

# 차륜/레일 기하학적 접촉 시뮬레이션 프로그램 개발

## Development of a Wheel/Rail Geometric Contact Simulation Program

한형석<sup>1</sup>, 이은호<sup>2</sup>, 김재철<sup>3</sup>

Hyung-Suk Han, En-Ho Lee, Jae-Chul Kim

**Keywords** : Wheel/Rail(차륜/레일), Geometric Contact(기하학적 접촉)

### Abstract

Wheel/Rail geometric constraint relationships, such as effective conicity and gravitational stiffness, strongly influence the lateral dynamics of railway vehicles. In general, these geometric contact characteristics are nonlinear functions of the wheelset lateral displacement. There is a need to develop a wheel/rail geometric contact simulation program for wheels and rails with arbitrary profiles for the prediction of the dynamic behavior of railway vehicles. An algorithm to simulate any combination of wheels and rails is employed and a GUI for easy analysis is constructed. The simulation program is applied to KTX which will run on both KTX and conventional rails, two rail standards having different rail profiles. The results show that the two rail systems have different geometric contact characteristic

### 1. 서론

차륜과 레일의 형상에 따른 차륜/레일 기하학적 접촉 특성은 철도차량의 동적 거동과 궤도의 유지보수에 지배적인 영향을 미친다. 기하학적 접촉 특성에 따라 차량의 입계속도, 안전성 및 레일에 작용하는 횡방향 하중이 직접적으로 영향을 받는다. 그러므로 임의의 차륜, 레일 형상에 대한 기하학적 접촉 특성 시뮬레이션이 필요하다.

현재 건설중인 KTX는 이미 기하학적 접촉 특성 분석이 이루어졌을 것으로 사료된다. 그러나 영업운전에 따른 형상 변화시의 차륜/레일의 기하학적 접촉 특성을 고찰할 필요가 있다. 또한 KTX는 전용선뿐만

이 아니라 기존선을 겸용 운행할 예정이다. 기존선의 레일 형상은 KTX 전용선과 달라 기하학적 접촉 특성도 KTX의 전용선과 다를 것으로 예상된다. 기존선에는 또한 분기구간, 교차구간이 전용선에 비하여 빈도가 높다. KTX도 시간에 따라 차륜의 형상이 변화될 것이다. 그러므로 KTX의 다양한 차륜, 레일 형상에 따른 기하학적 접촉 특성을 기본적으로 검토할 필요가 있는 것이다. 향후에는 물론 기하학적 접촉뿐만 아니라 실제적인 하중을 고려할 필요도 있다. 그러므로 KTX를 비롯하여 임의의 차륜, 레일 형상에 대한 기하학적 접촉 특성 검토 방법과 검토를 위한 전용 시뮬레이션 프로그램이 필요하다.

차륜/레일의 기하학적 접촉 특성 해석 기술은 이미 개발되어 새로운 것은 아니라 할 수 있다. 물론 고도화된 접촉 특성을 계산하기 위한 알고리즘이 연구되고 있기도 한다[1-3]. 현재 차륜/레일의 기하학적 접촉 특성을 해석하기 위해서는 ADAMS/RAIL[4],

<sup>1</sup> 정회원, 한국기계연구원, 선임연구원

<sup>2</sup> 정회원, 알엠에이테크

<sup>3</sup> 정회원, 한국철도기술연구원, 선임연구원

SIMPACK[5], VAMPIRE[6]와 같은 상용 철도차량 동역학 해석 프로그램을 이용할 수 있다. 그러나 이러한 상용 프로그램들은 차륜/레일의 기하학적 접촉 해석만을 위한 것이 아니고 범용 동역학 해석이 목적인 프로그램이기 때문에 고가이며 기능이 많아 차륜/레일 기하학적 접촉 해석만을 위해서 사용하기 번거롭다고 할 수 있다. 그러므로 누구나 쉽게 차륜/레일 기하학적 접촉 특성 검토할 수 있는 프로그램이 필요하다.

본 논문에서는 임의의 형상을 갖는 차륜/레일의 기하학적 접촉 특성을 쉽게 시뮬레이션 할 수 있는 전용 프로그램을 개발하는데 목적이 있다. 기하학적 접촉 해석 알고리즘은 비선형, 비대칭 차륜/레일 형상의 접촉을 해석할 수 있는 미국 FRA의 알고리즘[7]을 이용하였고 GUI를 자체 개발하여 연계시킨다. 개발된 프로그램을 이용하여 KTX의 차륜과 KTX 전용선의 레일 UIC60, 기존선 레일의 하나인 KS50N에 적용하여 각 레일에 대한 기하학적 접촉 특성을 해석하였다. 결과적으로 본 프로그램은 쉽게 임의의 차륜/레일 형상 조합에 대한 기하학적 접촉 특성을 해석할 수 있는 장점을 갖는다.

