韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 16집, 2003. 8. 123-137.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 16, Aug. 2003. 123-137.

삼각함수 학습지도에서 테크놀로지의 활용

최 종 술 (인제대학교 일반대학원)
김 향 숙 (인제대학교)
김 부 윤 (부산대학교)

본 논문의 목적은 삼각함수의 학습에 테크놀로지가 기여할 수 있는 방법적인 측면과 인지적인 효과를 명시하는 것이다. 테크놀로지가 삼각함수의 학습에 기여할 수 있는 네 가지 방법론적인 면을 '수학과 학생들의 실제 경험의 연결', '수학적 대상과 수학적 관계의 구체화', '수학의 다양한 표현 체계의 연결', '사고력 중심의 수학교육 추구'의 관점에서 논한다. 이 네 가지 방법론적인 측면 중 '수학적 대상과 수학적 관계의 구체화'와 '수학의 다양한 표현 체계의 연결'을 중심으로 삼각함수의 학습법을 예시하면서 이 두 가지 방법이 어떻게 인지적으로 기여하는지를 보여준다.

Ⅰ. 서 론

컴퓨터로 대표되는 공학적 도구의 확산은 인간의 모든 활동 영역에 막대한 영향을 미치고 있다. 이에 따라 학생들의 수학에 대한 사고 방법과 기대치에도 많은 변화를 가져왔다. 이러한 변화에 대응하여 교사는 학생들이 수학을 학습하는 것을 어떻게 도울 수 있을 것인가라는 근본적인 문제에 직면해 있다.

프로이덴탈(Freudental, 1981)은 수학적 사고력 증진이라는 수학교육의 목적 추구를 위한 강력한 수단으로서 공학적 도구를 이용할 것을 주장하였다. 미국의 NCTM에서도 학교수학을 위한 교육과정과 평가규준에서 모든 학생이 문제해결을 위해 계산기와 컴퓨터를 사용할 수 있어야 함을 강조하고 있고(NCTM, 1989; 2000), 우리나라의 제7차 수학과 교육과정에서도 기본방향을 수학적 힘의 신장으로 설정하고, 이를 구현하기 위해 계산기, 컴퓨터 및 구체적 조작물을 적극적으로 활용할 수 있도록 하여 정보화 사회에 능동적으로 대처할 수 있도록 하였다(교육부, 1998).

테크놀로지가 수학교육의 목적 추구에 있어 방법론적 측면에서 기여할 수 있는 것으로 황혜정 외(2001)는 크게 다음과 같은 네 가지를 주장하고 있다. 즉 '수학과 학생들의 실제 경험의 연결', '수학적 대상과 수학적 관계의 구체화', '수학의 다양한 표현 체계의 연결', '사고력 중심의 수학교육 추구'를 강조하고 있다.

본고에서는 삼각함수 학습에서의 테크놀로지 활용이 어떻게 위에서 언급한 네 가지 측면에 모두 기여할 수 있는 지를 보여주고, 이 네 가지 중에서 '수학적 대상과 수학적 관계의 구체화'와 '수학의 다양한 표현 체계의 연결' 부분에 중심을 둔 테크놀로지 중 메스메티카를 이용한 삼각함수 그래프의

학습환경과 GSP를 이용한 사인법칙의 학습환경을 예시한다. 또 이 학습 방법이 어떻게 인지적으로 도움이 되는지를 보여준다.

Ⅱ. 본 론

2.1. 삼각함수 학습 목표

제7차 교육과정의 10-나 단계에서 삼각함수와 관련된 부분에 따르면, 삼각함수 학습 목표는 "삼각함수의 기본 개념을 이해하고, 이를 활용할 수 있다"이다. 그 세부 내용에 들어가서 삼각함수와 그래프 부분에서는 "일반각과 호도법의 뜻을 알고, 삼각함수의 뜻을 알고, 사인, 코사인, 탄젠트의 그래프와 그 성질을 이해하고, 삼각함수의 성질을 이해하고, 간단한 삼각방정식과 삼각 부등식을 풀 수 있다"고 되어있다. 삼각형에의 응용부분에서는 "사인 법칙과 코사인 법칙을 이해하고, 삼각함수를 활용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있다"로 되어있다. 또 심화과정에서는 "자연현상에서 주기적 상황을 조사하여 삼각함수와 관련시킬 수 있다"로 되어있다.

