

◎ 논문

Ristorcelli의 압축성 난류 모형을 이용한 초음속 유동의 계산

박 창 환^{*1}, 박 승 오^{*2}Computations of Supersonic Flow with Ristorcelli's
Compressible Turbulence Model

C. H. Park and S. O. Park

Three-dimensional endwall flow within a linear cascade passage of high performance turbine blade is simulated with a 3-D Navier-Stokes CFD code (MOSA3D), which is based on body-fitted coordinate system, pressure-correction and finite volume method. The endwall flow characteristics, including the development and generation of horseshoe vortex, passage vortex, etc. are clearly simulated, consistent with the generally known tendency. The effects of both turbulence model and convective differencing scheme on the prediction performance of endwall flow are systematically analyzed in the present paper. The convective scheme is found to have stronger effect than the turbulence model on the prediction performance of endwall flow. The present simulation result also indicates that the suction leg of the horseshoe vortex continues on the suction side until it reaches the trailing edge.

Key Words: 전산유체역학(CFD), 터빈의렬(Turbine cascade), 이차유동(Secondary Flow), 말굽와류(Horseshoe Vortex), 통로와류(Passage Vortex)

1. 서 론

난류 유동에서의 압축성 효과는 평균 밀도의 변화에 의한 효과와 요동(fluctuation)의 팽창에 의한 효과로 나눌 수 있다. 일반적으로 경계층 유동에서는 평균 밀도의 변화에 의한 효과가 중요하고, 자유전단유동의 경우 요동의 팽창에 의한 효과가 중요하다. 압축성 난류 모형은 비압성 난류 모형이 혼합층(mixing layer)의 성장을 감소를 정확히 예측하지 못 하는데에서 기인하며, 요동의 팽창에 의한 효과를 주로 설명한다.

초기의 압축성 난류 모형은 난류 운동 에너지 방정식에서 비압축성 유동에서는 나타나지 않는 팽창-소산(dilatation dissipation)항과 압력-팽창(pressure dilatation)항에 대한 연구가 주로 이루어졌다. 이러한 항들에 대해 다양한 모형이 제시되었지만, 초기에 제시되었던 Zeman과 Sarkar의 모형이 일반적으로 많이 쓰이고 있으며, 이러한 모형들은 난류 마하수 M_t 에 대한 함수로 나타내어 진다[1-3].

최근의 DNS의 연구 결과들로 인하여, 난류 유동에서의 압축성 효과는 압력요동(pressure fluctuation)의 감소로 인하여 레이놀즈 응력 방정식에서 난류 비등방성 텐서(anisotropy tensor)의 감소로 인한 난류 생성항의 감소가 주된 원인이라고 밝혀졌고, M_t 외에 Gradient 마하수

* 2003년 03월 07일 접수

*1 한국과학기술원 항공우주공학과

*2 정회원, 한국과학기술원 항공우주공학과

M_g 가 압축성 효과를 나타내는 중요한 변수라고 알려졌다[4,5]. 이러한 결과에 의하여 팽창-소산항보다는 압력-팽창항이 더 중요하게 되었으며, 최근에는 난류 운동에너지 방정식에 추가적으로 나타나는 항들에 대한 모형보다는 압축성 효과가 난류의 구조 자체에 영향을 준다고 보고 기존의 난류 모형에 압력 요동이나 밀도 요동 등에 대한 방정식을 추가로 더 계산하거나 압력-변형을 (pressure-strain rate)항에 대한 모형의 시도가 이루어지고 있는 실정이다. 그러나, 이러한 시도들은 아직 일반적인 유동의 해석에 적용을 할 수 없는 상태이며, 여전히 압축성 난류 유동의 해석에는 초기의 압축성 모형들이 널리 사용되고 있다.

압축성 모형은 주로 자유전단유동에 대해 개발되었으며 이러한 모형이 다양한 형태의 유동에 적용되었을 때 크게 2가지의 문제점이 있다. 압축성 모형의 사용은 초음속 경계층 유동의 예측 성능을 저하시키며[6], 초음속 유동과 아음속 유동이 공존하는 유동의 경우 압축성 효과가 아음속 유동의 영역에까지 작용하여 유동의 전체 예측 성능을 저하시킨다[7]. Wilcox는 경계층 유동에서의 문제점을 해결하기 위하여 Sarkar등과 Zeman의 모형의 형태를 혼합한 새로운 모형을 제시하였지만[3], 극초음속 유동은 고려되지 않았으며 초음속 유동과 아음속 유동이 공존하는 유동에서의 문제점은 여전히 가지고 있다.

