

다수의 탄성지지대 위를 이동하는 보 구조물의 동특성 해석

Dynamic Characteristics of the Beam Axially Moving Over Multiple Elastic Supports

김태형¹ 이우식²

Taehyoung Kim Usik Lee

Keywords : Moving Beam(이동하는 보), Dynamic Characteristics(동특성), Elastic Support(탄성지지), Spectral Element(스펙트럴요소), Critical Moving Speed(임계이동속도)

ABSTRACT

This paper investigates the dynamic characteristics of a beam axially moving over multiple elastic supports. The spectral element matrix is derived first for the axially moving beam element and then it is used to formulate the spectral element matrix for the moving beam element with an interim elastic support. The moving speed dependance of the eigenvalues is numerically investigated by varying the applied axial tension and the stiffness of the elastic supports. Numerical results show that the fundamental eigenvalue vanishes first at the critical moving speed to generate the static instability.

1. 서론

축방향으로 이동하는 구조물의 예로서 컨베이어 벨트, 체인, 마그네틱 테이프 등이 있다. 특히, 컨베이어 벨트는 다수의 지지대 위를 이동하는 구조물의 경우에 해당하며, 철도 레일과 같은 구조물은 이동속도가 없는 특별한 경우로서 생각할 수 있다. 축방향으로 이동하는 구조물의 고유진동수와 동특성은 이동속도에 따라 많은 영향을 받으며, 특정 임계 이동속도에서 불안정 동적현상이 발생할 수 있으므로 이에 대한 연구가 그 동안 많은 연구자들에 의해 이루어져왔다.

축방향으로 이동하는 1차원 구조물의 동특성을 해석하기 위해 현(string)모델과 보(beam)모델이 널리 사용되어 왔다. 축방향으로 이동하는 보에 관해 Simpson[1]은 모우드와 고유진동수, Mote[2]는 Galerkin법으로 안정성을 연구하였고, Wickert와 Mote[3]는 축방향으로 이동하는 현과 보에 관해

Green함수법을 이용하여 안정성을 고찰하였다. 탄성지지대 위로 이동하는 구조물에 대한 연구는 Lee와 Mote[4], Riedel과 Tan[5], 그리고 Safed[8] 등에 의해 이루어졌다. 중간에 스프링-질량-감쇠의 지지대를 갖는 현에 대해서는 Lee와 Mote[4]가 현의 진행파(travelling wave)를 이용하여 모달해석을 수행하였다. Riedel과 Tan[5]은 현과 보의 중간에 하나의 스프링 지지대를 갖는 경우에 대해 전달함수법(transfer function method)을 이용하여 동특성과 안정성해석을 수행하였으며, Safed[8]는 파동전달행렬(wave transfer matrix)을 이용하여 다수의 스프링으로 지지된 현의 고유진동수를 고찰하였다. 장력과 이동속도가 고려되지 않은 경우, 다수의 스프링으로 지지된 보에 관해 Lin[6]은 차분방정식을 이용하여 고유진동수를 해석하였고, Bergman[7]은 Green함수법을 이용하여 모달해석을 수행하였다.

본 논문에서는 탄성지지대와 이동하는 보-구조물

사이의 연성(coupling)을 모델링 하기 위해 4극 매개 변수법(four pole parameters method)[9]을 이용하였고, 탄성지지대 위를 이동하는 보-구조물의 정확한 형상함수를 이용하여 이동하는 보 요소에 대한 스펙트럴요소모델을 유도하였다. 기존의 수치예제 결과와 본 연구에서 개발한 스펙트럴요소모델을 이용한 결과를 상호 비교하여 스펙트럴요소모델의 정확성을 확인하였다. 또한, 개발된 스펙트럴요소모델로 탄성지지대 위로 이동하는 보-구조물의 동특성을 해석하였고, 수치해석을 통해 임계이동속도를 구하였으며 임계이동 속도 전후의 동특성을 고찰하였다.