이러한 학습은 이후에 "미분과 적분" 과정에서 삼각함수의 덧셈정리를 비롯한 여러 가지 공식과 삼각방정식의 문제를 거쳐 삼각함수의 극한과 미분 적분학으로 이어진다. 더 나아가 대학수준에서 퓨리어 급수(Fourier Series)라 불리는 사인 함수와 코사인 함수의 일차 결합의 무한 급수의 학습으로 연결되기도 한다. 우리가 다루는 거의 모든 함수가 퓨리어 급수로 표현되므로 여기에서 삼각함수 학습의 중요성이 다시 한번 강조되고 있다.

따라서 삼각함수 학습은 현재의 학습 목표뿐만이 아니라 미래의 학습을 염두에 두고, 그 연계성을 고려하면서 학습하는 것이 좀 더 유익할 것이다(김부윤 · 위성미, 1997).

2.2. 삼각함수 학습에서 테크놀로지의 역할

테크놀로지가 수학교육의 목적 추구에 있어 방법론적으로 기여할 수 있는 측면으로 황혜정 외(2001)는 크게 다음과 같은 네 가지를 주장하고 있다. 즉 '수학과 학생들의 실제 경험의 연결', '수학적 대상과 수학적 관계의 구체화', '수학의 다양한 표현 체계의 연결', '사고력 중심의 수학교육 추구'를 강조하고 있다. 테크놀로지를 활용한 삼각함수 학습에서도 이 네 가지의 측면 모두 기능하는데, 이를 세부적으로 살펴보면 아래와 같다.

먼저 '수학과 학생들의 실제 경험의 연결'이란 부면 이다. 현재 10-나 수학교과서에 나오는 삼각함수들의 응용문제들을 보면, 각은 특수각이고 거리는 자연수 값의 길이를 갖는 문제로 구성되어 계산의 용이성을 도모하고 있다. 그러나 테크놀로지에 기반을 둔 학습 상황에서는 학생들의 일상적이고 물리적인 경험에 바탕을 둔 (일반각과 실수 값의 거리로 이루어진) 실제 자료와 시뮬레이션을 함께

제시함으로써, 다양한 모델과 시뮬레이션을 통해 학생들의 광범위한 경험과 이미 공부한 삼각함수의 성질을 연결할 수 있게 한다. 이는 학생의 개인적 경험과 수학적 경험을 연결하는 새로운 수준의 친밀감을 형성함으로써 학생들의 일상적인 경험과 형식적인 수학의 세계를 의미 있게 연결하는데 도움을 준다. 실제성과 구체성을 갖는 상황아래서 테크놀로지의 제공은 학생들에게 계산의 지루함이나 어려움으로부터 자유롭게 해주므로 방법의 선택, 방법의 조합, 논증 및 분석에 집중할 수 있게 된다(황혜정외 2001 참조).

다음으로는 '수학적 대상과 수학적 관계의 구체화'이다. 발라세프(Balacheff, 1996)는 "효과적인 컴퓨터에 기반을 둔 학습 환경의 독창성(unique feature)은 다른 학습 매체와 비교했을 때 본질적으로 그것의 인지적 특성에 있다. 셈과 초보적인 산술을 위한 블록과 같은 구체물(concrete material)이나 기계적인 그리기장치(drawing system)나 시청각 테크놀로지는 컴퓨터에 기반을 둔 학습환경의 주 특징을 나타내지는 못한다. 이것(컴퓨터에 기반을 둔 학습환경)은 수학적 대상과 수학적 관계의 형식적 표현을 다룬다[1]. 컴퓨터에 기반을 둔 학습환경에서 학습자와 컴퓨터의 상호작용은 학습자의 컴퓨터 조작(입력)의 기호적 해석과 계산에 바탕을 두고 있으며, 이런 환경에서의 피드백은 하나의 수학현상으로 해석 가능한 적절한 기록으로 제공된다"고 하였다. 그러면서 그는 컴퓨터에 기반을 둔 학습환경(computer based learning environment)이 컴퓨터의 도움을 받는 교수환경(CAI)과는 다름을 강조하였다(pp 469-470).