## 2. 차륜/레일 기하학적 접촉

### 2.1 개요

차륜/레일 기하학적 접촉 특성은 차량과 궤도간의 인터페이스의 기본적 검토 사항이며 차량동역학 해석의 입력 데이터로 이용된다. 기하학적 접촉에서는 하중이나 동적 효과, 현가 요소가 고려되지 않는다. 단지 이상적인 기하학적 접촉만을 다룬다. Fig. 1은 차륜/레일의 기본적 접촉 인자 7개를 보여주고 있다. 7개의 인자는 2개의 독립변수 즉 윤축의 횡변위  $x_w$ , 윤축 요각(yaw angle)  $\theta_w$ 의 함수로 표현할 수 있다. 그러나 일반적으로  $\theta_w$ 는 접촉 인자에 2차적인 영향을 미친다[7]. 결과적으로 모든 접촉 특성 인자는  $x_w$ 만의 함수로 표시할 수 있다. 만일 요각의 영향이 무시할 수 없는 접촉 조건이라면 요각을 고려한 3차원적 접촉 인자 특성을 검토할 필요가 있을 것이다. 기본적 기하학적 접촉인자 7종은 다음과 같다.

1)  $r_L$ : 좌측 차륜의 순간 회전 반경

2)  $r_R$ : 우측 차륜의 순간 회전 반경

3)  $y_L$ : 좌측 레일에서의 순간 접촉점 높이

4)  $y_R$ : 우측 레일에서의 순간 접촉점 높이

5)  $\delta_L$ : 좌측 접촉각

6)  $\delta_R$ : 우측 접촉각

7)  $\psi_w$ : 윤축 롤 각

좌우 차륜의 회전 반경 차이는 접촉점에서 서로 다른 속도를 갖게 만들어 결과적으로 접촉력의 차이가 발생하고 그에 따라 윤축이 궤도 중심으로 조향이 되도록 하게 한다. 차륜 회전 반경 차이는 윤축의 횡방향 변위에 따라 크게 변한다. 원추형 테이퍼를 갖는 차륜은 플랜지 접촉이 일어날 때까지 윤축의 횡변위에 따라 선형적으로 회전반경 차이가 변한다. 회전 반경 차이는 차량의 안정성에 영향을 준다. 만일 유효 기울기(conicity)가 0이면 사행동(hunting)은 발생하지 않을 것이다. 그러나 거의 플랜지 접촉에 의하여 안내될 것이다. 일반적으로 유효 기울기는 불안정 효과로 동일 차량에 대하여 유효 기울기가 커지면 임계속도는 작아지게 된다[7]. 이는 유효 기울기가 증가할수록 윤축의 사행동 주파수가 올라가기 때문이다[8].

접촉각은 접촉력의 크기와 방향을 결정하게 된다. 특히 중요한 것 중 하나가 차륜/레일의 수직 접촉력의 횡방향 성분의 차이이다. 중력강성 효과라고 불리는 이 차이는 접촉각이 작을 때 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\text{gravitational stiffness force} = \text{axle load} \times \left\{ \frac{\delta_L - \delta_R}{2} + \psi_w \right\} \quad (1)$$

대부분의 경우 이 힘은 윤축이 중심위치로 움직이도록 작용한다. 만일 접촉각의 차이로 인하여 이 강성이 크면 횡방향 복원력이 그에 비례하여 발생할 것이다. 그래서 이 중력강성은 안정효과를 갖는다. 새 윤축에서는 접촉각이 플랜지 접촉이 일어나기까지 일정하다. 새 윤축 또는 마모 윤축에 대하여 롤각의 중력강성에 대한 기여는 거의 동일하다. 이 중력강성 효과는 중하중 윤축에 있어서 현가보다 복원력을 크게 제공한다. 그러나 이 효과의 안정화 영향은 경량 차량에는 거의 중요하지 않다. 일반적으로 차륜이 마

모될수록 윤축 기울기와 윤축 접축각 차이는 증가한다. 차륜 마모는 중량 차랑에 비하여 경량 차랑에 있어서 불안정 효과를 크게 만든다.

