

## ◎ 논문

## 수정된 PISO 알고리즘을 이용한 응고 및 용해 현상의 수치해석

강 관 구<sup>\*1</sup>, 유 흥 선<sup>\*2</sup>, 허 남 건<sup>\*3</sup>

### Numerical Analysis of Solidification and Melting Phase Change Using Modified PISO algorithm

K. G. Kang, H. S. Ryou and N. Hur

A numerical procedure for the calculation of solidification and melting phase change using PISO algorithm is presented. In case of phase change problem, the coupling between velocity/pressure/temperature and liquid fraction is important. The converged temperature and liquid fraction solution which satisfies the energy balance is acquired by applying enthalpy method into inner iteration in matrix solver. And a modified PISO algorithm version is introduced to properly solve the coupling between velocity/pressure/temperature and liquid fraction. A comparison of the proposed procedure with a standard iterative method shows improvement both in terms of computing speed and robustness.

**Key Words:** PISO 알고리즘(PISO Algorithm), 응고(Solidification), 용해(Melting), 상변화(Phase Change), 액상분율(Liquid Fraction), 엔탈피 방법(Enthalpy method)

#### 1. 서 론

응고 및 용해를 포함하는 상변화 과정은 금속의 주조 과정 및 성형 과정, PCM(Phase Change Materials)을 이용하여 에너지를 저장하는 축열 장치의 설계, 원자력 발전소 사고 분석 등 다양한 분야에서 중요한 열전달 특성으로 여겨지고 있다. 이러한 상변화 과정은 복잡한 열 및 물질 전달 과정을 수반하고, 상변화 시 형성된 미소 구조에 의하여 최종 생산품의 강도 및 금속 성분

등이 결정된다. 따라서 상변화 과정을 예측하는 것은 매우 중요하고, 이러한 상변화 과정을 이론적으로 모델링 하기 위한 연구들이 여러 연구자들에 의해 수행되어 왔다[1-6].

상변화 시 고체-액체 상경계의 시간에 따른 거동 및 잠열의 변화를 수치해석하는 방법은 격자계에 따라 크게 두 가지로 나눌 수 있다. 하나는 이동격자계를 이용한 해석 방법[1]으로 해석 대상을 액체와 고체로 나누어 각각 다른 지배방정식을 적용하여 계산하는 것이다. 이 방법은 시간에 따라 상경계면의 위치가 변하면 격자를 재생성 해야 하는데, 고정된 계산 영역으로 좌표 변환하여 계산하는 방법이 많이 쓰인다. 다른 하나는 고정 격자계를 사용하는 방법으로 Voller 등이 제안한 엔탈피 방법(Enthalpy method)[2-6]이

\* 2003년 05월 26일 접수

\*1 학생회원, 중앙대학교 대학원 기계공학과

\*2 정회원, 중앙대학교 기계공학과

\*3 정회원, 서강대학교 기계공학과

가장 널리 사용되고 있다. 엔탈피 방법은 이동 상경계에서의 열 및 질량 조건들이 적절한 생성 항의 정의에 의해 지배방정식에 적용된다. 따라서 액체와 고체에 모두 같은 지배방정식을 적용할 수 있고, 정확한 상경계의 위치를 알 필요성이 없다. 또한, 격자를 재 생성할 필요가 없어서 계산이 용이하기 때문에 응고 및 용해의 상변화 해석시 가장 많이 사용되는 방법이다.

하지만, 엔탈피 방법에서 사용되는 에너지 방정식의 경우 온도뿐만 아니라 액상분을 또는 잠열도 미지수이기 때문에, 수치적으로 계산시 많은 어려움이 따른다. 엔탈피 방법은 액상분율을 가정하고, 에너지 방정식에서 온도장을 구한 후, 다시 액상분율을 갱신하는 도돌이법(iterative method)을 통해야만 에너지 보존을 만족하는 온도장과 액상분율을 구할 수 있다. 따라서 엔탈피 방법은 이산화된 에너지 방정식의 해를 구하는 방법의 효율성에 크게 좌우되고, 수렴된 온도장과 액상분율을 효율적으로 구할 수 있는 방법에 대한 연구들이 많이 진행되어 왔다[3-6].