지필 환경의 삼각함수 학습에서는 임의의 고정된 삼각형 내에서 삼각형의 성질을 학습한다. 그러나 테크놀로지에 기반을 둔 학습환경에서는 삼각형 자체가 변화의 대상이 될 수 있다. 즉 하나의 삼각형이 입력되면 삼각형의 성질이 출력으로 나올 수 있는 것이다. 이러한 과정을 통하여 학생들의 삼각형의 성질을 인지하는 방법이 자연스럽게 본질적으로 변한다. 예를 들면 평면상의 임의의 삼각형을 잡고, 그 꼭지점을 각각 A, B, C라 하자. 또 이 꼭지점의 마주보는 변을 각각 a, b, c라 하자. 이 삼각형이 사인법칙을 만족하는지를 알아본다고 하자. 그러면 테크놀로지는 주어진 삼각형의 변과 각의 크기를 측정하여 사인법칙이 성립하는지의 여부를 보여줄 수 있다. 즉 임의의 삼각형을 입력(실질적인 조작에서는 삼각형의 꼭지점을 움직임)하면 주어진 삼각형의 사인법칙이 성립하는지의 여부를 보여줄 수 있다. 이러한 측정과 계산은 테크놀로지 환경에서는 간단히 해결할 수 있으므로 우리는 새로운 형태의 학습 대상을 구성할 수 있다.

다음으로 '다양한 표현 체계의 연결'이다. 복잡한 수학적 아이디어를 표현하기 위해서는 다양한 표현 체계가 필요하다. 테크놀로지에 기반을 둔 학습환경에서는 역동적이고 상호작용 적인 표현체계를 제공할 수 있다. 다양한 표현체계의 연결은 수학학습에서 두 가지 의미를 갖는데, 하나는 복잡한 수학적 아이디어의 다양한 측면을 드러내는 것과, 다른 하나는 어떤 표현 체계에서의 행위의 결과를 다른 표현체계를 통하여 보여줌으로써 그 행위의 의미를 반성하도록 하는 것이다. 예를 들면 테크놀로지에 기반을 둔 학습환경에서의 함수의 학습은, 함수의 다양한 표현을 같은 화면에 제공함으로써,

1) 밑줄은 인용자가 부여한 것임

학생들로 하여금 다양한 표현을 서로 연결짓게 하고, 그 표현에 내재되어 있는 의미를 보다 충실하게 이해할 수 있도록 한다(황혜정외, 2001).

테크놀로지에 기반을 둔 학습환경에서의 삼각함수의 경우를 고려하면 아래와 같다. y=sinx의 그래프와 같은 기본적인 그래프를 학습한 후에, 예컨대, y=sinx의 그래프를 학습한 후에 y=asin(bx+c)+d의 그래프의 특징을 조사하고자 한다고 하자. 지필 환경에서는 여러 가지 함수의 그래프를 그려 그 특징을 조사하기에는 시간이 너무 많이 걸리고, 다양한 함수의 그래프를 그리기에 한계가 있다. 이런 경우에 Mathematica나 Maple, 그래핑계산기와 같은 테크놀로지를 활용하여 a,b,c,d 값을 다양하게 변화시키면서 y=asin(bx+c)+d의 그래프의 공통된 성질과 특징을 발견하도록 하는 것은 수학학습 방법의 개선에 큰 도움을 준다고 할 수 있다. 여기에서 우리는 식의 체계의 변화가 그래프의 체계에 주는 변화를 관찰함으로써 a,b,c,d의 변화에 따른 삼각함수의 주기, 진폭, 최대값, 최소값, 최대·최소값을 갖는 위치 등의 변화 즉 삼각함수의 공통된 특징을 조사할 수 있다[2].

마지막으로 '사고력 중심의 수학교육 추구'이다. 황혜정외(2001)는 "테크놀로지는 사고력 향상을 목적으로 하는 학습 활동에서 산술적인 계산과 대수적인 문자식의 처리를 신속하게 수행해 줌으로써 본질적인 사고력 중심의 학습활동에 전념할 수 있게 해준다. 특히 컴퓨터 프로그래밍 활동은 학생이 가지고 있는 수학 지식을 절차적 지식 형태로 변환하는 과정으로서, 학생 자신의 수학적 사고를 구체적으로 적용하여 어떤 결과를 산출하는 의미 있는 활동이다"라 하였다(p256).

