상황별로 문자의 의미를 이해하고 그 의미들이 가역적이며, 융통성 있게 변환할 수 있다는 경험을 할 수 있는 기회를 제공할 것으로 판단되었다. 이러한 문자 학습이야말로 학생들에게 대수적 사고를 발달시킬 수 있는 출발점이 될 것이다.

마지막으로 본 연구의 제한점과 후속 연구를 위한 제안을 하고자 한다. 본 연구는 문자와 식, 방정식, 함수 단원을 어느 정도 학습한 적은 수의 학생들을 대상으로 실시한 연구로, 보다 많은 수의 학생들을 대상으로 좀 더 시간을 가지고 문자 학습의 여러 교과 내용에 일반화 시켜봄으로써 수업모형을 검증할 필요가 있다. 또한, 사고전략을 습득하기 위해서는 편안한 수업 분위기에서 사고과정을 중시하면서 배우고 가르쳐져야 한다는 것을 고려하여, 문자와 식, 방정식, 함수단원 각각에서 학습자의 수준에 알맞게 문자의 의미를 학습할 수 있도록 자기질문 리스트를 활용한 다양하고 구체적인 수업자료와 지도안을 작성하여야 할 것이다. 그리고 이를 바탕으로 실제 수업에 적용한 뒤 그 결과를 분석해 보는 후속 연구가 있어야 할 것이다.

참고문헌

김남희(1997). 일반화의 의미와 구성에 대한 이해. **대한수학교육학회논문집 7**(1), 445-458.

김성준 · 박선용(2002). 학교 수학에서의 매개변수의 역할 고찰. **학교수학 4**(3), 495-512.

김영채(1998). **사고력: 이론, 개발과 수업**. 교육과학사.

우정호(1998). **학교 수학의 교육적 기초**. 서울: 서울대학교 출판부.

최승현(1999). 수학적 오개념 발생에 관한 일고찰. **교육과정평가연구 2**.

Blanton, M. L., & Stylianou, D. A. (2003). The nature of scaffolding in undergraduate students' transition to mathematical proof. *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 2,* 113-120.

Bills, L. (2001). Shifts in the meanings of literal symbols. *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 2,* 161-168.

Bloedy-Vinner, H. (1994). The analgebraic mode of thinking - the case of parameter. In da Ponte, J. P. & Matos, J. F. (Eds.), *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education 2,* 88-95.

Bloedy-Vinner, H. (2001). Beyond unknowns and variables-parameters and dummy variables in high school algebra. In R. Sutherland et al. (Eds.), *Perspectives on school algebra.* Dordrecht: Kluwer Aca demic Publisher.

Brown, A. C., Bransford, J. D., Ferrara, R. A., & Campione, J. C. (1983). Learning, remembering and understanding. In P. H. Mussen (Ed.)., *Handbook of child psychology*, New York: John Wiley & Sons.

Flavell, J. H. (1987). Speculation about the nature and development of metacognition. In F. E. Weinert, Rainer H. Kluwe (Eds.), *Metacognition, motivation, and understanding*. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Fontana, A., & Frey, J. H. (1998). Interviewing: The art of science. In Norman K. Denzin & Yvonna S. Lincoln (Eds.), *Collecting and Interpreting Qualitative Materials* (pp. 47-78), SAGE publications, London.

Furinghetti, F., & Paola, D. (1994). Parameters, unknowns and variables: a little difference? In da Ponte, J. P. & Matos, J. F. (Eds.), *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education 2.* 368-375.

Kieran, C. (1989). A perspective on algebraic thinking. *Proceedings of the 13th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 3,* 163-171.

Kluwe, R. (1987). Executive decisions and regulation of problem solving behavior, In F. E. Weinert, Rainer H. Kluwe (Eds.), *Metacognition, motivation, and understanding.* Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Koutselini, M. & Hadjiyianni, I. (1999). Intervention in Metacognition and Learning. *Curriculum and teaching: international review of curriculum and teaching, 14*(2), 75-94

Lee, L. (1996). An initiation into algebraic culture through generalization activities. In N. Bendarz et al. (Eds.), *Approaches to Algebra* (pp. 87-106). Kluwer Academic Publishers.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bendarz et al. (Eds.), *Approaches to Algebra* (pp. 65-86). Kluwer Academic Publishers.

Schoenfeld, A. H., & Arcavi, A. (1988). On the meaning of variable. *Mathematics Teacher, 81*(6), 420-427.

Steffe, L. P., Thompson, P. W., & Glasersfeld, E. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In E. K. Anthony & R. A. Lesh (Eds.), Handbook of research design in mathematics and science education (pp. 267-306), New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Ursini, S., & Trigueros, M. (2001). A model for the uses of variable in elementary algebra. *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 1.* 153-155.

The Analysis of Students' Conceptions of Parameter and Development of Teaching-Learning Model

Lee, Chong Hee (Ewha womans university)
Kim, Bu Mi (Guwal Girls' Middle School)

In this paper, we analyze nine-grade students' conceptions of parameters, their relation to unknowns and variables and the process of understanding of letters in problem solving of equations and functions. The roles of letters become different according to the letters-used contexts and the meaning of letters is changed in the process of being used. But, students do not understand the meaning of letters correctly, especially that of parameter. As a result, students operate letters in algebraic expressions according to the syntax without understanding the distinction between the roles. Therefore, the parameter of learning should focus on the dynamic change of roles and the flexible thinking of using letters. We develop a self-regulation model based on the monitoring working question in teaching-learning situations. We expect that this model helps students understand concepts of letters that enable to construct meaning in a concrete context.

* key words: meta-cognition(메타인지), parameter(매개변수), unknown(미지수), variables(변수), preconception, self-regulation(자기조정), the teaching-learning model(교수-학습방안)