

# 함수비 특성곡선과 투수계수 특성곡선이 불포화토내에서의 물의 흐름에 미치는 영향분석

## Analysis of Influence by soil water-characteristic curve and permeability-suction relationship for the water flow in unsaturated soil

김 석 남\*  
Kim, Suknam

---

### Abstract

Water flow in unsaturated soils is affected by two mathematical equations called soil water-characteristic curve and permeability-suction relationship. Soil water-characteristic curve is an equation showing volumetric water content-suction relationship. Many researchers have presented equations for the relationships. This paper illustrates the importance of correctly determining the two relationships when analyzing unsaturated water flows. Results from two methods, Gardner (1958) and Fredlund et al. (1994), are used for comparison purposes.

Numerical simulations of water flow by finite element method are performed using the two methods. The results by the numerical simulations are compared with the field data which was obtained from time-domain reflectometry (TDR) probes in Delaware County, Ohio. This data was obtained by the Seasonal Instrumentation Program which is included as a part of the Strategic Highway Research Program (SHRP).

**Key words** : soil water-characteristic curve, permeability-suction relationship, unsaturated soil, finite element method, seasonal instrumentation

---

### 요 지

불포화토에서 물의 흐름은 함수비 특성곡선과 투수계수 특성곡선(permeability-suction relationship)이라 불리우는 두 방정식에 의해서 영향 받는다. 함수비 특성곡선은 체적함수비와 석션(suction) 간의 관계를 나타내는 방정식이다. 많은 연구자들은 특성곡선식들을 제시해 왔다. 이 논문은 불포화토에서 물의 흐름을 분석할 때 특성곡선식들을 정확하게 결정하는 것이 중요하다는 것을 보여준다. 비교목적을 위해서 두 방법 즉, Gardner (1958)에 의해서 제시된 특성곡선식들과 Fredlund (1994)에 의해서 제시된 특성곡선식들이 사용된다.

이 두 방법을 사용하여 유한요소법에 의한 물 흐름의 수치해석이 수행된다. 수치해석 결과들은 미 Ohio 주 Delaware County에 있는 TDR (Time-domain reflectometry) 계측기로부터 얻어진 현장 데이터와 비교된다. 이 데이터는 전략적 고속도로 연구 프로그램(Strategic Highway Research Program)의 한 부분으로 포함된 계절 계측 프로그램(Seasonal Instrumentation Program)에 의해 얻어졌다.

**핵심용어** : 함수비 특성곡선, 투수계수 특성곡선, 불포화토, 유한요소법, 계절 계측

---

\* 정희원, 한국토지공사 토지연구원 과장

## 1. 서 론

자연상태에 존재하는 흙들은 포화 또는 불포화 상태로 존재할 수 있다. 포화토의 경우 침투와 같은 물의 흐름에 관해 수학적으로 해석하고자 할 때 포화토내에서는 투수계수가 일정하므로 불포화토에 비해 상대적으로 용이하다. 그러나 기술자가 접하는 자연 또는 변형된 상태의 흙은 대개의 경우 불포화 상태로 존재하며 포화토는 불포화토의 한 특별한 상태로 보아야 할 것이다.

불포화토내에서의 물의 흐름의 문제를 수치해석하고자 할 때에는 흙의 특성계수 간에 관계를 나타내는 두 개의 방정식이 필요하다. 하나는 체적함수비와 석션(suction) 간의 관계를 나타내는 함수비 특성곡선식(soil-water characteristic curve)이다. 다른 하나는 투수계수와 석션(suction) 간의 관계를 나타내는 투수계수 특성곡선식이다. 석션(suction)은 흙의 공극내에 존재하는 공극공기압과 공극수압 간의 차를 의미하는 값으로 흙이 완전히 포화 되었을 때 0으로부터 흙이 완전히 건조 되었을 시 106kPa 까지 변화한다.