다음으로 중요한 특성 값은 롤각이다. 물론 차륜의 롤 관성은 운동방정식에 2차적 효과를 갖지만 자이로스코픽 효과를 나타내기 때문에 고속에서는 중요하다. 롤각도 윤축에 따라 크게 변한다. 롤각은 차륜의 마모에 따라 변화가 분명히 나타날 때가 있고 그렇지 않을 때가 있다. 다른 특성 값과는 달리 윤축 횡변위에 대하여 연속적으로 변하는 특징을 갖는다.

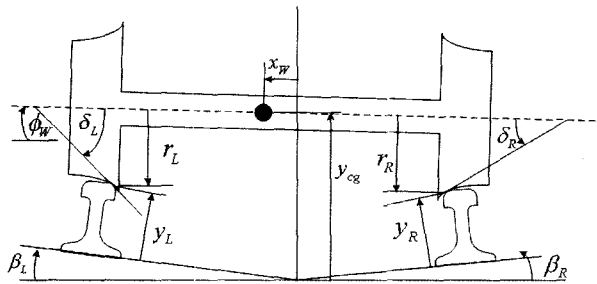


Fig. 1 Wheel/rail geometric contact parameters

### 3. 접촉 시뮬레이션 프로그램 개발

#### 3.1 접촉 해석 알고리즘

Fig. 2는 차륜/레일의 기하학적 접촉 해석을 위한 좌표계를 보여주고 있다. 모든 형상 데이터는 Fig. 2의 좌표계로 정의 된다. 본 논문에서 적용하는 기하학적 접촉 시뮬레이션 알고리즘은 참고문헌[7]을 이용하여 과정은 Fig. 3과 같다. 기하학적 접촉 해석 알고리즘은 4단계로 구성된다. 1)단계는 형상 데이터를 읽어서 4차 다항식으로 근사화시키는 것이다. 4차 다항식을 적용한 이유는 비선형 차륜/레일 형상을 근사화시키면서도 수학적으로 단순하여 형상의 기울기를 쉽게 구할 수 있기 때문이다. 여기서 주어진 형상 데이터를 이용하여 4차 다항식을 적합시킬 때 형상 전역을 모델하기 위한 다항식 계수를 구하지 않는다. 사용자가 정의한 적합에 이용되는 데이터 수(예: 5 points)를 이용하여 부 구간(sub interval)으로 나누어 각 부 구간에 대한 다항식 계수를 계산한다. 부 구간의 연속성을 만족시키기 위하여 부 구간간의 3개의

데이터를 중첩시키게 된다. 이러한 방법은 참고문헌 [7]에 의하면 실제 측정치와 잘 일치하는 것을 볼 수 있다. 다항식에 의한 적합성을 평가하기 위하여 KTX 차륜에 적용하여 입력 형상과 적합에 의한 형상을 비교하였다. Fig. 4는 그 결과로 입력 형상과 적합 형상 사이의 차이가 미미한 것을 알 수 있다. 그 차이를 정량적으로 평가하기 위하여 상관계수를 계산하였다. 상관계수는 1에 근접할수록 적합성이 좋다고 할 수 있다. KTX 차륜에 대한 상관계수는 0.99이상으로 신뢰할 만 하다고 할 수 있다. 다만 적합에 이용된 형상 데이터의 수에 따라 적합성이 변하기 때문에 적합성을 확인하는 단계를 필요로 한다. 2)단계는 반복적 비선형 방정식 해법을 이용하여 3종류의 구속 조건을 만족하는 접촉점 위치를 찾는 것이다. 첫째로는 강체 구속 조건이다. 강체 구속이므로 차륜과 레일의 접촉에 있어서 침투는 발생하지 않는다는 조건이다. 둘째로는 차륜과 레일 측에서 형상의 기울기가 같다는 것이다. 셋째로는 공간상에서의 접촉점의 위치가 차륜과 레일 측에서 같다는 조건으로 다음과 같은 조건식으로 구성된다.

$$a_r + x_{r_r} = x_w + (a_w + x_{w_r}) \cos \phi_w - r_R \sin \phi_w \quad (2)$$

$$a_r + x_{r_l} = x_w + (a_w + x_{w_l}) \cos \phi_w + r_L \sin \phi_w \quad (3)$$

$$h_{right\ wheel} = -r_R \cos \phi_w - (a_w + x_{w_r}) \sin \phi_w \quad (4)$$

$$h_{left\ wheel} = -r_L \cos \phi_w - (a_w + x_{w_l}) \sin \phi_w \quad (5)$$

$$h_{right\ rail} = y_R + x_{r_r} \sin \beta_R \quad (6)$$

$$h_{left\ rail} = y_L + x_{r_l} \sin \beta_L \quad (7)$$

윤축의 횡변위 변화에 따른 상기의 구속식을 만족하는 접촉점 위치를 반복법으로 찾게 된다. 3)단계는 2) 단계에서 구해진 접촉점을 이용하여 기본 접촉 인자 7개와 기본 접촉 인자의 조합을 계산하게 된다. 결과적으로 12종의 기하학적 접촉 인자를 계산한다.