에너지 방정식에서 온도장과 액상분율을 대부분 연구에서는 도돌이법을 이용하여 해를 구하였고, 따라서 전체 온도장 및 유동에 대한 해석도 도돌이법을 사용하는 SIMPLE류의 알고리즘을 사용하여 왔다. SIMPLE 알고리즘[7]은 수많은 연구자들에 의하여 사용되어 왔고, 그 방법의 적합성과 정확성은 여러 연구에서 검증되었다. 하지만, 비정상 현상의 해석 시 계산시간이 과도하고, 특히 형상이 복잡한 구조 등과 같은 문제의 비정상적 계산시 수치해석 비용이 많이 요구된다. 따라서 비정상 현상을 해석하기 위해서는 PISO 알고리즘[8]과 같은 비도돌이법(non-iterative method)을 사용하는 알고리즘이 적합하다. Issa가 제안한 PISO 알고리즘은 비정상 유동의 해석에 널리 사용되어 왔고, 여러 연구자들에 의해서 정확성과 효율성이 개선되어 왔다[9-10]. 하지만 에너지 보존을 만족하는 온도장과 액상분율을 구하기 위해서는 도돌이법을 사용해야 하므로, 상변화 있을 때 PISO 알고리즘을 사용하기 위해서는 기존의 방법을 그대로 사용하기는 매우 어렵다. 또한, 운동량 방정식이 온도와 액상분율의 함수인 항들을 포함하고 있어서 속도, 압력, 온도, 액상분율의 연결성(coupling)이 매우 강해서, 상변화 시 PISO 알고리즘을 적용하기는 더욱 어렵고, 새로운 수치해석 기법이 필

요하다.

이와 같은 문제점을 해결하기 위해서 본 연구에서는 상변화가 있을 때, PISO 알고리즘을 사용할 수 있는 방법을 제안하였다.

## 2. 지배방정식 및 액상분율

### 2.1 지배방정식

응고 및 용해를 포함하는 열 유동을 지배하는 방정식은 연속방정식, 운동량 방정식 및 에너지 방정식이며, 이러한 유동에서는 상변화 및 중력의 영향이 매우 중요하다. 다음과 같은 가정이 유효할 때, 지배방정식은 아래와 같이 간단하게 표현될 수 있다.

- (1) 액상과 고상에서의 밀도와 비열은 같고 일정한 값을 가진다.
- (2) 고상의 속도는 영 값을 가진다.
- (3) 뉴턴 유체이고 층류 유동이다.

Continuity

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (1)$$

Momentum

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = \\ -\nabla p + \nabla \cdot (\mu_l \nabla \mathbf{u}) - \frac{\mu_l}{K} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_s) + \rho \mathbf{g} \end{aligned} \quad (2)$$

Energy

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho T)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} T) = \\ \nabla \cdot \left( -\frac{k}{c_m} \nabla T \right) + S_h \end{aligned} \quad (3)$$

물성치로 밀도  $\rho$ , 점성계수  $\mu$ , 정압비열  $c_p$ , 열전도도  $k$ 가 있으며, 모두 일정하다고 가정된다. 위의 식에서  $\mu_l(\mathbf{u} - \mathbf{u}_s)/K$ ,  $\rho \mathbf{g}$ ,  $S_h$ 는 각각 다공도 생성항, 부력 생성항, 상변화 생성항이고 다음 절에서 자세히 설명된다.

### 2.2 생성항

엔탈피 방법에서 상변화 현상은 생성항을 통

해서 나타내어진다.  $Sh$  는 상변화 시 잠열의 방출 및 흡수를 나타내는 항으로, 정압비열이 온도에 독립적이라고 가정하면  $Sh$  는 다음과 같이 나타내어진다.

$$S_h = \rho \frac{(c_{pl} - c_{ps})}{c_{pl}} \frac{\partial}{\partial t} (f_s T) - \rho \frac{L}{c_{pl}} \frac{\partial f_l}{\partial t} \quad (4)$$

여기서  $L$ 은 용해 시 잠열이고,  $c_{pl}$ 과  $c_{ps}$ 는 각각 액상과 고상에서의 정압비열이다. 본 연구에서는 액상과 고상에서의 정압비열을 같다고 가정하였기 때문에 식 (4)에서 우변의 첫 번째 항은 무시된다.

운동량 방정식에서 중력항은 수직방향으로 아래와 같이 표현된다.

$$\rho g = \rho g \beta (T - T_{ref}) \quad (5)$$

여기서  $b$ 는 열팽창계수이고  $T_{ref}$ 는 기준온도이다.

또한 운동량 방정식에서 우변의 세번째 항은 다공도 생성항으로 머시영역(mushy region)에서 유동 감속 효과를 나타내는 항이다. 머시영역에서의 유동은 포화된 다공성 물질에서의 유동으로 가정될 수 있고, 다공도 생성항은 수정된 Darcy 법칙을 이용하여 나타내어진다. 이 항에서  $K$ 는 투과율(permeability)이다. 머시영역에서 유동감속 효과를 적절히 모델링하기 위해서는 투과율  $K$ 를 액상분율의 함수로 나타내야 한다. 본 연구에서는 투과율을 다공성 물질에서의 Carman-Kozeny 방정식 형태로 나타내어 아래와 같이 적용하였다.

$$K = K_0 \frac{f_l}{(1-f_l)^2} \quad (6)$$

여기서  $K_0$ 은 다공도 상수이다.