또 신동선·류희찬(1998, pp.6~7)은 프로그래밍을 통한 학습의 목적에 관하여 "오류 수정 활동을 통해 수학적 사고력을 향상시키고자 하는 것"이라고 하면서 오류 수정에 관하여는 "오류는 예상하지 못한 곳에서 일어나고 그 오류를 제거하기 위해서는 반드시 프로그램에 수정을 해야 하므로, 학생 자신의 수학적 사고와 그것을 절차적 형태의 프로그램으로 변환하는 과정을 다시 한 번 반성하는 기회를 제공한다. 이러한 활동은 자신의 사고와 행동을 다시 한 번 반성해 봄으로써 더 높은 사고 수준으로의 발달을 모색하는 반영적 추상화 활동에 기여하고 수학적 사고력을 향상시킨다고 할 수 있다"고 하였다(황혜정외 2001).

삼각함수의 학습에서 Mathematica나 Maple을 이용하여 학습환경을 제공할 때 우리는 내장함수를 이용한 프로그램을 활용한다. 처음부터 프로그래밍을 하라는 요구는 새로운 기능을 익히는데 소요되는 노력과 시간을 고려해 볼 때, 학습목적이 전도될 위험성이 있다. 그러나 기본 프로그램을 제공하고 그 프로그램을 통하여 어느 정도 필요한 학습이 된 후에, 프로그램의 수정을 통하여 수정된 환경에서 이 프로그램을 구동하도록 한다면 프로그래밍을 통한 학습에서 기대되는 효과를 거둘 수 있고, 새로운 도구를 배우는데 따른 부담도 경감할 수 있다. 또한 테크놀로지에 기반을 둔 삼각함수 학습환경에서도 산술적인 계산과 대수적인 문자식의 처리에 대한 부담이 없으므로 문제해결에 집중할 수 있도록 해준다.

---

2) 두 표현체계의 연결성과 인지적 영향에 대하여는 황혜정외(2001, pp. 254~5)나 Kaput(1992, p524)를 참조하기 바란다.

2.3 메스메티카를 활용한 삼각함수 학습환경의 예시

앞에서 언급한 네 가지 방법론적 측면 중에서 '수학과 학생들의 실제 경험의 연결'과 '사고력 중심의 수학교육 추구' 측면은 테크놀로지에 기반을 둔 학습환경에서는 가장 쉽게 접근할 수 있는 측면이라 할 수 있다. 따라서 우리는 이 절에서 '수학적 대상과 수학적 관계의 구체화'와 '수학의 다양한 표현 체계의 연결'이라는 두 가지 측면을 중점적으로 염두에 두고, 테크놀로지의 도움을 받는 교수환경이 아닌 테크놀로지에 기반을 둔 학습환경을 예시하고자 한다.

(1) 삼각함수의 그래프

강옥기(2001)은 "테크놀로지가 기본적인 이해와 직관의 대체품으로 사용되어서는 안 된다"고 하였다. 본고에서도 삼각함수의 정의와 기본적인 성질을 이해하기 위해 테크놀로지를 활용하지는 않는다. 그러나 이것이 삼각함수의 정의와 기본적인 성질을 이해하기 위한 우리의 노력을 줄인다는 의미는 아니다. 다만 이를 위해 전통적인 지필 환경에서의 학습을 권한다. 학생들이 삼각함수의 뜻을 이해하고, 특수각에서 삼각함수 값을 계산할 수 있고, 기본적인 성질을 이해하였을 때 비로소 테크놀로지를 도입할 수 있는 환경이 조성되었다고 할 수 있다. 따라서 삼각함수의 그래프는 삼각함수 학습에서 테크놀로지 학습의 시작점이라고 할 수 있다.