함수비 특성곡선식과 투수계수 특성곡선식에 대해서는 여러 연구자들에 의해 연구 및 발표되어 왔다. 이 논문에서는 식의 간편함으로 인해 많은 연구자들에 의해 사용되고 있는 Gardner (1958)가 제시한 함수비 특성곡선식과 투수계수 특성곡선식을 사용하여 불포화토에서의 물의 흐름을 유한요소법에 의한 수치해석을 실시하였다. 그리고 상대적으로 최근에 발표된 Fredlund와 Xing (1994)의 함수비 특성곡선식과 Fredlund 등 (1994)에 의해 발표된 투수계수 특성곡선식을 사용하여 물의 흐름에 대해 수치해석을 실시하였다. 이 두 수치해석에 의해 얻어진 결과들은 현장계측으로 얻어진 값들과 비교분석을 실시하였다.

## 2. 함수비 특성곡선식과 투수계수 특성곡선식

불포화토에서의 물의 흐름을 분석하기 위해 사용되는 함수비 특성곡선식과 투수계수 특성곡선식은 많은 식들이 존재한다. 함수비 특성곡선식은 실험결과를 주어진 공식에 조정작업을 통하여 계수값들을 계산함으로써 얻어진다. 투수계수 특성곡선식을 결정하기 위한 방법은 두 가지가 있다. 하나는

함수비 특성곡선식과 마찬가지로 실험결과로부터 투수계수 특성곡선식을 직접 구하는 방법이고, 다른 하나는 실험결과에 의하지 않고 함수비 특성곡선으로부터 투수계수 특성곡선을 직접 결정하는 방법이다.

### 2.1 함수비 특성곡선식

불포화토에서 함수비와 석션(suction) 간의 관계에 대한 연구로서 초기에 제시된 함수비 특성곡선식 중 Gardner (1958)에 의해 제시된 식은 그 식의 간편성으로 인해 많은 연구자들에 의해 이용되고 있다. Gardner 함수비 특성곡선식은 다음과 같다.

$$\theta_u = \frac{\theta_s}{A_w |\psi|^a + 1} \quad (1)$$

윗 식에서  $\theta_u$ 는 불포화 상태에서의 흙의 체적함수비,  $\theta_s$  포화시의 흙의 체적함수비로 그 값은 흙의 공극비(porosity)와 같다.  $A_w$ 와  $a$ 는 실험결과로부터 조정(fitting)작업을 통해서 얻어지는 계수값들이다. 그리고  $\psi$ 는 석션(suction)이다.

Gardner의 함수비 특성곡선식은 간편하나 실험결과와 다소 차이를 보여 물의 흐름을 분석하는데 있어 오차를 발생할 가능성이 있다. 이러한 문제점은 Fredlund와 Xing (1994)에 의해 발표된 함수비 특성곡선식을 사용하면 어느 정도 해결될 수 있다고 사료된다. 그러나 Fredlund와 Xing의 함수비 특성곡선식은 다소 복잡하다는 단점이 있다. Fredlund와 Xing의 함수비 특성곡선식은 다음과 같다.

$$\theta_u = C(\psi) \frac{\theta_s}{\left\{ \ln \left[ e + \left( \frac{\psi}{a} \right)^n \right] \right\}^m} \quad (2)$$

이 식에서  $C(\psi)$ 는 일종의 보정계수로서 다음과 같다

$$C(\psi) = 1 - \frac{\ln \left( 1 + \frac{\psi}{\psi_r} \right)}{\ln \left( 1 + \frac{1000000}{\psi_r} \right)} \quad (3)$$

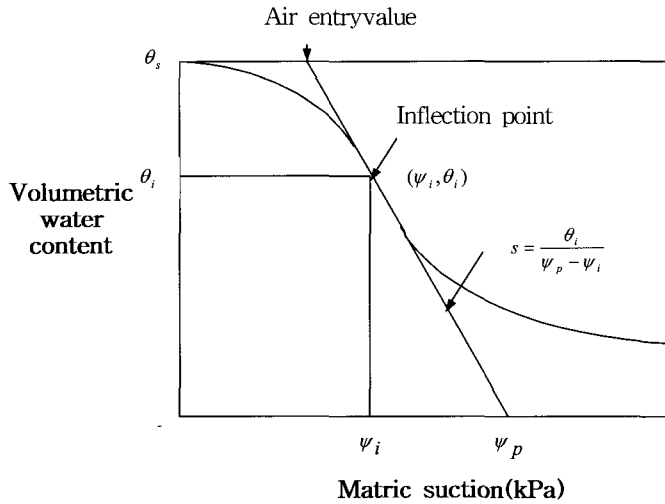


그림 1. 계수  $a, n, m$ 의 결정을 위한 예시도  
(Fredlund and Xing, 1994)