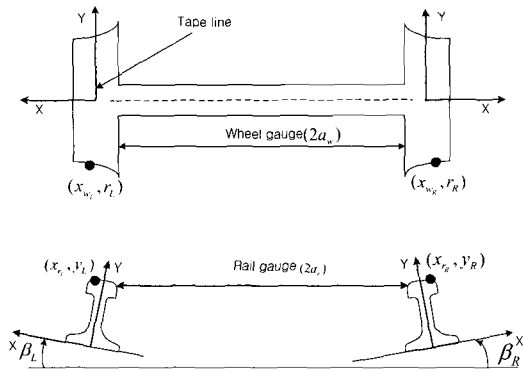


Fig. 2 Wheel/rail coordinate system

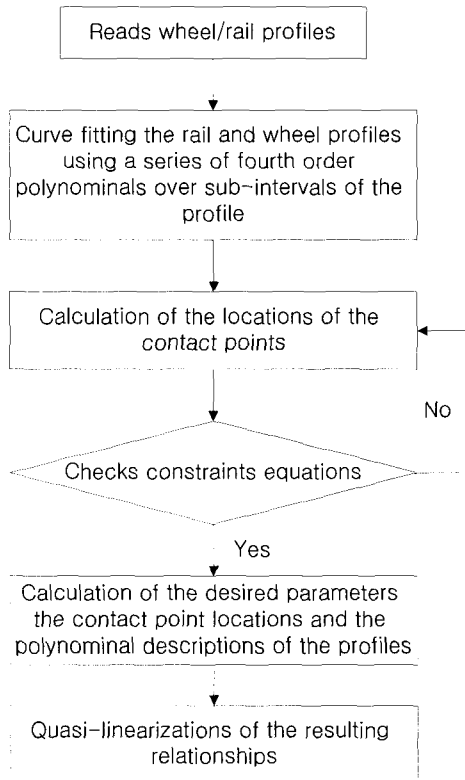


Fig. 3 Computational procedure for the wheel/rail contact analysis

(1) 회전 반경과 레일 높이

$r_R, y_R, r_L, y_L$ 은 형상 근사 곡선으로부터 계산된다.

(2) 접촉 각

$$\begin{aligned} \delta_R &= \arctan \left[ \frac{d}{dx_{w_R}(r_R)} \right] \\ \delta_L &= \arctan \left[ \frac{d}{dx_{w_L}(r_L)} \right] \end{aligned} \quad (8)$$

(3) 정규화된 회전반경 차이

$$\Delta r = \frac{r_L - r_R}{2a_r} \quad (9)$$

(4) 정규화된 접촉각 차이

$$\Delta \delta = \frac{\delta_L - \delta_R}{2} \quad (10)$$

(5) 롤각

$$\phi_w = \arctan \frac{(y_L - y_R) + x_{r_L} \sin \beta_L - (2a_w + x_{w_R} + x_{w_L}) \cos \phi_w}{x_{r_R} \sin \beta_R + (r_L - r_R) \cos \phi_w} \quad (11)$$

(6) 윤축 질량중심 변위

$$y_{cR} = 1/2 [y_L + y_R + x_{r_L} \sin \beta_L + x_{r_R} \sin \beta_R + (r_L + r_R) \cos \phi_w] - 1/2 [y_L + y_R + x_{r_L} \sin \beta_L + x_{r_R} \sin \beta_R + (r_L + r_R) \cos \phi_w]_{x_w=0} \quad (12)$$

(5) 형상 곡률 반경

$$\begin{aligned} R_{wheel} &= \frac{[1 + (\frac{d}{dx_{w_R}}(r_R))^2]^{3/2}}{-\frac{d^2}{dx_{w_R}^2}(r_R)} \\ L_{wheel} &= -\frac{[1 + (\frac{d}{dx_{r_L}}(y_L))^2]^{3/2}}{-\frac{d^2}{dx_{r_L}^2}(y_L)} \end{aligned} \quad (13)$$