액상만 존재하는 구간에서는  $K$ 값이 무한대가 되어 다공도 생성항은 영 값을 가지게 되어 아무런 영향을 끼치지 못하게 되지만, 상변화를 거치는 구간에서는 다공도 생성항이 커지게 되어 비정상항, 대류항, 확산항보다 지배적이게 된다. 고상만 존재하는 구간에서는  $K$ 값이 영이 되고 다

공도 생성항의 값이 무한대 값을 가지게 되어 고상에서의 속도를 영으로 강제적으로 가지게 한다. 머시영역에서의 유동에서 Carman-Kozeny 방정식의 유용성은 실험적으로 여러 연구에서 검증되었고, 많은 응용 분야에서 사용되고 있다. 다공도 상수  $K_0$ 은 상경계면의 형태와 머시영역에서 속도장에 큰 영향을 미치기 때문에 적절히 선택되어야 한다.

### 2.3 액상분율(Liquid fraction)

에너지 방정식에서 액상분율  $f_l$ 이 온도와 함께 미지수이기 때문에 에너지 방정식은 2개의 변수로 구성되어 있다. 액상분율은 여러 개의 응고 변수의 함수이지만 많은 응용 분야에서 온도만의 함수로 가정되고 있고, 이러한 가정은 충분히 타당하다. 또한 엔탈피 방법은 머시 영역에서의 액상분율이 온도의 함수로 정의되어야 한다. 액상분율은 온도만의 함수라고 가정할 때, 액상분율은 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$f_l = F(T) \quad (7)$$

온도함수  $F(T)$ 는 여러 가지 형태로 가정할 수 있다. 대표적인 예로, 이종 합금에서 Scheil 관계식을 다음과 같이 나타낼 수 있다[11].

$$f_l = \left( \frac{T_F - T}{T_F - T_L} \right)^{-\beta} \quad T_E \leq T \leq T_L \quad (8)$$

$$\beta = 1/(1 - \alpha).$$

여기서  $T_F$ 는 용매의 어는점,  $T_E$ 는 공융점,  $T_L$ 는 액상선 온도,  $\alpha$ 는 분할계수(partition coefficient)이다. 위의 식은 이종합금에서 미소편석의 거동에서 유도된다.

본 연구에서 수치해석을 수행한 순수갈륨의 용해 문제의 경우, 상변화가 등온에서 진행되고 액상분율은 아래 형태의 식이 된다.

$$f_l = \begin{cases} 1, & T > T_m \\ 0, & T < T_m \end{cases} \quad (9)$$

### 3. 수치해석 방법 및 알고리즘

#### 3.1 엔탈피 방법

고정 격자계에서 상변화를 고려하기 위하여 많은 연구들이 Voller[3-6]가 제안한 엔탈피 방법을 사용하여왔다. 본 연구에서도 상변화를 고려하기 위하여 엔탈피 방법을 사용하였고, 도돌이법을 사용하여 온도장과 액상분율을 구하는 방법을 간략하게 설명하면 다음과 같다. 식 (10)은 에너지 방정식을 이산화한 형태이다.

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\rho V}{\delta t} + a_0^T \right) T_P^{m+1} \\ &= H^T(T) + \left( \frac{\rho V}{\delta t} \right) T_P^{old} \\ &+ \left( \frac{\rho V}{\delta t} \frac{\delta H_P}{c_{pl}} \right) (f_{l,p}^{old} - f_{l,p}^{m+1}) \end{aligned} \quad (10)$$

위의 식에서 아래 첨자 P는 P번째 계산 절점을 나타내고, 위 첨자 old는 이전 시간 단계에서의 값을 나타내며 m+1은 도돌이 시 현재 계산 단계를 나타낸다. H는 주변 격자의 영향을 나타내는 연산자로  $H(T) = \sum a_{nb} T_{nb}$  와 같이 정의된다. 여기서 아래 첨자 nb는 이웃 절점 (neighboring node points)을 나타내고 계수  $a_{nb}$ 는 대류와 확산에 의해서 격자면(cell face)을 지나는 유속(flux)으로 구성된다. 또한 계수  $a_{nb}$ 들의 합은  $a_0 = \sum a_{nb}$ 로 나타낸다.

식 (10)에서 이전 시간에서 온도 값을 나타내는 항을 제외한 생성항은 식 (11)으로 머시영역에서 잠열의 변화를 나타낸다.

$$S = \delta H_P (f_{l,p}^{old} - f_{l,p}^{m+1}) V_P \quad (11)$$

$f_{l,p}$ 에 대해서 Taylor 급수 전개를 하고 2차 항 이하를 생략하면 식 (12)와 같다.

$$f_{l,p}^{m+1} = f_{l,p}^m \frac{dF}{dT} [T_P^{m+1} - F^{-1}(f_{l,p}^m)] \quad (12)$$

여기서  $dF/dT$ 는  $f_{l,p}$ 에서 계산된다. 이러한 방법으로 선형화 시키면, 생성항은 아래와 같이

간략한 형태로 표현될 수 있다.

$$S = -S_P T_P^{m+1} + S_C \quad (13)$$

where,

$$S_P = \delta H_P \frac{dF}{dT} V_P \quad (14)$$

$$\begin{aligned} S_C &= \delta H_P (f_{l,p}^{old} - f_{l,p}^m) V_P \\ &- \delta H_P \frac{dF}{dT} F^{-1}(f_{l,p}^m) V_P \end{aligned} \quad (15)$$

최종 이산화 방정식은 식 (16)과 같다.