최근에 Ristorcelli가 제안한 팽창-소산항과 압력-팽창항에 대한 모형은 기존의 모형에 비해 모형식 자체의 복잡성과 사용되는 계수의 불확실성으로 인하여 널리 쓰이지는 않는 실정이지만, 앞에서 언급한 문제점이 어느 정도 해결될 수 있는 보다 발전된 형태의 압축성 난류 모형이다[8]. 따라서, 본 연구에서는 Ristorcelli의 모형을 이용한 평판 경계층 유동과 초음속 기저(base) 유동의 해석을 통하여 다양한 유동에의 압축성 난류 모형의 적용 가능성을 시험했다.

2. 압축성 난류 모형

2.1 Ristorcelli의 압축성 난류 모형

Ristorcelli는 음향학과 통계적인 이론을 통하

여 팽창-소산항과 압력-팽창항에 대해 각각 다음과 같은 모형을 제시하였다[8].

$$\epsilon_d = \frac{4}{3\alpha^2} \frac{M_t^4}{Re_t} \epsilon_s [I_2^2 + 6I_1 I_3] + \frac{1}{4} \left(\frac{2}{3}\right)^5 \frac{M_t^4}{Re_t} \epsilon_s \widehat{S}^2 [3 + 5R^2] \left[\frac{3}{5} I_3 + \left(\frac{1}{15}\right)^2 \widehat{S}^2 [13 + 15R^2] \alpha^2 I_1\right] \quad (1)$$

$$\overline{p'd'} = -\frac{1}{3} \chi_{pd} M_t^2 [P_k - \overline{\rho\epsilon} + T_k] + \frac{1}{12} \chi_{pd} M_t^2 \chi (\gamma - 1) (P_t + \overline{\rho\epsilon} + T_t) - \frac{1}{3} \overline{\rho k M_t^2 \chi'_{pd}} \frac{D\overline{\gamma}}{Dt} \quad (2)$$

ϵ_d 는 팽창-소산항을, $\overline{p'd'}$ 는 압력-팽창항을 의미하며 d' 은 $\partial u_i' / \partial x_i$ 를 나타낸다. 식(2)의 첫째 줄의 괄호 안은 난류 운동 에너지 방정식의 우변에 나타나는 생성항, 소산항, 확산항을 나타낸다. 마찬가지로 두 번째 줄의 괄호 안은 평균 온도(mean temperature)방정식의 우변에 해당하는 값들을 나타낸다. α 는 kolmogorov scaling 계수이며, 무차원화된 시간 스케일 $\overline{\gamma}$ 와 모형에 사용되는 계수들은 다음과 같다.

$$\overline{\gamma} = 3\widehat{S}^2 + 5\widehat{W}^2 \quad (3)$$

$$\chi_{pd} = \frac{2I_{pd}}{1 + 2I_{pd} M_t^2 + \frac{3}{2} I_{pd} M_t^4 \chi (\gamma - 1)}$$

$$\chi'_{pd} = \frac{I_{pd}}{1 + 2I_{pd} M_t^2 + \frac{3}{2} I_{pd} M_t^4 \chi (\gamma - 1)}$$

$$I_{pd} = \frac{2}{3} I_1 + I_{pd} [3\widehat{S}^2 + 5\widehat{W}^2]$$

$$I_{pd} = \frac{1}{30} \left(\frac{2}{3}\right)^3 \alpha^2 I_1$$

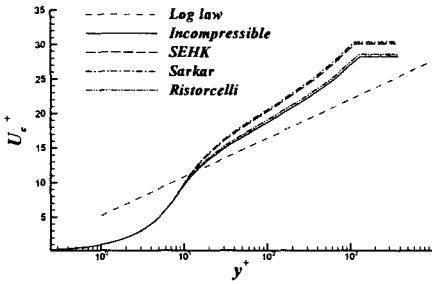


Fig.1 Comparison of Velocity profile

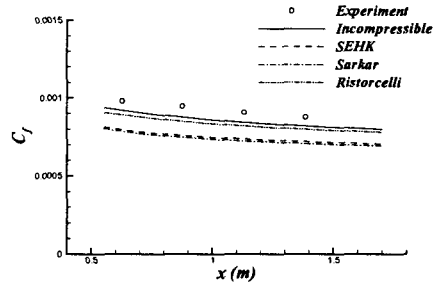


Fig.2 Skin friction distributions

$$S_{\ddot{u}} = \frac{1}{2} [U_{i,j} + U_{j,i} - \frac{2}{3} D\delta_{ij}]$$

$$W_{\ddot{u}} = \frac{1}{2} [U_{i,j} - U_{j,i}]$$

$$M_t^2 = (2k/a^2), Re_t = \frac{\bar{u}l}{\nu} = \frac{4}{9} \frac{k^2}{\nu \epsilon}$$