4)단계는  $\Delta r, \Delta \delta, \phi$ 에 대한 준 선형화이다. 선형화 하고자 하는 함수  $f(x)$ 의 준 선형화 공식은 식(14)와 같이 정의된다. 그러므로 4)단계에서 방정식 (14)를 이용하여 선형화된  $\Delta r, \Delta \delta, \phi$ 을 계산함으로써 한 윤축의 횡변위에 대한 차륜/레일 접촉 특성을 모두 구한 후 윤축 횡변위를 증가시켜서 상기의 4단계를 반복하게 된다.

$$\begin{aligned} Y_q &= \frac{4}{\phi A^2} \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \left( \sin^{-1} \frac{X_2}{A} - \sin^{-1} \frac{X_1}{A} \right) \\ &+ \frac{f(x_2) + f(x_3)}{2} \left( \sin^{-1} \frac{X_3}{A} - \sin^{-1} \frac{X_2}{A} \right) \\ &+ \frac{f(x_1) + f(x_{n-1})}{2} \left( \sin^{-1} \frac{X_n}{A} - \sin^{-1} \frac{X_{n-1}}{A} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

여기서,

$$x_1 = 0, x_n = A$$

상기에서 설명한 차륜/레일 접촉 특성 계산 알고리즘은 참고문헌 [7]에서의 같이 다양한 종류의 차륜/레일 기하학적 접촉 해석에 적용하여 검증되었다. 검증에는 실험이 이용되었으며 해석에 이용되는 FORTRAN 코드가 공개되어 철도차량 동역학 해석 프로그램에 이용되고 있다. 본 논문에서는 상기의 차륜/레일 기하학적 접촉 알고리즘과 관련 서브루틴을 이용하였다. 본 논문에서는 기하학적 접촉 해석 알고리즘과 서브루틴은 참고문헌 [7]을 이용하면서 GUI와 통합하기 위하여 일부 수정하여 사용하였다. 본 논문에서 개발된 차륜/레일 기하학적 접촉 시뮬레이션 프로그램(W/RAIL)의 신뢰성을 평가하기 위하여 철도차량 전용 동역학 해석 프로그램 VAMPIRE와 비교를 수행하였다. 비교를 위하여 VAMPIRE에서 이용한 형상 데이터를 그대로 적용하였다. Fig. 5는 차륜/레일 접촉 해석 결과 중 우측 차륜의 회전반경을 보여주고 있다. 두 프로그램의 결과가 전체적으로 유사한 경향을 보여주고 있다. 그러나 플랜지 접촉에서부터는 약간의 차이를 보이고 있다. 이러한 차이의 원인은 이용된 형상 데이터 수에 의한 것으로 판단된다. 본 논문에서 적용한 알고리즘에서는 VAMPIRE에서 이용한 형상 데이터 수보다 많을 때 안정함을 보이기 때문이다. 그러므로 이용되는 데이터 수, 다항식의 차수에 의한 형상의 적합성을 미리 확인하는 단계가 요구된다.