식(2)에서  $\ln$ 은 자연로그,  $e$ 는 자연로그 지수값이고  $a, n, m$ 은 실험결과로부터 조정작업을 통해서 얻어지는 계수값들이다. 식(3)에서  $\psi_r$ 는 잔류함수비에 대응되는 석션(suction)이다. 흙의 함수비는 석션(suction)이 증가함에 따라 감소하게 되는데 어느 시점에 이르면 흙속의 물을 추가로 제거하기 위해서는 큰 석션(suction)이 요구된다. 이 때의 함수비를 잔류함수비라 한다. 전형적인 잔류함수비는 약 1500 kPa 이다(Fredlund and Xing, 1994). 그림 1.은 계수 값  $a, n, m$ 을 결정하는 과정을 보여준다. 처음에 함수비 특성곡선 상의 변곡점(inflection point)  $(\psi_i, \theta_i)$ 의 위치를 정하고 이점을 통과하는 접선을 그린다. 그런 다음 식(4)로부터 계수 값들을 결정한다. 그림 1.에서 보여지는 Air-entry value는 흙속으로 공기가 들어가기 시작할 때의 석션(suction)을 의미한다.

$$\begin{aligned}
 a &= \psi_i \\
 m &= 3.67 \ln \left( \frac{\theta_s}{\theta_i} \right)^2 \\
 n &= \frac{1.31^{m+1}}{m \theta_s} 3.72 s \psi_i \\
 s &= \frac{\theta_i}{\psi_p - \psi_i}
 \end{aligned} \tag{4}$$

## 2.2 투수계수 특성곡선식

이 논문에서 사용된 투수계수 특성곡선식중의 하나인 Gardner 방정식은 Gardner의 함수비 특성곡선식과 유사한 형태로 다음과 같다.

$$k_h = \frac{k_s}{A_k |\psi|^b + 1} \tag{5}$$

이 식에서  $k_h$ 는 불포화시의 투수계수,  $k_s$ 는 포화시의 투수계수,  $A_k$ 와  $b$ 는 실험결과로부터 조정작업을 통해서 얻어지는 계수 값들이다.

Fredlund 등(1994)은 실험결과에 의하지 않고 함수비 특성곡선식을 이용하여 투수계수 특성곡선식을 구할 수 있는 식(6)을 제시하였다.

$$k_r = \frac{\int_{\ln(\psi)}^{\psi} \frac{\theta(e^y) - \theta(\psi)}{e^y} \theta'(e^y) dy}{\int_{\ln(\psi_{aev})}^{\psi} \frac{\theta(e^y) - \theta_s}{e^y} \theta'(e^y) dy} \tag{6}$$

여기서  $k_r$  포화시 투수계수에 대한 불포화시 투수계수에 대한 비,  $b$ 는 1000000에 자연로그를 취한 값이고,  $\theta'$ 는 식(2)를 석션  $\psi$ 에 대해 미분한 값이다,  $\psi_{aev}$ 는 그림 1.에서 보여지는 Air-entry value 이다. 식(6)은 다음과 같은 수치적분(numerical integration) 절차에 의해서 풀 수 있다. 먼저  $\psi$ 와 다음과 같이 각각 적분의 하한 및 상한으로 놓자.

$$\begin{aligned} a &= \ln(\psi_{aev}) \\ b &= \ln(1000000) \end{aligned} \quad (7)$$

그런 다음 구간  $[a, b]$ 를 같은 크기  $\Delta y$ 의  $N$  개의 간격으로 분할한다. 그러면,

$$\begin{aligned} a &= y_1 < y_2 < \dots < y_N < y_{N+1} = b \\ \Delta y &= \frac{b-a}{N} \end{aligned} \quad (8)$$