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\rho V}{\delta t} + a_0^T + S_P \right) T_P^{m+1} \\ &= H^T(T) + \left( \frac{\rho V}{\delta t} \right) T_P^{old} + S_C \end{aligned} \quad (16)$$

식(12)과 같이 액상분율을 가정한 후, 식(16)을 통해서 온도장의 해를 구하게 되며, 새로 갱신된 온도장을 통해서 액상분율을 다시 갱신하는 도돌이법을 사용하여 에너지 보존을 만족하는 온도장과 액상분율의 해를 구하게 된다.

이러한 과정에서 주의할 점은  $f_l$  값은 0과 1사이의 값만을 가져야 하므로  $f_l$  값을 구할 때, 식 (17)과 같은 수정을 거쳐야 한다.

$$\begin{aligned} \text{if } f_P^{m+1} < 0, & \quad f_P^{m+1} = 0 \\ \text{if } f_P^{m+1} > 1, & \quad f_P^{m+1} = 1 \end{aligned} \quad (17)$$

기타 여러 가지 주의사항은 참고 문헌[6]을 참조해야 한다.

#### 3.2 제안된 에너지 방정식 및 액상분율의 해법

본 연구에서는 온도와 액상분율과의 연결성을 SIMPLE 알고리즘에서 적용되는 바깥 도돌이(outer iteration)를 이용하지 않고, 행렬 해법(matrix solver)의 내부에서 반복되는 과정인 안쪽 도돌이법을(inner iteration)사용할 때 생성항과  $a_P$ 값을 갱신함으로써, 에너지 보존을 만족하는 온도와 액상분율을 동시에 구한다.

Fig. 1은 바깥 도돌이와 안쪽 도돌이를 도시적으로 나타낸다. Fig. 1 (a)는 바깥 도돌이에 의

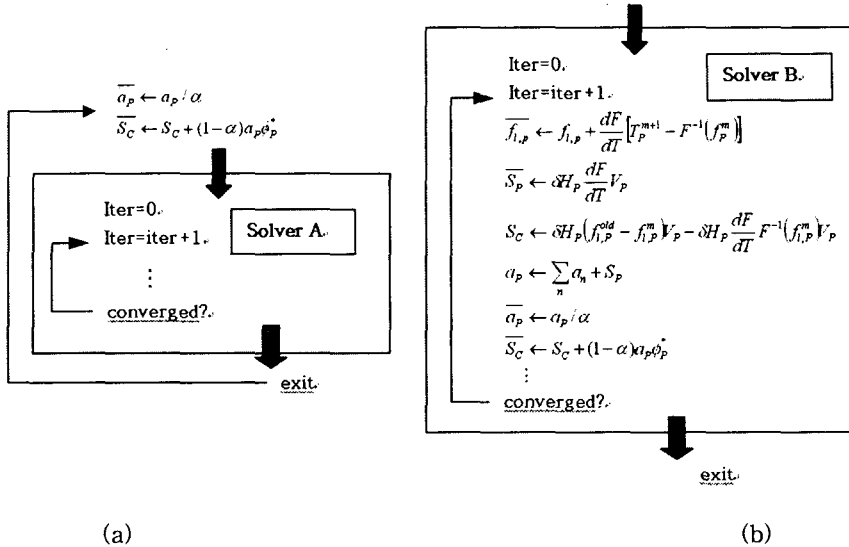


Fig. 1 Comparison of proposed matrix solver and convenient matrix solver

한 해법으로 액상분율이 에너지 밸런스를 이루지 않는 값으로 가정된 상태에서 온도장의 해를 구하게 되므로 바깥 도돌이 과정을 여러 번 거쳐서 수렴된 해를 얻어야만 에너지 보존을 정확히 만족시키게 된다. 반면 Fig. 1 (b)는 안쪽 도돌이법에 의해서 온도장 및 액상분율을 구하는 방법이다. 에너지 방정식에서 액상분율은 생성항 및 aP 항에만 영향을 미친다. 행렬 해법에서 안쪽 도돌이를 수행할 때, 계산된 온도장을 통해서 액상분율을 갱신하고, 갱신된 액상분율을 통해서 생성항 및 aP를 갱신된다. 따라서 안쪽 도돌이의 반복을 통해서 얻은 수렴된 해는 에너지 보존을 만족한다. 바깥 도돌이를 사용하면 바깥 도돌이 과정을 여러 번 반복해야만 에너지 보존을 만족하는 온도장과 액상분율을 얻을 수 있는 반면, 안쪽 도돌이법을 사용하면 안쪽 도돌이법 과정을 한번 통과한 해가 에너지 보존을 만족한다. 따라서 바깥 도돌이 과정과는 달리 안쪽 도돌이 과정을 사용하면, 안쪽 도돌이 과정 자체를 여러 번 반복할 필요가 없다. 이처럼 안쪽 도돌이법을 사용한 해는 곧바로 에너지 보존을 만족하기 때문에, PISO 알고리즘에 적용하기 매우 유용하다.