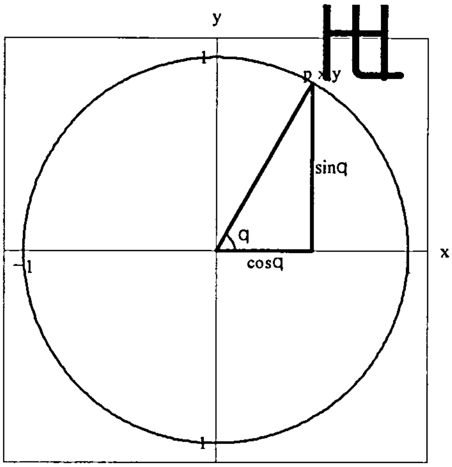
1) $y = \sin\theta$의 그래프[3)]

현재 대부분의 고등학교 10-나 교과서의 삼각함수의 그래프 지도 방법은 단위원 상의 점 P(x,y)가 x축의 양의 방향과 이루는 각을 θ라 했을 때, x = sinθ, y = cosθ 임으로 점 P의 움직임에 따라서 생기는 x값의 변화가 sinθ 의 그래프임을 강조하면서 단지 몇 개의 점만을 확인하여 그래프가 참임을 보여주는 것으로 끝난다. 그러나 이러한 교수법에서는 학생들에게 그래프의 정확성을 확신시키기 위한 현실적인, 즉 시간적인 그리고 공간적인 제약이 따른다. 이는 테크놀로지를 활용하면 간단히 해결할 수 있다. 이를 좀더 상세히 보면 아래와 같다.

방법1. 삼각함수의 정의를 사용하여 아래 그림과 같이 단위원 상의 점 P(x,y)을 잡고 이 점과 원점을 잇는 선분이 x축의 양의 방향과 이루는 각을 θ라 하자. 그러면 x=cosθ, y = sinθ 이다. 즉 sinθ의 그래프는 x성분이 θ, y성분이 P점의 y좌표값인 점의 자취이다.

---

3) y = cosθ의 그래프와 y = tanθ의 그래프의 학습환경을 위한 프로그램을 보기를 원한다면 최종술외(2003)을 참조하기 바란다.



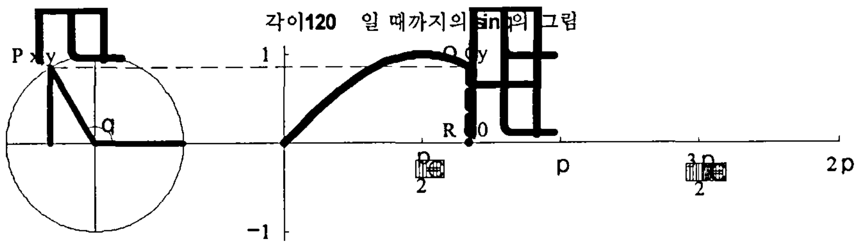
이를 시각화하기 위하여 단위원의 x축과 sinθ의 x축을 일치시키고, P(x,y)는 위와 똑같이 잡고 R(θ,0)와 Q(θ,y)를 잡으면 sinθ의 그래프는 점 Q(θ,y)의 자취이다. 이 점 Q의 자취를 구하기 위하여 테크놀로지를 활용하면 원하는 만큼의 많은 점을 잡아서 그 점들을 연결하면 우리가 원하는 그래프를 얻는다. 다음 프로그램을 활용하여 보자.

```
SinPlot[θ_]:=
  Module[{lns},
    lns={{Thickness[0.001], Line[{{-π+1,1}, {-π+1,-1}}]},
      {Thickness[0.008], Line[{{-π+1,0}, {-π+2,0}}]},
       {Thickness[0.008], Line[{{-π+1,0}, {-π+1+Cos[θ], Sin[θ]}}]},
       {Thickness[0.008],      Hue[0.4],      Line[{{-π+1+Cos[θ],0},      {-π+1+Cos[θ],Sin[θ]}}]},
{Dashing[{0.02,0.01}], {Thickness[0.001], Line[{{-π+1+Cos[θ], Sin[θ]},
      {θ,Sin[θ]}}]}, {Thickness[0.01], Hue[0.04], Line[{{θ,Sin[θ]},{θ,0}}]}}};
    cls={Thickness[0.001], Circle[{-π+1,0},1], Circle[{-π+1,0},0.2,{0,Mod[θ,2π]}]};
    Plot[Sin[t], {t,0,θ}, PlotStyle -> {RGBColor[1,0,0],Thickness[0.01]},
       PlotLabel -> FontForm["각이"<>ToString[(180/π)*θ]<> "。 일 때까지의
          sinθ의 그림", {"Helvatica-Bold",12}], Background  -> GrayLevel[1],
       Epilog -> {{cls,lns}, Text["θ", {Cos[θ/2]/4-π+1, Sin[θ/2]/4}, {0,0}],
           Text["P(x,y)", {Cos[θ]-π+1, Sin[θ]}, {-Cos[θ],-Sin[θ]}],
           Text["R(θ,0)", {θ,0}, {0,1}], Text["Q(θ,y)", {θ,Sin[θ]}, {0,-1}]},
       AspectRatio -> Automatic, Axes -> Automatic,
```

```
PlotRange -> {{-π,2π}, {-1.1,1.1}}, Ticks -> {{0,π/2,π,3π/2,2π}, {-1,0,1}},
DefaultFont -> {"Times", 12}, ImageSize -> 600
]
];
```