식(6)의 분모는 다음과 같이 구해진다.

$$\int_{\ln(\psi_{aev})}^b \frac{\theta(e^y) - \theta_s \theta'(e^y)}{e^y} dy \approx \Delta y \sum_{i=1}^N \frac{\theta(e^{\bar{y}_i}) - \theta_s \theta'(e^{\bar{y}_i})}{e^{\bar{y}_i}} \quad (9)$$

여기서  $\bar{y}_i$ 는  $i$  번째 간격  $[y_i, y_{i+1}]$ 의 중간점이다. 식(2)의 미분  $\theta'$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \theta'(\psi) &= C'(\psi) \frac{\theta_s}{\{\ln[e + (\psi/a)^n]\}^m} \\ &- C(\psi) \frac{\theta_s}{\{\ln[e + (\psi/a)^n]\}^{m+1}} \frac{mn(\psi/a)^{n-1}}{a[e + (\psi/a)^n]} \end{aligned} \quad (10)$$

여기서  $C'(\psi)$ 는 식(3)을 미분한 값이다.

$$C'(\psi) = \frac{-1}{(\psi_r + \psi) \ln\left(1 + \frac{1000000}{\psi_r}\right)} \quad (11)$$

Air-entry value  $\psi_{aev}$ 와  $10^6$  kPa 사이에 있는 임의의 석션(suction) 값  $\psi$ 에 대해서 석션(suction)에 대해 자연로그를 취한 값  $\ln(\psi)$ 는 구간  $[a, b]$ 에 있다.  $\ln(\psi)$ 가  $j$  번째 구간  $[y_j, y_{j+1}]$ 에 있다면, 식(6)의 분자는 다음과 같다.

$$\int_{\ln(\psi)}^b \frac{\theta(e^y) - \theta(\psi)\theta'(e^y)}{e^y} dy \approx \Delta y \sum_{i=j}^N \frac{\theta(e^{\bar{y}_i}) - \theta(\psi)\theta'(e^{\bar{y}_i})}{e^{\bar{y}_i}} \quad (12)$$

따라서 석션(suction)  $\psi$ 에서 투수계수의  $k_r(\psi)$ 는 다음 식으로 표현된다.

$$k_r(\psi) \approx \frac{\sum_{i=j}^N \frac{\theta(e^{\bar{y}_i}) - \theta(\psi)\theta'(e^{\bar{y}_i})}{e^{\bar{y}_i}}}{\sum_{i=1}^N \frac{\theta(e^{\bar{y}_i}) - \theta_s \theta'(e^{\bar{y}_i})}{e^{\bar{y}_i}}} \quad (13)$$

#### 4. 물 흐름 방정식의 수치해석

불포화토에서의 물 흐름 방정식은 Guymon 등 (1993)에 의해 다음과 같이 제시되었다.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ k_h \frac{\partial h}{\partial x} \right] = \frac{\partial \theta_u}{\partial t} \quad (14)$$

여기서  $k_h$ 는 투수계수,  $h$ 는 전수두,  $\theta_u$ 는 체적 함수비이다. 식(14)는 다음과 같은 수치해석식으로 표현할 수 있다.

$$[C(\psi)] \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial t} \end{Bmatrix} + [K(\psi)] \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{Bmatrix} = \{F\} \quad (15)$$

여기서 매트릭스  $[C(\psi)]$ 와  $[K(\psi)]$ 는 각 요소 매트릭스를 조합한 global 매트릭스이고 벡터  $\{F\}$ 는 각 지점에서의 침투율을 조합한 벡터이다. 한 요소의 매트릭스  $[C(\psi)]^{(e)}$ 와  $[K(\psi)]^{(e)}$ 는 다음 식으로 표시된다.

$$[C(\psi)]^{(e)} = \frac{\partial \theta_u}{\partial \psi} \frac{L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$[K(\psi)]^{(e)} = \frac{k_h(\psi)}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

식 (16)과 (17)에서  $L$ 은 요소의 길이이다. 두 벡터  $\{\dot{\psi}\}$ 와  $\{\psi\}$ 를 각각 식(18)과 (19)로 놓으면 식(15)는 식(20)으로 표현된다.