2. 중간에 탄성지지부가 없는 경우

일정한 속도 c 의 크기로 축방향으로 이동하는 베르누리-오일러(Bernoulli-Euler) 보의 운동방정식을 해밀턴의 원리(Hamilton's principle)를 이용하여 다음과 같이 유도할 수 있다[1;3].

$$EIw'''' - Nw'' + \rho A(\ddot{w} + 2c\dot{w}' + c^2w'') = p(x, t) \quad (1)$$

여기서, w 는 진동변위, w' 는 기울기, ρA 는 단위 길이 당의 질량, EI 는 보의 강성계수, N 는 축방향 장력, $p(x, t)$ 는 균일분포하중이다. 또한, 경계조건은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} w(0) &= w|_0 \quad \text{or} \quad Q(0) = -Q|_0 \\ w'(0) &= w'|_0 \quad \text{or} \quad M(0) = -M|_0 \\ w(L) &= w|_L \quad \text{or} \quad Q(L) = Q|_L \\ w'(L) &= w'|_L \quad \text{or} \quad M(L) = M|_L \end{aligned} \quad (2)$$

여기서, L 은 보의 길이이며, 전단력 Q 와 굽힘모멘트 M 은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} Q(x) &= -EIw''' - \rho Ac(\dot{w} + cw') + Nw' \\ M(x) &= EIw'' \end{aligned} \quad (3)$$

이동하는 보가 자유진동을 한다고 가정하여 식(1)에서 $p(x, t)$ 를 소거하고, 진동변위 $w(x, t)$ 를 Fourier 급수로 나타내면 다음과 같다.

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^N \overline{W}_n(x) e^{i\omega_n t} \quad (4)$$

여기서, ω_n 은 주파수이며 \overline{W}_n 은 주파수 ω_n 에서의 진동 변위 스펙트럼을 나타낸다. 식(4)를 식(1)에 대입하면 주파수 ω_n 를 매개변수로 한 \overline{W}_n 에 관한 상미분 방정식을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$EI\overline{W}'''' - (N - \rho Ac^2)\overline{W}'' + 2\rho Ac\omega i\overline{W}' - m\omega^2 = 0 \quad (5)$$

식(5)의 일반해를 $\overline{W}(x) = A e^{-ikx}$ 로 가정하여 대입하면 이동하는 보의 굽힘 탄성과동에 관한 분산관계식(dispersion equation)을 유도할 수 있다.

$$k^4 + ak^2 + \beta k - \gamma = 0 \quad (6)$$

여기서, k 는 파수(wave number)이며 a, β , 그리고 γ 는 다음과 같이 각각 정의된다.

$$a = \frac{N - \rho Ac^2}{EI}, \quad \beta = \frac{2\rho Ac\omega}{EI}, \quad \gamma = \frac{\rho A\omega^2}{EI} \quad (7)$$

식(6)으로부터 구한 4개의 근, 즉 파수를 이용하여 식(5)의 파동해(wave solution)를 구할 수 있으며, 이를 이용하여 식(3)으로부터 스펙트럴요소에서의 전단력과 굽힘모멘트를 각각 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \overline{W}(x) &= \sum_{j=1}^4 A_j e^{-ik_j x} \\ \overline{\theta}(x) &= -i \sum_{j=1}^4 k_j A_j e^{-ik_j x} \\ \overline{Q}(x) &= - \sum_{j=1}^4 b_j A_j e^{-ik_j x} \\ \overline{M}(x) &= \sum_{j=1}^4 c_j A_j e^{-ik_j x} \end{aligned} \quad (8)$$

여기서, b_j 와 c_j 는 파동해가 식(1)을 만족하도록 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} b_j &= iEI k_j^3 + i(N - \rho Ac^2)k_j + i\rho Ac\omega \\ c_j &= EI k_j^2 \end{aligned} \quad (9)$$

Fig. 1에 표현된 보의 유한요소에서의 절점 자유도와 전단력, 및 굽힘모멘트는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \overline{W}_0 &= \overline{W}(0), & \overline{\theta}_0 &= \overline{\theta}(0) \\ \overline{W}_L &= \overline{W}(L), & \overline{\theta}_L &= \overline{\theta}(L) \\ \overline{Q}_0 &= -\overline{Q}(0), & \overline{M}_0 &= -\overline{M}(0) \\ \overline{Q}_L &= \overline{Q}(L), & \overline{M}_L &= \overline{M}(L) \end{aligned} \quad (10)$$