여기서 θ에 값을 대입하면 θ값에서의 sine값뿐만이 아니라, θ값까지의 sine그래프의 자취를 보여준다.4)

SinPlot[2π/3];



여기에서 θ값을 변화시키면서 이 함수를 반복적으로 사용하면 sine 함수의 변화를 직접 체득할 수 있다.

이 그래프가 움직이는 것을 애니메이션으로 보고자 한다면 아래와 같이 할 수 있다. 여기서는 그래프의 유형에 대한 확신을 돕기 위하여 5°씩 변할 때마다의 변화된 점을 표시함으로써 총 73개의 점을 사용하여 그래프를 그렸다.

Do[SinPlot[θ], {θ, (π/180)*5, 2\π, (π/180)*5}];

방법2. 위의 방법에 더하여 점을 찍어서 그래프를 그리는 전통적인 방법에 테크놀로지를 활용하여 삼각함수의 그래프를 그릴 수 있다. θ=0에서 출발하여 a도의 간격으로 떨어져있는 그래프 위의 점들의 집합을 S[a]라 하자. 그러면

S[a_] := Table[{θ, Sin[θ]}, {θ, 0, 2π, (π/180.)*a}]

로 나타낼 수도 있고

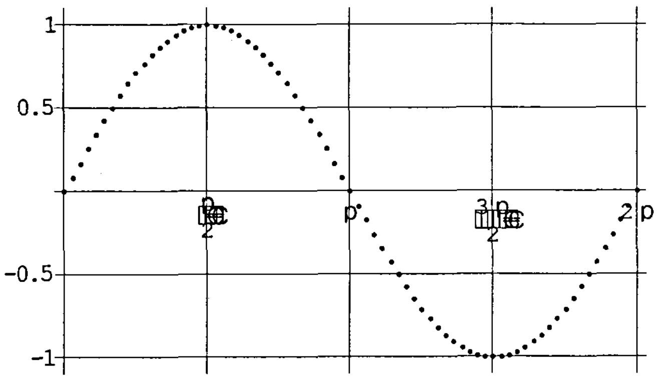
S[45] = {{0, 0}, {0.7853981633974483`, 0.7071067811865475`}, {1.5707963267948966`, 1.`}, {2.356194490192345`, 0.7071067811865476`}, {3.141592653589793`, 1.2246063538223773`*10^-16}, {3.9269908169872414`, -0.7071067811865475`}, {4.712388980384690`, -1.}, {5.497787143782138`, -0.7071067811865477`}, {6.283185307179586`, -2.4492127076447545`*^-16}}

이다.

4) 앞의 프로그램은 메스메티카 프로그램이며, 그 자체를 반드시 제시할 필요는 없다고 본다. 이 프로그램이 부담이 되어 학생들의 학습에 방해가 될 경우에는 이를 숨겨두고 사용할 수 도 있다.