$$\widehat{S}^2 = \left(\frac{Sk}{\epsilon}\right)^2, \widehat{W}^2 = \left(\frac{Wk}{\epsilon}\right)^2, S = (S_{\ddot{u}} S_{\ddot{u}})^2, W = (W_{\ddot{u}} W_{\ddot{u}})^2, R^2 = \widehat{W}^2 / S^2$$

$$F_1 = 0.3, F_2 = 13.768, F_3 = 2.623, F_4 = 1.392, F_5 = 3$$

식(1)의 팽창-소산항의 경우, 기존의 모형이 난류 마하수 M_t 의 제곱에 비례하는 것과는 달리 M_t 의 4제곱에 비례하기 때문에 팽창-소산항은 굉장히 작은 값으로 나타나게 된다. 식(2)의 압력-팽창항의 모형에서는 첫째 줄에 나타난 항이 M_t 의 제곱에 비례하는 가장 지배적인 항이며, 확산항 T_k 를 무시했을 때, 압력-팽창항이 난류 비평형 상태인 경우에만 중요하게 나타나는 걸 알 수 있다. 이러한 특징은 기존의 압축성 모형과 크게 다른 점이라고 할 수 있으며, 이러한 비평형 효과가 자유전단유동과 경계층 유동의 차이점을 설명할 수 있을 것이다.

Ristorcelli의 모형과의 비교를 위하여 일반적으로 널리 쓰이는 압축성 모형 중 다음의 세가지 모형을 사용하였으며, 비압축성 모형에는 Launder & Sharma의 저-레이놀즈 $k-\epsilon$ 모형을 이용하였다.

Sarkar등 의 모형(SEHK)[1]

$$\epsilon_d = M_t^2 \epsilon_s \tag{4}$$

Sarkar의 모형(Sarkar)[2]

$$\epsilon_d = 0.5 M_t^2 \epsilon_s \tag{5}$$

$$\overline{p' d'} = -0.15 P_k M_t + 0.2 \overline{\rho \epsilon_s} M_t^2$$

Wilcox의 모형[3]

$$\epsilon_d = 1.5 [M_t^2 - 0.25^2] H(M_t - 0.25) \epsilon_s \tag{6}$$

위에서, ϵ_s 는 비압축성 모형의 소산항이며, H는 heaviside step 함수를 의미한다. 이러한 압축성 모형들은 난류운동에너지 방정식에 다음과 같이 추가적인 원천항으로 작용하며, ϵ 방정식에는 영향을 주지 않는다.

$$\frac{D(\overline{\rho k})}{Dt} = P_k - D_k - \overline{\rho \epsilon_s} - \overline{\rho \epsilon_d} + \overline{p' d'} \tag{7}$$

P_k 와 D_k 는 각각 난류 생성항과 확산항을 의미한다.

2.2 수치기법

평판 경계층 유동의 해석을 위하여 Levy-Lees 변환을 이용한 압축성 경계층 방정식을 이용하였다. 벽면에 수직 방향으로 2차의 중앙차분을, 벽면을 따른 방향으로 1차의 후방차분을 이용하여 삼각대각행렬의 해를 구하였다[9]. 축대칭의 기저 유동의 계산에서는 Favre 평균된