식(10)에 의해 절점자유도벡터 {d}와 상수벡터 {A} 사이의 관계, 그리고 절점에서의 외력벡터 {f}와 상수벡터 {A} 사이의 관계를 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\{d\} = [N(\omega)]\{A\}, \quad \{f\} = [P(\omega)]\{A\} \quad (11)$$

여기서,

$$\{d\} = \{ \overline{W}_0 \quad \overline{\theta}_0 \quad \overline{W}_L \quad \overline{\theta}_L \}^T$$

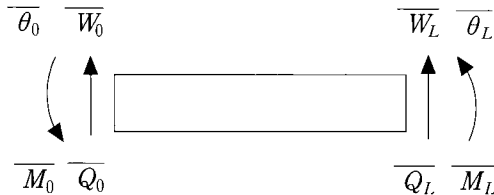


Fig. 1 Sign convention for the finite Bernoulli-Euler beam element

$$\begin{aligned} \{A\} &= \{ A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad A_4 \}^T \\ \{f\} &= \{ \overline{Q}_0 \quad \overline{M}_0 \quad \overline{Q}_L \quad \overline{M}_L \}^T \end{aligned} \quad (12)$$

$$[N(\omega)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ a_1 e_1 & a_2 e_2 & a_3 e_3 & a_4 e_4 \end{bmatrix}$$

$$[P(\omega)] = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ -c_1 & -c_2 & -c_3 & -c_4 \\ b_1 e_1 & b_2 e_2 & b_3 e_3 & b_4 e_4 \\ c_1 e_1 & c_2 e_2 & c_3 e_3 & c_4 e_4 \end{bmatrix}$$

$$e_j = e^{-ikL}, \quad a_j = -ik, \quad (j=1, 2, 3, 4)$$

식(11)의 두 식에서 상수벡터 {A}를 소거하여 절점력과 절점 자유도 사이의 관계를 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\{f\} = [P(\omega)][N(\omega)]^{-1}\{d\} = [S(\omega)]\{d\} \quad (13)$$

여기서, [S(ω)]가 축방향으로 이동하는 단순 보 요소에 대한 스펙트럴요소행렬이다.

3. 중간에 하나의 탄성지지부를 갖는 경우

여기에서는 이동하는 보의 중간에 스프링 요소로 표현되는 하나의 탄성지지부가 있는 경우에 대한 스펙트럴요소를 앞 장에서의 결과를 응용하여 유도하고자 한다. 여기에서 유도되는 스펙트럴요소는 Fig. 2에 보인 것과 같은 다수의 탄성지지부를 갖는 보 구조물을 보다 손쉽게 다루기 위한 기본 스펙트럴요소로서 사용할 수 있다.

Molloy가 제안한 4극 매개변수법[9]은 비교적 이론적 모델링이 어렵고 복잡한 구조물을 등가질량, 등가강성, 그리고 등가감쇠로써 모델링하여 동특성을 해석하는 방법이다. 4극 매개변수법에 따른 힘과 변위의 관계는 일반적으로 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{bmatrix} \overline{Q}_1 \\ \overline{Q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{W}_1 \\ \overline{W}_2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

스프링 상수가 k인 스프링 요소를 4극 매개변수법으로 나타내면 식(14)에 보인 행렬의 각 성분은 $z_{11}=k, z_{12}=-k, z_{21}=k, z_{22}=-k$ 가 된다.

전체 길이가 L인 이동하는 보의 중앙에 하나의 스프링 탄성지지대가 설치되어 있는 경우를 생각한다. 이 경우, 해당 보-구조물은 스프링 탄성지지대를 중심으로하여 좌우에 위치하는 길이가 L/2인 2개의 보 요소와 중앙의 스프링 요소로 구성되어 있다고 생각할 수 있다. 따라서, 해당 보-구조물 전체에 대한 스펙트럴요소행렬은 길이가 L/2인 좌우 2개의 보 요소에 대한 스펙트럴요소행렬과 식(14)로부터 유도할 수 있는 스프링 요소에 대한 스펙트럴요소행렬을 FEM에서와 동일한 방법으로 어셈블링(assembly)한 후 정리하여 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\{f_B\} = [S_B(\omega)]\{d_B\} \quad (15)$$