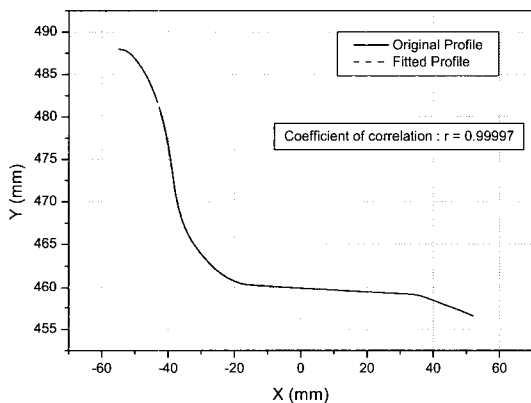


Fig. 4 KTX wheel profiles

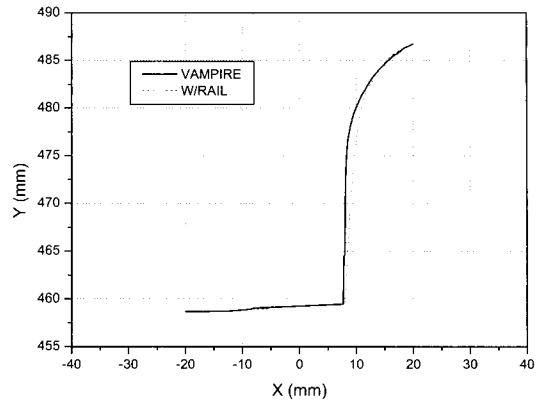


Fig. 5 Rolling radii

### 3.2 GUI 개발

3.1에서 설명한 차륜/레일 기하학적 접촉 해석프로그램을 이용하기 위하여 차륜/레일 기하학적 접촉 시뮬레이션 전용 GUI를 개발하였다. 본 프로그램의 특징은 구조가 간단하며 차륜/레일 기하학적 접촉 해석 전용으로 사용하기 쉬운 장점을 가진다는 것이다. Fig. 6은 프로그램의 구조를 보여주고 있다. 크게 3부분으로 Compute 부분은 차륜 형상, 레일 형상, 레일의 기울기, 궤간과 수치계산에 필요한 상수들을 입력하여 접촉 해석을 수행하는 기능을 갖는다. Result View and analysis는 계산된 접촉 특성 값을 그래프와 2차원 애니메이션으로 결과를 가시화하는 기능을 수행한다. 여기서 좌우측 차륜의 접촉 애니메이션과 동시에 그래프에서의 위치를 표시하여 사용자가 가시적으로 접촉 특성을 분석할 수 있도록 한다. Multi result view and analysis는 3종류까지의 상이한 형상의 접촉 특성을 비교하는 기능을 가진다. Fig. 7은 결과 분석 화면으로 그래프 영역, 애니메이션 영역, 특성 값 표시 영역으로 구분되어 있다. 현재 12종의 접촉 인자 값을 표시한다.

- (1) Wheel contact position
- (2) Rail contact position
- (3) Wheel rolling radii
- (4) Rail head profile height
- (5) Wheelset contact angle
- (6) Wheel rolling curvature

- (7) Normalized rolling radii difference
- (8) Normalized contact angle difference
- (9) Wheelset roll angle
- (10) Wheelset vertical displacement
- (11) Wheel transverse curvature
- (12) Rail transverse curvature

4. KTX 접촉 특성 분석

3장에서 개발한 차륜/레일 접촉 시뮬레이션 프로그램을 이용하여 KTX의 차륜/레일 접촉 특성을 해석하였다. KTX의 차륜은 윤축 내면거리 1356 mm의 NFF0112이며 레일은 KTX 전용궤도 1/20 UIC60과 기존선의 레일 중 하나인 1/40 KS50N이다. 차륜/레일 형상은 Fig. 8에서 보는 바와 같고 차이는 KS50N의 레일 헤드 폭이 UIC60에 비하여 좁다는 것이다. 해석 결과 중 차량의 임계속도에 영향을 주는 정규화된 차륜 회전반경 차이가 Fig. 9에 나타나 있다. 정규화된 차륜 회전반경 차이는 유효 기울기를 나타낸다. 특히 사향으로는 KS50N에서는 플랜지 접촉 이전 영역에서 기울기가 크다는 것이다. 이것은 곧 유효 기울기가 큰 것을 의미한다. 반면에 UIC60에서는 플랜지 접촉 이전 영역에서는 기울기가 작다. 일반적으로 동일 차량에 대하여 유효 기울기가 클수록 임계속도가 작은 것을 고려할 때 임계속도 측면에서 볼 때 기존선에서의 임계속도가 KTX 전용선에 비하여 작을 것으로 예상된다. 플랜지 접촉은 UIC60은 약 7 mm에서 발생하고 KS50N은 UIC60에 비하여 4~5 mm 후에 발생하는 것을 알 수 있다. Fig. 10은 정규화된 접촉각 차이를 보여주고 있다. 보는 바와 같이 약 3 mm 까지는 두 형상 모두 0 값을 나타내 그 이후부터는 다른 경향을 보이고 있다. UIC60은 6.4 mm까지 음의 값을 나타내다 증가하고 있으나 KS50N은 3 mm부터 증가하기 시작한다. 이는 KS50N이 UIC60에 비하여 접촉각 차이가 먼저 발생 즉 횡방향 하중차이가 미리 발생하기 시작하는 것을 알 수 있다. Fig. 11은 윤축 롤각으로 KS50N의 변화가 UIC60에 비하여 약 3 mm 이후에 생기는 것을 알 수 있다. 이상과 같이 KTX가 전용선과 기존선을 겸용 운행할 때 차륜/레일의 인터페이스 즉 접촉 특성이 다른 것을 확인할 수 있다.