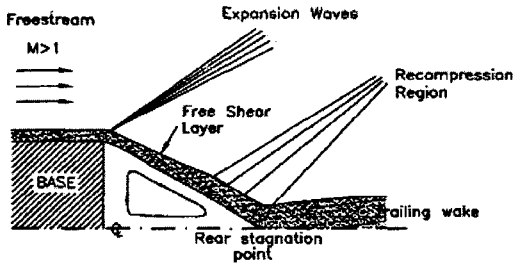


Fig.3 Schematic of the Supersonic Base flow

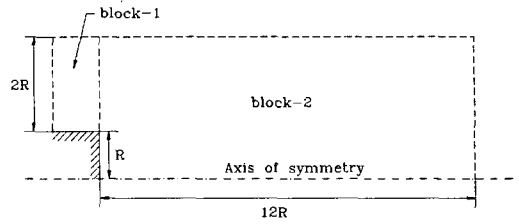


Fig. 4 Computational Domain of Base Flow

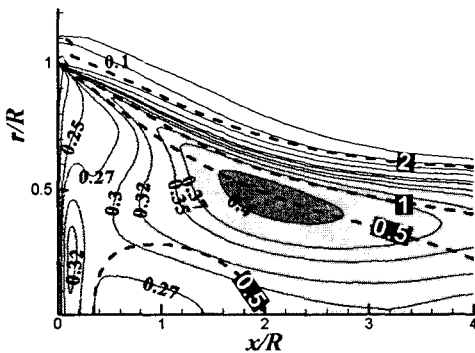


Fig.5 Distribution of turbulent Mach number

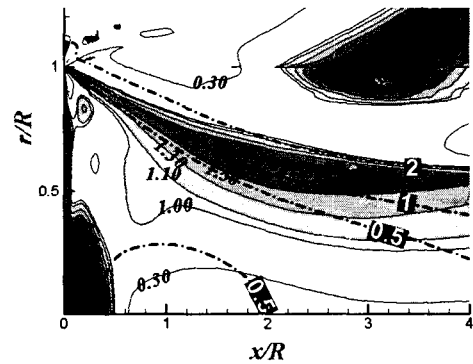


Fig.6 Distribution of non-equilibrium factor(P_k/ϵ)

2차원의 축대칭 Navier-Stokes 방정식을 유한 체적법을 사용하여 계산하였다. 비점성항에는 Harten & Yee의 2차의 Upwind TVD 기법을 이용하였으며, LU-SGS 알고리즘을 이용하여 적분하였다[7].

3. 결과 및 토론

3.1 초음속 평판 경계층 유동

평판 경계층 유동에 기존의 압축성 모형의 사용은 경계층 내부의 과도한 소산율로 인하여 로 그 영역의 예측 성능을 떨어뜨리고, 이로 인한 표면 마찰력이 감소되는 현상이 생긴다. 실제 DNS의 결과에서도 채널이나 경계층 유동의 경우 압축성 효과가 무시할 만큼 작게 나타난다고 알려져 있다[10]. 따라서, 압축성 난류 모형은 혼합층 유동과는 달리 경계층 유동의 경우 무시될 만큼 작은 값을 나타내는게 바람직하다. 자유류 마하수 4.52의 평판 경계층 유동에 대해 수치해 를 구하였다. 난류 마하수 이외의 중요한 변수들은 자유류 마하수에 큰 영향을 받지 않으며, 마

하수 4.52의 유동은 초음속 유동과 극초음속 유동의 경계로 볼 수 있기 때문에 본 연구에 적합한 조건이라고 볼 수 있다.

Fig. 1과 Fig. 2에는 각각 Van Driest 변환을 이용한 평균속도 분포와 표면 마찰력 계수 분포를 나타내었으며, Van Driest 변환은 다음과 같다.

$$U_c^+ = U_c / u_\tau = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C$$

$$\text{where, } y^+ = y u_\tau / \nu_w, \\ U_c = \int_0^y \left(\frac{\rho}{\rho_w} \right)^{1/2} dU, \\ u_\tau = \sqrt{\tau_w / \rho_w}$$

기존의 다른 모형에 비해 Ristorcelli의 모형은 압축성 모형을 사용하지 않은 경우에서 크게 벗어나지 않는다는 것을 알 수 있다. 이러한 현상은 Ristorcelli의 모형이 난류 비평형 상태에서만이 압축성 효과가 중요하게 작용한다는 점에서 기인하며, 혼합층 유동과 달리 경계층 유동에서는 벽 근처를 제외하곤 난류의 평형 상태를 유지

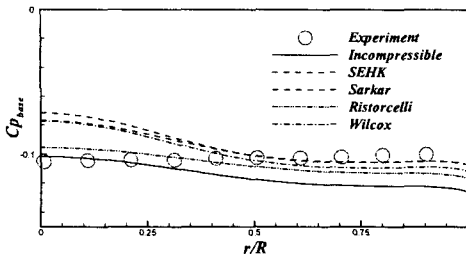


Fig. 7 Base Pressure profile

하기 때문이다. Wilcox의 모형은 자유류 마하수 5까지의 초음속 경계층 유동에서는 압축성 모형이 작동하지 않도록 고안된 모형이므로, 비교에서 제외시켰다.