3.3 PISO 알고리즘에의 적용

운동량 방정식의 생성항은 부력항과 다공도 생성항을 포함한다. 부력항과 다공도 생성항은 온도 및 액상분율의 함수이기 때문에, 전체 유동

장 및 온도장은 속도, 압력, 온도, 액상분율이 매우 밀접하게 연결되어 있다. 기존의 PISO 알고리즘은 온도장과 유동장의 연결성을 해석하기에는 적절치 못한 부분이 많다. 따라서 상변화가 있을 때, PISO 알고리즘의 수정이 필요하고, 본 연구에서는 부력항과 다공도 생성항을 속도-압력 연결 처리시 생성항의 갱신을 통해서 정확한 해를 얻을 수 있는 방법을 제안하였다. 구체적인 방법은 아래와 같다. 아래의 식에서 위 첨자 \*, \*\*, \*\*\*, \*\*\*\* 은 각각 다른 계산 레벨에서의 변수의 값을 나타내고, aP = a0+rV/dt 이다. 운동량 방정식을 이산화한 방정식에서 부력항은 SCui에, 다공도 생성항은 SPui에 각각 포함된다.

Step 1. Momentum predictor

$$[(a_p^u)^n + (S_p^u)^n] u_{iP}^* = H^n(u_i^*) - \Delta \cdot \hat{p}^n + (S_C^u)^n + \left( \frac{\rho V}{\delta t} \right) u_{i,P}^n \quad (18)$$

이 암시적(implicit) 이산화 식은 모든 계산격자에서 각각의 속도 성분에 대해서 계산된다.

Step 2. First velocity corrector

$$[(a_p^u)^n + (S_p^u)^n] u_{iP}^{**} = H^n(u_i^*) - \Delta \cdot \hat{p}^* + (S_C^u)^n + \left( \frac{\rho V}{\delta t} \right) u_{i,P}^n \quad (19)$$

위의 식에서 좌변의 속도 성분과 우변의 H 연산자에서의 속도 성분은 다른 계산 레벨의 값이고 각각의 속도 성분은 명시적(explicit)으로 계산된다.

### Step 3. First pressure-correction equation

식 (19)에서 식(18)을 빼고, apui로 나눈 후, 아래의 이산화된 연속방정식을 적용하면

$$\Delta_i(\rho u_i^{**}) = 0 \quad (20)$$

다음과 같은 첫 번째 압력 수정 방정식을 얻을 수 있다.

$$\Delta_i \left[ \frac{\rho}{(a_p^{u_i})^n + (S_p^{u_i})^n} \Delta_i(p^* - p^n) \right] = \Delta(\rho u_i^*) \quad (21)$$

위의 3단계까지는 일반적인 PISO 알고리즘과 차이가 없고, 또한 SIMPLE 알고리즘과 동일하다.

### Step 4. Temperature and Liquid fraction predictor

$$\left[ (a_p^T)^* + (S_p^T)^n \right] T_P^* = H^{T^*}(T^*) + \left( \frac{\rho V}{\delta t} \right) T_P^n + (S_C^T)^n \quad (22)$$

$$f_P^* = f_P^n + \frac{dF}{dT} [T_P^* - F^{-1}(f_P^n)] \quad (23)$$

식 (22)는 암시적인 방정식으로 행렬 해법을 필요로 하고, HT\*(T)를 계산시 1차 수정된 속도 성분 ui\*\*를 사용한다. 3.2절에서 제안된 수치해석 방법을 이용하여 에너지 보존을 만족하는 온도장과 액상분율을 동시에 구한다.

### Step 5. Second velocity corrector

$$\left[ (a_p^{u_i})^* + (S_p^{u_i})^* \right] u_{iP}^{***} = H^*(u_i^{**}) - \Delta_i p^{**} + (S_C^{u_i})^* + \left( \frac{\rho V}{\delta t} \right) u_{i,P}^n \quad (24)$$

위의 식에서 부력항과 머시영역에서 유동 감속 항은 Step 4에서 계산된 온도와 액상분율을 통해서 계산된다. 이 과정은 기존의 PISO 알고리즘과 다른 부분으로, 상변화가 있는 경우 해의 정확도에 큰 영향을 미치는 과정이다.