여기서,

$$\{f_B\} = \{ \overline{Q}_1 \quad \overline{M}_1 \quad \overline{Q}_2 \quad \overline{M}_2 \quad \overline{Q}_3 \quad \overline{M}_3 \}^T$$

$$\{d_B\} = \{ \overline{W}_1 \quad \overline{\theta}_1 \quad \overline{W}_2 \quad \overline{\theta}_2 \quad \overline{W}_3 \quad \overline{\theta}_3 \}^T$$

$$[S_B] = \begin{bmatrix} s_{11}^1 & s_{12}^1 & & s_{13}^1 & s_{14}^1 & 0 & 0 \\ & s_{22}^1 & & s_{23}^1 & s_{24}^1 & 0 & 0 \\ & & & s_{33}^2 + s_{11}^2 + z_{11} & s_{34}^2 + s_{12}^2 & s_{13}^2 & s_{14}^2 \\ & & & & s_{44}^2 + s_{22}^2 & s_{23}^2 & s_{24}^2 \\ & & & & & s_{33}^2 & s_{34}^2 \\ & & & & & & s_{44}^2 \\ & & & & & & & s_{44}^2 \end{bmatrix}$$

식(16)의 절점 자유도 벡터와 절점력 벡터에서 아래 첨자 1, 2, 3은 보의 좌측 끝단, 중앙, 우측 끝단에서의 절점을 나타낸다. 또한, 스펙트럴요소행렬 $[S_B]$ 의 성분 표기에서 위 첨자 1과 2는 스프링 탄성지지부를 중심으로 하여 좌측과 우측에 위치하는 길이가 $L/2$ 인 각 보 요소에 대한 스펙트럴요소행렬의 성분을 나타낸다.

중간에 스프링 탄성지지부를 갖는 이동하는 보-구조물의 고유진동수 ω_{NAT} 는 스펙트럴요소행렬의 행렬식이 고유진동수에서 0의 값을 갖는다는 아래의 조건식으로부터 계산할 수 있다.

$$\det[S_B(\omega_{NAT})] = 0 \tag{17}$$

4. 수치 예제

먼저 본 연구에서 다루어진 스펙트럴요소모델 자체의 정확성을 평가하기 위한 목적으로 Bergman[7]이 자신의 연구에서 수치예제로 다룬 바 있는 동일한 보-구조물을 수치예제로서 생각하였다. 해당 보-구조물은 Fig. 2에 보인 바와 같이 5개의 스프링 탄성지지대가 설치되어 있다. Bergman[7]은 축 방향으로의 이동과 장력이 없다고 가정하였으므로 그가 구한 엄밀해와 비교하여 본 SEM결과의 정확성을 검증하기 위하

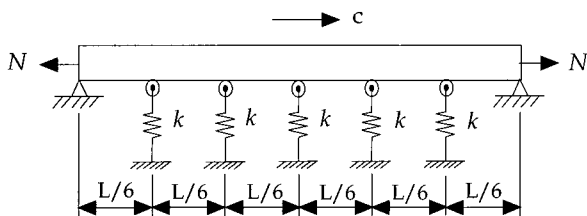


Fig. 2 The beam axially moving over multiple elastic supports

여 축방향의 이동속도와 장력을 모두 영으로 하였다. Fig. 1에 보인 보-구조물의 전체 길이는 $L = 1.2m$, 단위 길이당 질량은 $\rho A = 0.81kg/m$, 굽힘강성은 $EI = 180N \cdot m^2$ 이고 탄성지지대의 스프링 상수는 $k = 225 N/m$ 이다.

Table 1은 스펙트럴요소법(SEM)으로 구한 무차원 고유치(고유진동수) $\lambda = \sqrt{\rho AL^4 \omega^2 / EI}$ 를 유한요소법(FEM)과 전달행렬법(TMM)으로 구한 결과 및 Bergman[7]가 Green함수법으로 구한 엄밀해와 비교한 것이다. Table 1의 FEM 결과는 보의 한 스패를 4개의 유한요소로 분할하여 얻은 것이다. 본 연구에서 SEM으로 구한 고유진동수는 Bergan[7]가 구한 엄밀해와 일치하며, 본 연구에서 TMM을 이용하여 엄밀하게 계산한 결과와도 모두 일치함을 확인할 수 있다.