$$\{\dot{\psi}\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial t} \end{Bmatrix} \quad (18)$$

$$\{\psi\} = \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{Bmatrix} \quad (19)$$

$$[C(\psi)]\{\dot{\psi}\} + [K(\psi)]\{\psi\} = \{F\} \quad (20)$$

식(20)은 상미분 방정식들을 매트릭스로 표현한 것이다. 식(20)은 유한차분법을 사용하여 풀면 다음 식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} & \left( [C(\psi)] + \omega \Delta t [K(\psi)] \right) \{ \psi \}_{t+\Delta t} \\ & = \left( [C(\psi)] - (1-\omega) \Delta t [K(\psi)] \right) \{ \psi \}_t \\ & + \Delta t \left( (1-\omega) \{ F \} + \omega \{ F \}_{t+\Delta t} \right) \end{aligned} \quad (21)$$

이 식에서  $\omega$ 는 forward difference method에 대해서 0, Crank-Nicholson method에 대해서 1/2, backward difference method에 대해서는 1이다 (Istok, 1989). 이 논문에서는 backward difference method를 사용하였다.

## 5. 수치해석 및 계측 결과 분석

### 5.1 함수비 특성곡선과 투수계수 특성곡선

그림 2는 함수비 특성곡선들을 보여준다. 실험 데이터에 의한 특성곡선은 미 Ohio 주 Delaware County의 현장에서 채취된 흙을 실내실험을 통하여 얻어졌다. Gardner의 특성곡선과 Fredlund 등에 의한 특성곡선은 실험데이터에 곡선들을 최대한 일치토록 하는 조정(fitting)작업을 통해 얻어졌다. 그림에서 보여지는 바와 같이 낮은 석션(suction) 영역에서는 Gardner의 특성곡선에 의한 체적함수비는 Fredlund 등의 특성곡선에 의한 체적함수비 보다 적은 경향을 보여 준다. 반면에 높은 석션 영역에서는 그 반대의 경향을 보여 준다.

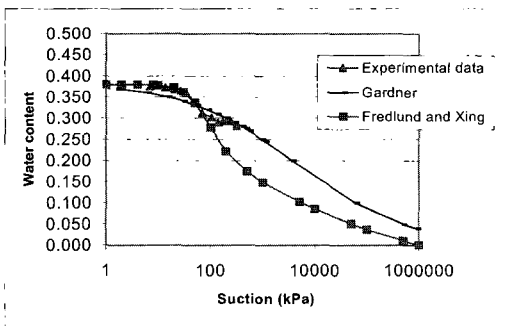


그림 2. 함수비 특성곡선

그림 3은 투수계수 특성곡선들을 보여주고 있다. Fredlund 등에 의한 투수계수 특성곡선은 앞에서 언급된 방법으로부터 얻어졌다. Gardner에 의한 투수계수 특성곡선은 실험결과로부터 얻어져야 하

나, 여기서는 Fredlund 등에 의한 투수계수 특성곡선식을 이용하여 역계산 과정에 의해 구해졌다. 그림에서 보여지는 바와 같이 두 특성곡선은 거의 일치한다.

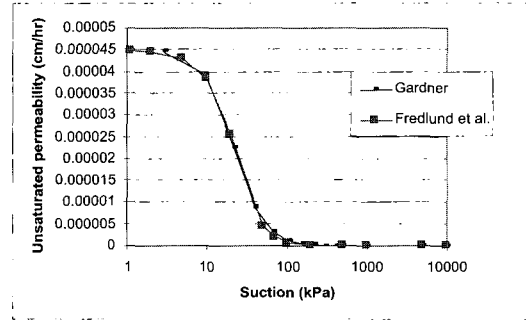


그림 3. 투수계수 특성곡선

### 5.2 수치해석과 계측 결과의 비교 분석

그림 4에 보여지는 포장단면은 미 Ohio주 Delaware County에 있는 국도 23호선의 한 포장단면이다. 여기에는 몇몇 계측기들이 매설되어 있다. 계측기들은 전략적 고속도로 연구 프로그램 (Strategic Highway Research Program, SHRP)의 일부분인 계절 계측 프로그램(Seasonal Instrumentation Program, SMP)에 의해 매설되었다. 실측 함수비는 TDR (Time Domain Reflectometry)로부터 계측된다. 수치해석은 포장의 노반 부분에 대해서 유한요소법을 사용하여 실시되었다. 분석과정에서 노반의 흙은 균질한 흙으로 가정되었다.