모형에서 사용되는 계수 중 실험값에 의해 결정되는 값들이 있으며, 이러한 값들은 유동에 따라 다르게 결정되는 값들이다. 여기서 사용된 계수들은 자유전단유동의 실험치로부터 계산된 값들이며, 벽면 유동에서는 모형의 값이 작기 때문에 이러한 계수를 그대로 사용해도 결과에 큰 영향을 미치지 않을 것으로 기대된다.

3.2 초음속 기저 유동

자유류 마하수 2.46의 초음속 축대칭 기저 유동은 Herrin&Dutton의 실험[11]을 대상으로 하였으며, Fig. 3에 유동의 개략도를 나타내었다. 본 연구에서의 계산 영역은 Fig. 4에 나타낸 바와 같이 2개의 블록으로 나누어 계산하였으며, 블록-1과 블록-2는 각각 20×50, 200×150의 격자를 이용하였다.

초음속 기저 유동에 기존의 압축성 모형을 사용하게 될 경우, 아음속의 재순환 영역까지 압축성 효과가 작용하게 되어 전체 예측 성능이 저하되게 된다. Fig. 5와 Fig. 6에는 Wilcox의 모형을 이용하여 계산된 결과에서 난류 마하수와 비평형 변수(P_w/ϵ)의 분포를 나타내었다. Fig. 5 및 Fig. 6의 굵은 점선은 등마하수 선을 나타낸다. 실험에서의 재부착점의 위치가 2.65이므로 재순환 영역이 아음속의 영역이라는 것을 알 수 있다. 아음속의 재순환 영역에서도 높은 난류 강도로 인하여 높은 난류 마하수의 분포를 가지고, 난류 마하수 만의 함수로 표현되는 압축성 모형들은 이러한 유동의 정확한 예측을 할 수 없게 된다. SEHK, Sarkar의 모형 뿐 아니라, 경계층 유동에서 문제점을 일으키지 않는 Wilcox의 모형도 이러한 아음속의 영역을 구분해 주지는 못 한다.

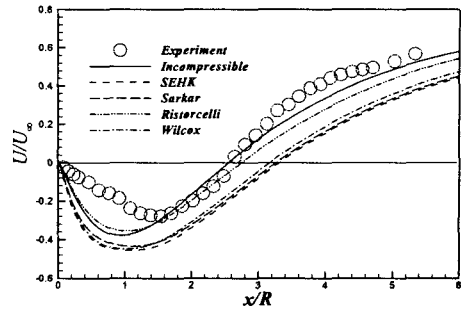


Fig. 8 Mean axial velocity along the centerline of the base

반면, Fig. 6의 비평형 변수의 분포를 보면, 전단층의 영역에서는 비평형 변수가 1보다 큰 값을 가지는 반면에 재순환 영역의 정체점 부근을 제외한 대부분의 영역에서 1 또는 1보다 작은 값을 가진다. 따라서, 기존의 모형들이 재순환 영역 전체에서 소산항을 증가시켜 주는 역할을 하는 것과는 반대로 Ristorcelli의 모형은 전단층 영역에서는 소산율로 그리고, 재순환 영역에서는 작용을 하지 않거나 오히려 생성항으로 작용할 것임을 알 수 있다. 따라서, 기존의 압축성 모형이 재순환 영역에서의 과도한 소산율로 작용하여 전체 예측 성능을 저하시키는 문제점이 Ristorcelli의 모형을 이용하면 나타나지 않을 것으로 기대할 수 있다.

Fig. 7에는 기저부의 벽면압력계수를 나타내었으며, 압력계수는 다음과 같이 정의된다.

$$C_{p(base)} = \frac{2[(P_{base}/P_{\infty}) - 1]}{\gamma M_{\infty}^2}$$

기저부 압력의 정확한 예측은 비행체의 항력 예측에 매우 중요하므로, 재순환 영역 유동의 좋은 예측 성능이 필요하다. Fig. 7은 기저부의 중심 쪽에서 기존의 압축성 모형을 사용한 계산 결과치는 실험치에서 멀어지게 되는 경향을 보여주고 있으며, Ristorcelli의 모형이 더 좋은 결과를 주는 것을 확인시켜 준다.