보-구조물의 이동속도, 축 방향 장력 및 탄성지지대의 스프링 상수의 크기가 보-구조물의 진동특성에 미치는 영향을 Fig. 2에 보인 예제를 이용하여 고찰하였으며 그 결과를 Figs. (3~5)에 보이고 있다.

Fig. 3(a)는 장력의 변화에 따른 첫 번째 고유치의 변화를 이동속도의 함수로 보인 것이다. 장력이 인장으로 작용하는 경우 고유치(고유진동수)가 증가하고 압축으로 작용하는 경우 감소하는 것을 알 수 있으며, 모든 경우에 이동속도를 증가시키면 고유치가 감소하다가 임계 이동속도에서 영의 값을 갖게 됨을 알 수 있다. 임계 이동속도는 $\omega = 0$ 에서 발생하므로 $\det[S_c(\omega=0)] = 0$ 을 만족하는 조건으로부터 수치적으로 확인할 수 있다. 여기서, $[S_c]$ 는 Fig. 2에 보인 보-구조물에 대한 스펙트럴요소행렬을 나타낸다. Fig. 3(b)는 장력을 고정시키고 대신에 탄성지지대의 스프링 상수를 변화시키면서 첫 번째 고유치의 변화를 이동속도의 함수로 보인 것으로서 탄성지지대의 스프링 상수 값이 클수록 고유치가 증가하고 임계이동속도도 동시에 증가함을 볼 수 있다.

Table 1 Eigenvalues λ

Methods	Mode Number							
	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	8th
Bergman[7]	3.241	6.296	9.429	12.568	15.709	18.850	21.991	25.133
SEM	3.241	6.296	9.429	12.568	15.709	18.850	21.991	25.133
TMM	3.241	6.296	9.429	12.568	15.709	18.850	21.991	25.133
FEM	3.241	6.296	9.429	12.568	15.710	18.852	21.997	25.143

Fig. 4는 장력과 탄성지지대의 스프링 상수를 일정한 값으로 고정했을 때 이동속도에 따른 3개 저차 고유치의 변화를 보인 것이다. Fig. 2에서 관찰한 바와 같이 이동속도의 증가에 따라서 고유치가 점차 감소하다가 임계이동속도에 이르면 모두 영의 값으로 수렴해 가는 것을 재확인할 수 있다.

Fig. 2와 3에서 보인 바와 같이 이동속도가 첫 번째 임계이동속도에 다다르면 첫 번째 고유치(고유진동수)가 사라지고 이 순간에 정적 불안정 현상인 다이버전스가 발생하여 응답이 발산하게 된다. Fig. 5는 Fig. 2의 좌측 끝단으로부터 전체 보 길이의 1/3의 위치에 크기가 10 N인 수직 하중을 초기 0.003초 동안 지속적으로가진하여 발생한 진동응답을 보-구조물의 중간 위치에서 계산한 것으로서 이동속도의 크기에 따라 비교한 것이다. 이동속도가 임계속도에 이르면 예상했던 바와 같이 진동응답이 거의 정적으로 발산함을 볼 수 있다.