### Step 6. Second pressure-correction equation

식(19)의 좌변의 계수를 식(24)와 같게 바꾼 후, Step 3과 비슷한 과정을 거치게 되면 아래와 같은 2차 압력 수정 식을 얻을 수 있고,

$$\Delta_i \left[ \frac{\rho}{(a_p^{u_i})^* + (S_p^{u_i})^*} \Delta_i(p^{**} - p^*) \right] = \Delta_i \left[ \frac{\rho}{(a_p^{u_i})^* + (S_p^{u_i})^*} [(S^{u_i} - S^{u_i^*}) + H^*(u_i^{**} - u_i^*)] \right] \quad (25)$$

ui\*\*\*는 아래의 연속방정식을 만족해야 한다.

$$\Delta_i(\rho u_i^{***}) = 0 \quad (26)$$

위의 2차 압력 수정 식에서 중요한 점은, Step 4를 통해서 갱신된 온도에 의한 부력항과 액상분율에 의한 다공도 생성항이 각각 SCui와 SPui에 포함되어 있다는 것이다. 이와 같은 과정을 통해서 온도장과 유동장 및 액상분율과의 연결성이 더욱 강화될 수 있다.

### Step 7. First Temperature and liquid fraction corrector

$$\left[ (a_p^T)^{**} + (S_p^T)^* \right] T_P^{**} = H^{T^{**}}(T^*) + \left( \frac{\rho V}{\delta t} \right) T_P^n + (S_C^T)^* \quad (27)$$

$$f_P^{**} = f_P^* + \frac{dF}{dT} [T_P^{**} - F^{-1}(f_P^*)] \quad (28)$$

식 (27)은 식 (22)와 유사하게, 암시적인 식이고, HT\*\*는 ui\*\*\*로부터 계산된다. Step 4에서와 같이 3.2절에서 제안된 수치해석 방법으로 온도장과 액상분율을 구한다.

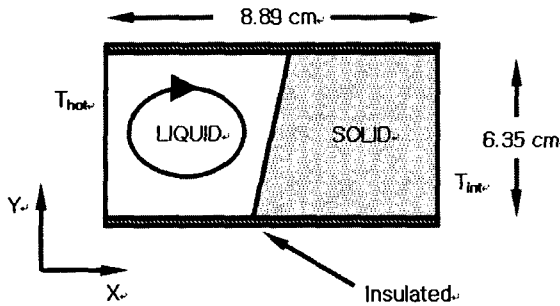


Fig. 2 Problem domain after onset of melting

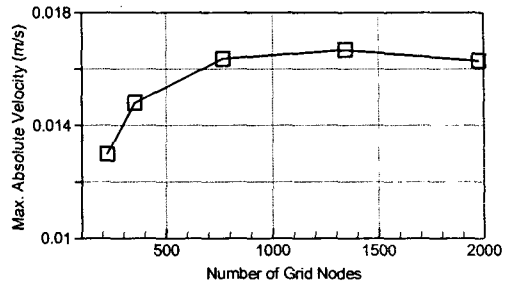


Fig. 3 Relationship between the maximum absolute velocity at the last time step and the number of grid nodes.

Table 1 Physical Properties of Pure Gallium

Density (liquid), $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	6093
Reference density, $\rho_{ref}$ [kg/m <sup>3</sup> ]	6095
Reference temperature, $T_{ref}$ [°C]	29.78
Volumetric thermal expansion coefficient of liquid, $\beta$ [1/K]	$1.2 \cdot 10^{-4}$
Thermal conductivity, $k$ [W/m]	32.0
Melting point, $T_m$ [°C]	29.78
Latent heat of fusion, $L$ [J/kg]	80160
Specific heat capacity, $C$ [J/kg · K]	381.5
Dynamic viscosity, $\mu$ [kg/m · s]	$1.81 \cdot 10^{-3}$
Prandtl number, Pr	$2.16 \cdot 10^{-2}$

Step 8. Second temperature corrector

$$[(a_p^T)^{***} + (S_p^T)^{**}]T_p^{***} = H^{T^{**}}(T^{**}) + \left(\frac{\rho V}{\delta t}\right)T_p^n + (S_p^T)^{**} \quad (29)$$

위의 식은 현시적인 식으로  $TP^{***}$ 는  $T^{**}$ 로부터 구해지며, 행렬 해법은 필요하지 않다.

Step 9. Second liquid fraction corrector

$$f_p^{***} = f_p^{**} + \frac{dF}{dT} [T_p^{***} - F^{-1}(f_p^{**})] \quad (30)$$

액상분율이  $TP^{***}$ 로부터 위와 같은 관계식을 통해서 구해진다.

#### 4. 수치해석 결과 및 고찰

제안된 수치해석 방법의 검증을 위해서 사각 공동(rectangular cavity)에서 한쪽 벽면의 높은 온도로 인한 순수 갈륨의 용해 문제를 2차원적으로 수치해석을 수행하였다. 순수 갈륨은 상변화가 상온과 유사한 29.78 OC에서 등온과정으로 진행되어서, 상경계면을 실험적으로 추적하기 용이하고 실험치도 풍부하다. 따라서 본 연구에서는 Gau 등의 실험 결과[12]와 비교를 통해서 수치해석의 타당성을 검증하고, 제안된 알고리즘과 기존 알고리즘과의 비교를 통해서, 제안된 수치해석 방법의 시간적 효율성과 적용의 타당성을 제시하고자 한다.