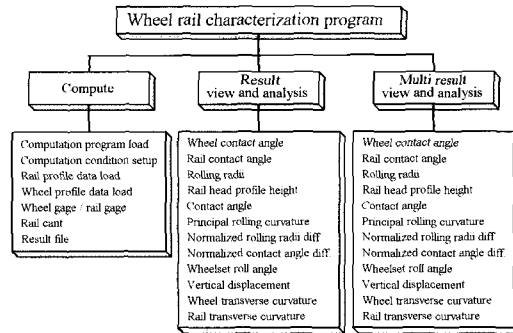


Fig. 6 Structure of GUI

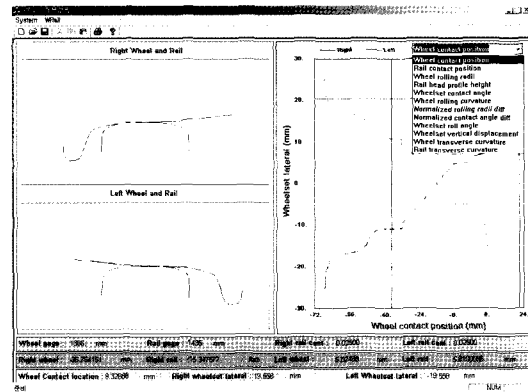


Fig. 7 GUI for Wheel/Rail contact simulation

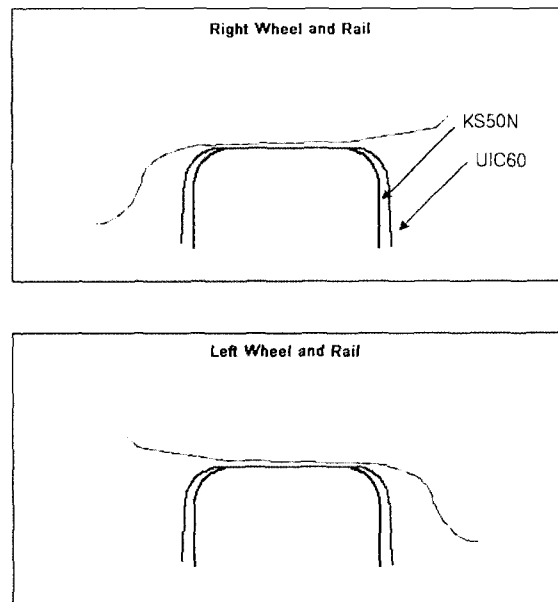


Fig. 8 Wheel/Rail profiles

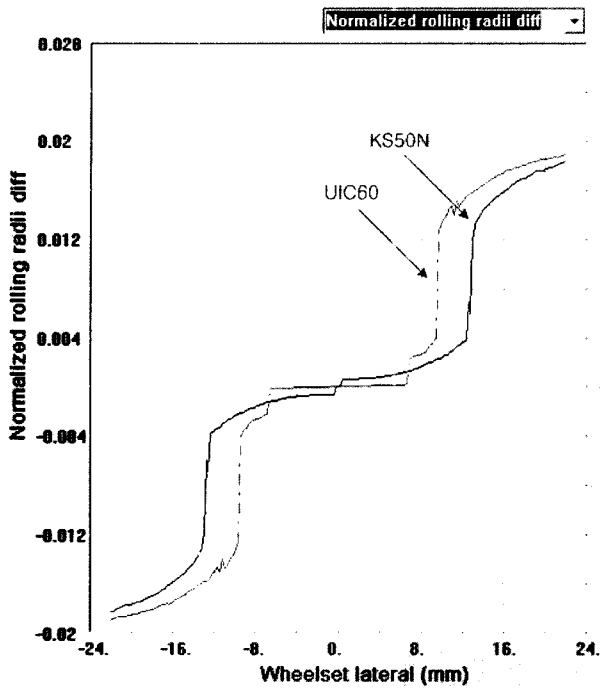


Fig. 9 Normalized rolling radii difference

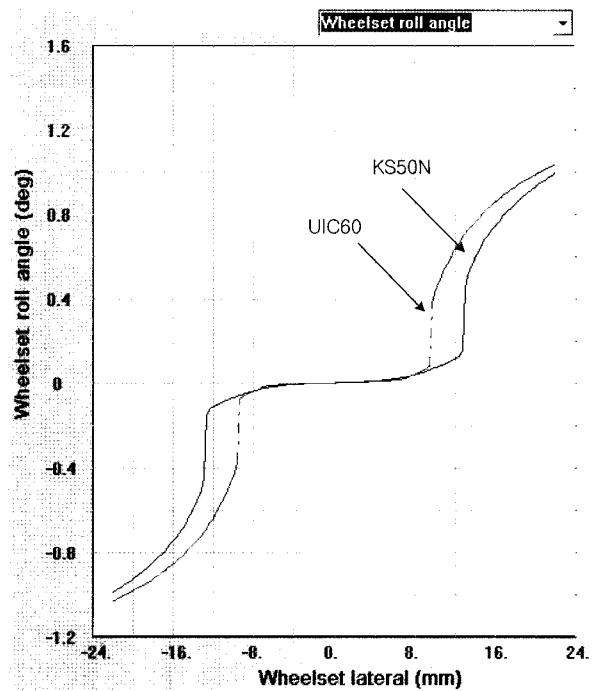


Fig. 11 Wheelset roll angle

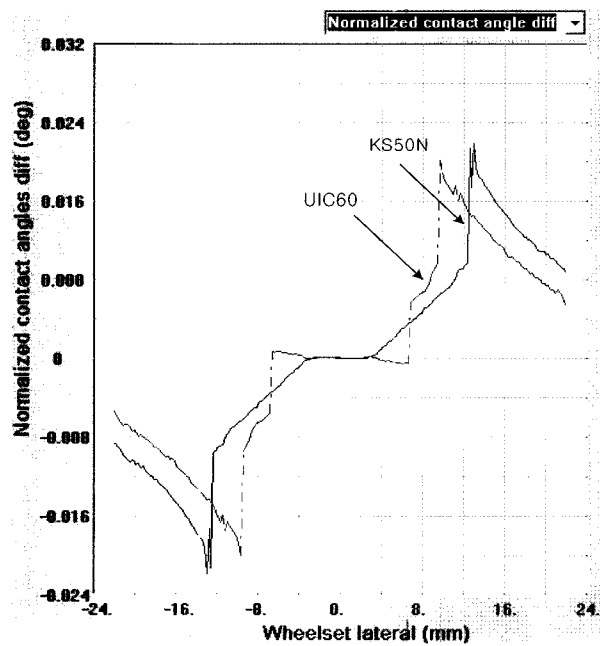


Fig. 10 Normalized contact angle difference

### 5. 결론

본문에서는 임의의 차륜/레일의 기하학적 접촉 시뮬레이션 프로그램 개발 결과를 소개하였다. 접촉 해석 알고리즘은 임의의 비대칭, 비선형 형상을 고려할 수 있으며 전용 GUI 개발로 쉽게 사용할 수 있다. 그 결과를 이용하여 KTX에 적용하여 KTX 전용선과 기존선에서의 기하학적 접촉 특성을 검토할 수 있었다. 검토 결과 기존선에서의 플랜지 접촉이 전용선에 비하여 운측 횡변위로 약 4 mm 차이를 보이고 12개 접촉 인자가 다른 경향을 나타내고 있음을 알 수 있었다. 이러한 결과는 동적 거동에서 다른 결과를 나타낼 것임을 예상할 수 있게 한다. 본 해석 프로그램은 임의의 형상을 고려할 수 있으므로 마모차륜, 마모 레일 및 분기구간과 같은 특이 구간에서의 접촉 특성 해석도 가능하게 된다. 결과적으로 본 논문의 결과를 활용한다면 고가의 철도차량 전용 해석 프로그램 없이 쉽게 차륜/레일 기하학적 접촉 해석을 수행할 수 있을 것으로 기대된다.