그림 4의 포장단면의 대한 수치해석 결과가 그림 5,와 그림 6.에서 보여진다. 그림 5.는 Gardner 특성곡선식들을 이용한 수치해석 결과와 계측결과를 비교한 것이다. 그리고 그림 6.은 Fredlund 등에 의한 특성곡선식들을 이용한 수치해석 결과와 계측결과를 비교한 것이다. 이 두 그림에서 두 굵은 실선으로 이루어진 곡선들이 각각 98년 4월 24일과 98년 5월 14일에 계측된 값들이고, 다른 곡선들은 수치해석 결과로부터 얻어진 시간에 따른 체적함수비 변화를 나타낸다. 그림에서 보여지는 바와 같이 Fredlund 등에 의한 특성곡선식들을 이용한 수치해석 결과가 현장계측결과와 상대적으로 좋은 일치를 보여주고 있다. 그러나 단면의 상부부분과 하부부분에서는 약간의 차이를 보여주는 데 이는 수치해석과정에서 노반 전체를 균질토로 가정함으로 인

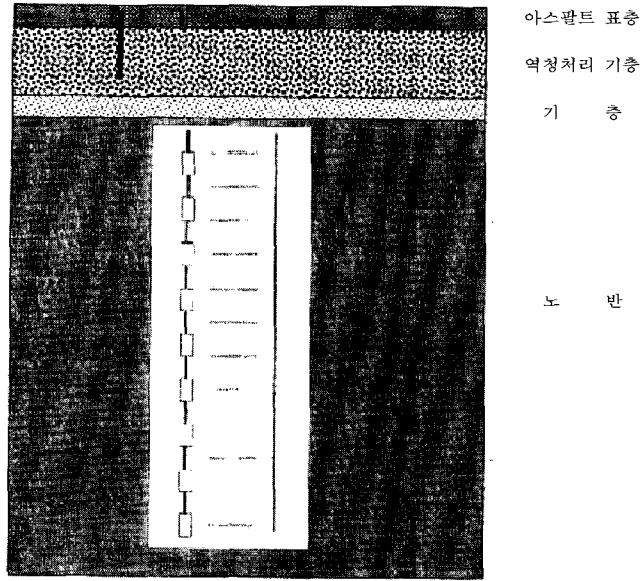


그림 4. 미 Ohio주 Delaware County 국도 23호선 포장단면

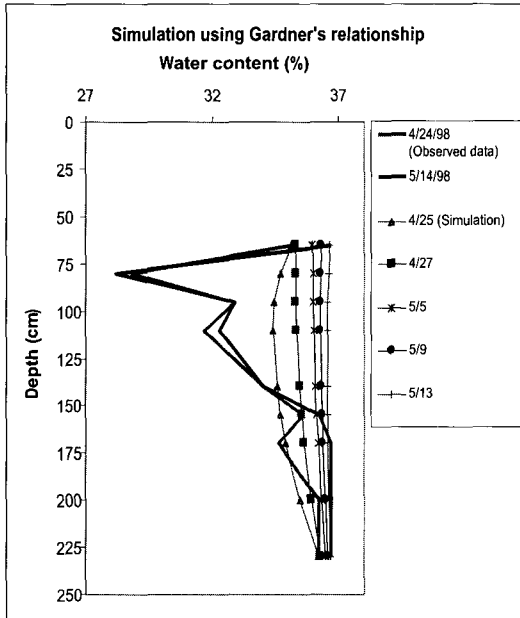


그림 5. Gardner 특성곡선식들을 이용한 수치해석 결과그림

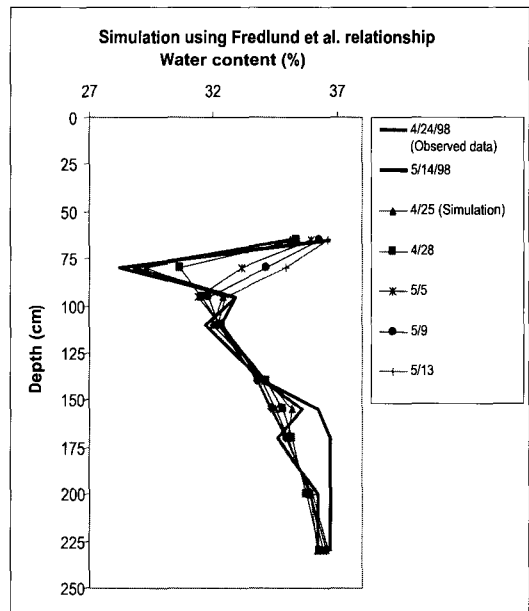


그림 6. Fredlund 등에 의한 특성곡선식들을 이용한 수치해석 결과

해서 생기는 오차로 고려된다. 한편, Gardner 특성곡선식들을 이용하여 수치해석한 결과는 현장계측 결과와 많은 차이를 보여주고 있다.

## 6. 결 론

불포화토 내에서의 체적함수비의 변화를 예측하기 위하여 유한요소법을 이용한 수치해석을 실시하였다. 수치해석은 두 그룹의 함수비 특성곡선식과 투수계수 특성곡선식을 사용하여 실시하였다. 분석 결과로부터 다음의 두 가지 결론이 얻어졌다.

1. 실내실험결과로부터 함수비 특성곡선의 조정(fitting)작업결과 Fredlund 등의 함수비 특성곡선식이 Gardner의 함수비 특성곡선식보다 실내실험결과와 잘 일치하였다. 이는 Gardner의 함수비 특성곡선식은 순수한 경험식임에 비해, Fredlund 등의 함수비 특성곡선식은 이론적 요소가 가미된 반 경험식이어서 실험결과와 대체적으로 잘 일치한다고 사료된다.
2. 수치해석에 사용되는 함수비 특성곡선의 선택이 체적함수비 예측결과에 상당한 영향을 미침을 알 수 있다. 앞에서 보여진 바와 같이 Fredlund 등의 함수비 특성곡선식들을 사용한 해석이 Gardner의 함수비 특성곡선식들을 사용한 해석의 경우보다 정확한 결과를 얻을 수 있었다.