Fig. 2는 계산영역과 경계조건을 보여준다. Fig. 2에서,  $X = 8.89\text{cm}$ ,  $Y = 6.35\text{cm}$ ,  $T_{hot} = 38 \text{ OC}$ ,  $T_{int} = 28.3 \text{ OC}$ 로 Gau등의 실험 조건과 동일하다. 갈륨의 물성치는 전체 온도장의 범위가 100C 정도(28.3-380C) 이기 때문에 그 범위가 작아서 320C 일 때의 물성치로 일정하다고 가정되었고, Table 1에 정리되어 있다. 또한 액상과 고상에서의 물성치 차이는 없다고 가정하였다. Fig. 2와 같은 용해 문제의 경우 Stefan 수는 0.039, Rayleigh 수는  $6 \times 10^5$  이다.

유한체적법(Finite Volume Method)을 이용하여 이산화하였고, 대류항에는 상류도식(upwind scheme)을 사용하였다. 행렬은 SIP(Strongly Implicit Procedure) 행렬 해법을 사용하였다. Pentium IV 1.4GB CPU를 사용하였고, 여러 경우에 대한 계산시간은 Fig. 5에 잘 나타나 있다. 격자계는 비엇갈림 격자계를 사용하였으며, 격자 독립성 테스트는 총 5개의 등 간격 격자계에 대

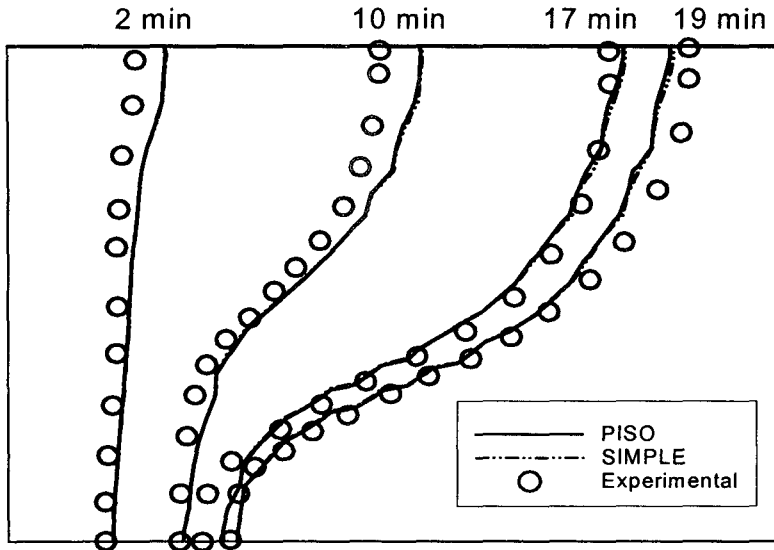


Fig. 4 Comparison of melt fronts calculated by both PISO and SIMPLE algorithm and experimental for the two-dimensional melting of gallium

해서 수행되었다. Fig. 3은 격자수에 대한 마지막 시간 간격에서의 최대 속도 값의 변화를 보여준다. Fig. 3으로부터 최대 속도에 대해서 독립성을 나타낼 수 있는 최적 격자수는 768개 (32 × 24) 임을 알 수 있다.

Fig. 4에서 PISO 알고리즘을 사용하였을 때와 SIMPLE 알고리즘을 사용하였을 때의 시간의 따른 상경계면을 실험치와 함께 나타내었다. PISO 알고리즘을 사용하였을 때와 SIMPLE 알고리즘을 사용하였을 때의 상경계면의 위치는 거의 차이가 없다. 따라서 본 연구에서 제안한 수치해석의 기법이 매우 타당함을 알 수 있다. 수치해석 결과의 타당성을 위해 실험치와 비교해 보면, 매 시간 간격마다 약간의 오차는 보이고 있으나 전반적인 경향은 매우 비슷하고, 특히 17분일 때의 상경계면은 실험치와 거의 유사하다. Fig. 4의 결과를 보면 수치해석 결과는 약간의 저글거림을 나타내는데 이러한 현상은 엔탈피 방법의 특성으로 타 수치해석 결과에서도 이 현상은 모두 나타난다. Fig. 5는 시간 간격을 달리했을 때의 국부 Courant수의 변화에 따른 수치 계산 시간을 수정된 PISO 알고리즘일 때와 SIMPLE 알고리즘일 때를 각각 나타낸 그림이다. 국부 Courant는 아래와 같이 특정 속도와 공동의 높이로 정의 된다.

$$C_i = \frac{\delta t U}{\delta x} \quad \text{with} \quad U \equiv \frac{\alpha}{L} \left( \frac{Ra}{1 + 1/Pr} \right)^{1/2} \quad (31)$$

여기서  $x$ 는 격자 간격이고  $L$ 은 공동의 높이이다. 일정한 격자 간격을 사용하였기 때문에 국부 Courant수는 모든 격자에서 같다. 특성 속도  $U$ 는  $Ra$ 와  $Pr$ 이 주어지면 쉽게 계산되는 값이다.