## 후 기

본 연구는 한국고속철도건설공단의 2002년 고속철도 건설지원사업 연구비로 수행되었음을 밝히며 본 연구의 지원에 대하여 감사드립니다.

## 참 고 문 헌

1. Burton, T. D. and Whitman, A.M., "Nonlinear Kinematics of Wheel-Rail Contact", J. of Applied Mechanics, Vol. 45, pp.664-668, 1978.
2. 박정훈, 임진수, 황요하, 김창호, "차륜/레일간의 접촉력 계산을 위한 접촉점 해석 알고리즘", 한국철도학회 논문집, 제2권 제3호, pp.1-8, 1999.
3. Grag, V. K., 1, "Dynamics of Railway Vehicle Systems", Academic Press, 1984.
4. <http://www.adams.com/>
5. <http://www.simpack.de/>
6. BR Research, VAMPIRE User Manual, 1997.
7. Cooperrider N. K., Law, E. H., Hull, P. S., Kadala, P. S., Tuten, J. M., "Analytical and Experimental Determination of Nonlinear Wheel/Rail Geometric Constraints", Report No. FRA-OR & D, 1975.
8. Wormley, D., Hedrick, K., Horak, D., and Bell, C., Rail Passenger Vehicle Truck Design Methodology, REPORT No. FRA/ORD-81/11, 1981.