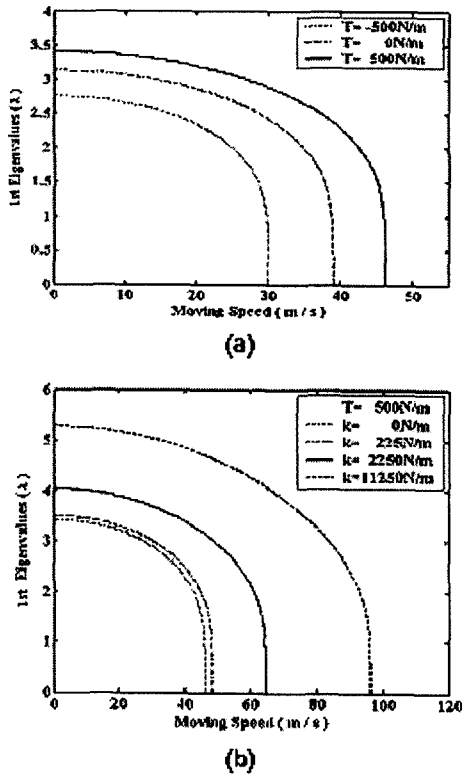


Fig. 3 Eigenvalues vs. moving speed

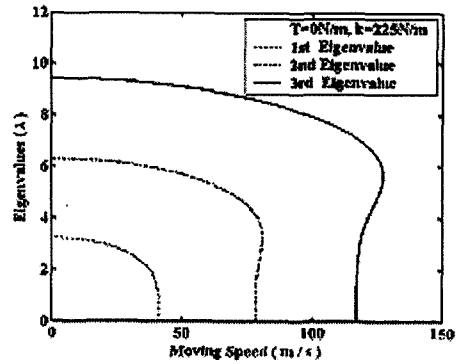


Fig. 4 Eigenvalues vs.

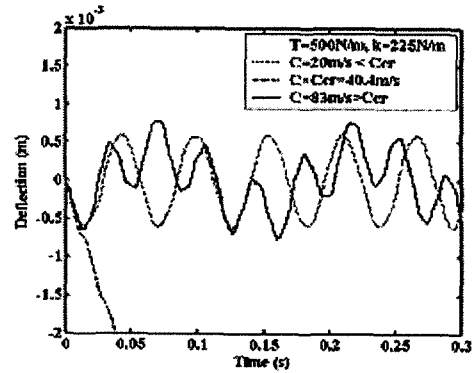


Fig. 6 Dynamic response of an axially moving beam over multiple elastic supports at the center

5. 결론

본 논문에서는 일정한 장력과 속도로 이동하는 오일러보의 운동방정식을 유도하였고, 탄성지지부와 이동하는 보의 연성을 위해 4극 매개변수법을 이용하였으며 엄밀한 동적 형상함수를 이용하여 스펙트럴요소모델을 유도하고, 기존의 결과와 비교하여 본 논문에서 개발된 스펙트럴요소의 정확성을 확인하였다. 또한, 장력과 속도가 있을 때 동특성 해석을 수행하고, 임계이동속도를 계산하였으며 다음과 같은 사항을 확인하였다.

(1) 탄성지지부가 스프링으로 구성된 경우, 스프링 상수와 축방향의 장력이 증가함에 따라 임계이동속도와 고유진동수는 증가하고, 이동속도가 증가함에 따라 고유진동수는 감소한다.

(2) 첫 번째 임계이동속도에 다다르면 불안정성 현

상이 나타나며 두 번째 임계이동속도에서부터 좁은 영역의 이동속도는 안정성 현상이 나타난다.

참고문헌

1. A. Simpson, "Transverse Modes and Frequencies of Beams Translating Between Fixed End Supports," *Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 15. No. 3, pp. 159-164, 1973.
2. C. D. Mote, Jr., "A Study of Band Saw Vibrations," *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 279. No. 6, pp. 430-444, 1965.
3. J. A. Wickert and C. D. Mote, Jr., "Classical Vibration Analysis of Axially Moving Continua," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 57, pp. 738-744, 1990.
4. S. Y. Lee and C. D. Mote, Jr., "Traveling Wave Dynamics in a Translating String Coupled to Stationary Constraints," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 212. No. 1. pp. 1-22, 1998.
5. C. H. Riedel and C. A. Tan, "Dynamic Characteristics and Mode Localization of Elastically Constrained Axially Moving Strings and Beams," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 215. No. 3, pp. 455-473, 1998.
6. Y. K. Lin, "Free Vibrations of a Continuous Beam on Elastic Supports," *International Journal of Mechanical Science*, Vol. 4, pp. 409-423, 1962.
7. L. A. Bergman and D. M. McFarland, "On the Vibration of A Point-Supported Linear Distributed System," *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, Vol. 110, pp. 485-492, 1988.
8. H. M. Safed and F. Vestroni, "Simulation of Combined Systems by Periodic Structures," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 213. No. 1, pp. 55-73, 1998.
9. S. K. Clark, *Dynamics of Continuous Elements*, Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, pp. 115-127, 1972.