흙의 함수비가 변화함에 따라 사면의 안정이나 터파기 굴착면의 안정문제가 발생할 수 있다. 또한 기초아래 흙의 함수비 변화는 지지력의 변화를 유발하기도 한다. 따라서 토목구조물의 설계 및 안전 등을 정확하게 평가하고자 할 때에는 불포화토내에

서의 함수비 변화의 정확한 예측이 요구된다. 그러나 함수비 변화의 예측은 분석시 사용되는 함수비 및 투수계수 특성곡선식에 따라 상당한 영향을 받으므로 특성곡선식의 선택에 신중을 기할 필요가 있다.

## 참 고 문 헌

- Fredlund, D.G. and Xing, A. (1994) Equation for the soil-water characteristic curve. *Canadian Geotechnical Journal*, 31, pp. 521-532.
- Fredlund, D.G., Xing, A. and Huang, S.(1994) Predicting the permeability function for unsaturated soils using the soil-water characteristic curve." *Canadian Geotechnical Journal*, 31, pp. 533-546.
- Gardner, W.R. (1958) Some steady state solutions of the unsaturated moisture flow equation with application to evaporation from a water-table. *Soil Science*, 85, pp. 228-232
- Guymon, G.L. (1993) *Unsaturated zone hydrology*. Prentice Hall, Inc., New Jersey.
- Guymon, G.L., Berg, R.L., and Hormadka, T.V. (1993) *Mathematical model of frost heave and thaw settlement in pavements*. USA Cold Regions Research and Engineering Laboratory, CRREL Report 93-2.
- Istok, J. (1989) *Groundwater modeling by the finite element method*. American Geophysical Union, Water Resources Monograph 13.