Fig. 5에서 PISO 알고리즘을 사용하였을 경우, SIMPLE 알고리즘을 사용하였을 때보다 계산시간이 현격하게 줄어들음을 알 수 있다. 또한, 시간 간격이 클수록 전체 계산시간을 짧아지지만 그 정도는 시간 간격이 클수록 줄어드는 현상을 두 알고리즘에서 모두 나타낸다.

### 5. 결론

기존의 도돌이침을 사용하는 알고리즘에만 적용 가능 하였던 엔탈피 방법을 PISO 알고리즘에 적용 가능 하도록 새로운 수치해석 방법을 제안하였다. 제안된 수치해석 방법은 갈륨의 용해 문제에 적용하여 검증하였고, 제안된 방법의 요약과 검증 결과는 다음과 같다.

(1) 에너지 방정식에서 온도와 액상분율을 알



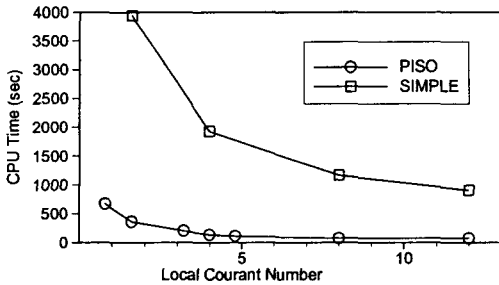


Fig. 5 CPU time as a function of local Courant number,  $Cl$

고리즘에서의 도돌이법을 사용하지 않고, 행렬 해법에서의 도돌이법에서 생성항 등의 갱신을 통해서 에너지 보존을 만족하는 온도와 액상분율을 동시에 구했다.

(2) PISO 알고리즘을 적용할 때, 운동량 방정식에서 온도 및 액상분율의 함수인 다공도 생성항과 부력항의 영향을 2차 압력 수정 시 고려하여 속도, 압력, 온도, 액상분율의 연결성을 PISO 알고리즘에 반영하였다.

(3) 제안된 수치해석 방법을 갈륨의 용해 문제에 적용하여 본 결과 SIMPLE 알고리즘의 해와 PISO 알고리즘의 해가 거의 같게 나왔고, 실험치와 매우 유사한 경향을 나타냈다. 따라서 본 연구에서 제안된 수치해석 방법은 타당하다고 할 수 있고, 비정상 유동의 계산시 매우 유용하게 사용될 수 있다.

## 후기

본 연구는 과학기술부의 공학용 해석 소프트웨어 기술개발사업의 연구비지원으로 수행되었으며 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

## 참고문헌

- [1] Lacrox, M. and Voller, V.R., "Finite difference solutions of solidification phase change problem: transformed versus fixed grids," Numerical Heat Transfer, Part B, Vol.17, (1990), p.25-41.
- [2] Morgan, K., "A numerical analysis of freezing and melting with convection," Comp. Methods Appl. Eng, Vol.28, (1981), p.275-284.
- [3] Voller, V.R. and Prakash, C., "A fixed grid numerical modeling methodology for convection/diffusion mushy region phase change problems," Int. J. Heat Mass Transfer, Vol.30, (1987), p.1709-1719.
- [4] Brent, A.D., Voller, V.R. and Reid, K.J., "Enthalpy-Porosity technique for modeling convection-diffusion phase change: Application to the melting of a pure metal," Numerical Heat Transfer, Vol.13-1, (1988), p.295-318.
- [5] Voller, V.R., "Fast implicit finite-difference method for the analysis of phase change problems," Numerical Heat Transfer, Part B, Vol.17, (1990), p.155-169.
- [6] Voller, V.R. and Swaminathan, C.R., "General source-based method for solidification phase change," Numerical Heat Transfer, Part B, Vol.19, (1991), p.175-189.
- [7] Patankar, S.V., Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, McGraw-Hill, New York (1980)
- [8] Issa, R.I., "Solution of the implicitly discretised fluid flow equations by operator-splitting," J. Computational Physics, Vol.62, (1985), p.40-65.
- [9] Oliveira, P.J. and Issa, R.I., "An improved PISO algorithm for the computation of buoyancy-driven flows," Numerical Heat Transfer, Part B, Vol.40-6, (2001), p.473-493.
- [10] 이재원, 유홍선, 강관구, "PISO 알고리즘에서 난류예측의 후행성과 보완에 대한 연구," 한국전산유체공학회, Vol. 7-1, (2002), p.1-9.
- [11] Kurz, W. and Fisher, D.J., Fundamentals of Solidification, Trans Tech Publications, Aedermannsdorf, Switzerland (1989).
- [12] Gau, C. and Viskanta, R., "Melting and solidification of a pure metal on a vertical wall," J. Heat Transfer, Vol.108, (1986), p.174-181.