Fig. 8에는 기저부의 중심선을 따른 축 방향 속도분포를 나타내며, 실험에서의 재부착점이 2.65임을 나타내고 있다. Fig. 7과 Fig. 8의 결과에서 기존의 압축성 모형들은 아음속 영역인 재순환 영역에서 과도한 압축성 효과를 발생하여, 결과를 더 나쁘게 한다는 것을 알 수 있다. 즉, 재순환 영역의 과도한 소산율로 인하여 난류 혼합이 감소하고, 따라서 재순환 영역이 커지게 되며 재순환 영역의 압력 분포도 실험치에서 많이

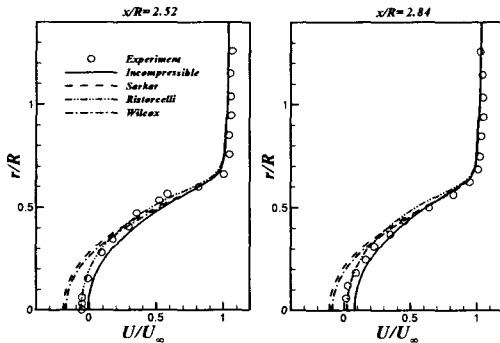


Fig.9 Comparison of streamwise mean velocity profiles

벗어나게 된다. 반면에 Ristorcelli의 모형은 혼합층 영역과 재순환 영역을 어느 정도 구별함으로써 재순환 영역의 과도한 소산율의 증가를 가져오지 않는다.

Fig. 9에는 기저부로부터의 무차원화 된 거리가 2.52와 2.84인 지점의 속도분포이며, 이 지점들은 재부착점의 전, 후에 위치한다. 이러한 재순환 영역 부근의 속도 분포에서도 기존의 압축성 모형보다는 Ristorcelli의 모형이 더 좋은 결과를 나타내고 있음을 알 수 있다.

5. 결론

Ristorcelli의 압축성 난류 모형을 이용하여 평판 경계층 유동과 초음속 기저 유동을 해석하였다. 기존의 압축성 모형과 달리 이 모형에서는 압력-팽창항이 중요한 역할을 하며, 팽창-소산항은 무시될 만큼 작은 값을 가지는 특징이 있다. 또한, 난류 비평형 상태에서만이 압축성 효과가 중요하게 나타나는 특징을 가지며, 이러한 특징은 기존의 압축성 난류 모형이 문제점을 가지는 초음속 경계층 유동과 초음속 기저 유동에서 향상된 결과를 나타낸다.

후기

이 논문은 2001년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구 되었습니다. (KRF-2001-042-E00114)

참고문헌

[1] Sarkar, S., Erlebacher, G.M., Hussaini, Y. and Kreiss, H.O., "The analysis and modeling of dilatational terms in

compressible turbulence," J. Fluid Mech., 227, 473 (1991)

[2] Sarkar, S., "The pressure-dilatation correlation in compressible flows," Phys. Fluids A 4, 2674 (1992)

[3] Wilcox, D.C., "Dilatation dissipation corrections for advanced turbulence models," AIAA J., vol.30, No.11, (1992), p.2639-2646

[4] Sarkar, S., "The Stabilizing effect of compressibility in turbulent shear flow," J. Fluid Mech., 282, 163 (1995)

[5] Vreman, A.W., Sandham, N.D. and Luo, K.H., "Compressible mixing layer growth rate and turbulence characteristics," J. Fluid Mech. 320, 235 (1996)

[6] Huang, P.G., Bradshaw, P. and Coakley, T.J., "Turbulence models for compressible boundary layers," AIAA J., vol.32, No.4, (1994), p.735-740

[7] Kim, M.H. and Park, S.O., "Supersonic base flow predictions using second-moment closure models of turbulence," CFD Journal, vol.6, no.4, (1998), p.561-576.

[8] Ristorcelli, J.R., "A pseudo-sound constitutive relationship for the dilatational covariances in compressible turbulence," J. Fluid Mech., 347, 77, (1997)

[9] Hamilton, H.H., Millman, D.R. and Greendyke, R.B., "Finite-difference solution for laminar or turbulent boundary layer flow over axisymmetric bodies with ideal gas, CF4, or equilibrium air chemistry," NASA TP-3271, (1992)

[10] Huang, P.G., Coleman, G.N. and Bradshaw, P., "Compressible turbulent channel flows: DNS results and modelling," J. Fluid Mech., vol.305, (1995), p.185-218

[11] Herrin, J.L., Dutton, J.C. "An Experimental investigation of the supersonic axisymmetric base flow behind a cylindrical afterbody," Univ. of Illinois at Urbana-Champaign, UIU 91-4004, Urbana, IL, 1991