S[5]의 점들을 삼각함수를 그리던 직교좌표에 표시를 하면 다음과 같다.

```
ListPlot[S[5],PlotStyle \[Rule] {RGBColor[1,0,0], Thickness[0.05]},
    Ticks \[Rule] {{0,\[Pi]/2,\[Pi],3\[Pi]/2,2\[Pi]}, {-1,-0.5,0,0.5,1}},
    GridLines \[Rule] {{0,\[Pi]/2,\[Pi],3\[Pi]/2,2\[Pi]}, {-1,-0.5,0,0.5,1}},
  PlotRange \[Rule] {{-0.1,2\[Pi]+0.1}, {-1.1,1.1}}];
```



a를 큰 값에서 작은 값으로 변화시키면 원하는 만큼 정밀한 그래프로 형성되어 가는 과정을 관찰할 수 있다. 이 방법은 아주 간단하지만 테크놀로지의 유용성을 한 눈에 볼 수 있는 방법이다.

위의 두 가지 방법 모두에서 지필 환경과는 다른 두 가지 차이점이 있다. 첫째로 이러한 학습방법에서는 사인 함수의 정의를 제외한 어떠한 선행 학습에 대한 요구도 없다. 따라서 학습 부진아들이 겪는 어려움, 즉 선행 학습의 부족으로 인하여 현재의 학습을 원활하게 하지 못하는 문제를 해결할 수 있다. 둘째로 이러한 학습방법에서는 이후의 학습내용인 연속성의 문제가 자동적으로 해결된다. 이것은 장차 학습하게될 내용과의 연계성을 고려할 때 유익하다고 할 수 있다.

2) $y = a\sin(bx+c)+d$의 그래프

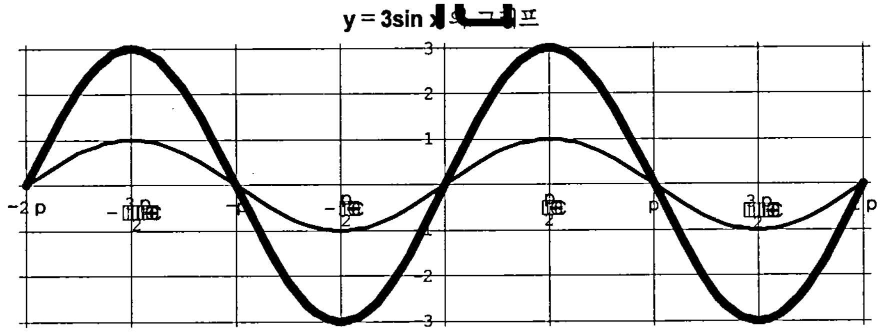
앞의 삼각함수의 기본 그래프를 이해하였다면, 이제 이런 그래프들의 변형 f[a_,b_,c_,d_,x_] = asin[b*x+c]+d의 그래프도 그릴 수 있다. 이런 함수의 그래프에서 a,b,c,d를 반복해서 변화시켜봄으로써 a,b,c,d 각각의 변화가 그래프에 미치는 영향을 쉽게 학습할 수 있다. 다음의 방법이 효과적일 것이다.

① y = a sin(x)의 그래프

a의 값의 변화에 따라 그래프가 어떻게 변하는가를 학습하기 위하여 a를 변수로 갖는 sin(x)와 asin(x)의 그래프를 f(a)로 정의하자[5]. 이 함수에서 sin(x)의 그래프와 asin(x)의 그래프를 비교함으로써 a의 영향을 알 수 있다. 이 f(a)에서 a의 값을 계속 바꾸면서 학생들이 직접 조작을 해 봄으로서 a의 영향을 확실히 인식하게 될 것이다.

```
f[a_] := Plot[{Sin[x], a*Sin[x]}, {x, -π, 2 π},
      PlotStyle -> {RGBColor[0, 1, 0], Thickness[0.01]},
      PlotLabel -> FontForm["y = " <> ToString[a] <>
            "sin(x)의 그래프 ", {"Helvetica-Bold", 12}],
      Ticks -> {{-π, -π/2, 0, π/2, π, 3 π/2, 2 π}, {-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3}},
      GridLines -> {{-π, -π/2, 0, π/2, π, 3 π/2, 2 π}, {-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3}},
      AspectRatio -> Automatic, ImageSize -> 600,
      PlotRange -> {{-π - 0.1, 2 π + 0.1}, {-3.1, 3.1}}];
```

f[3]



② y = sin(bx)의 그래프

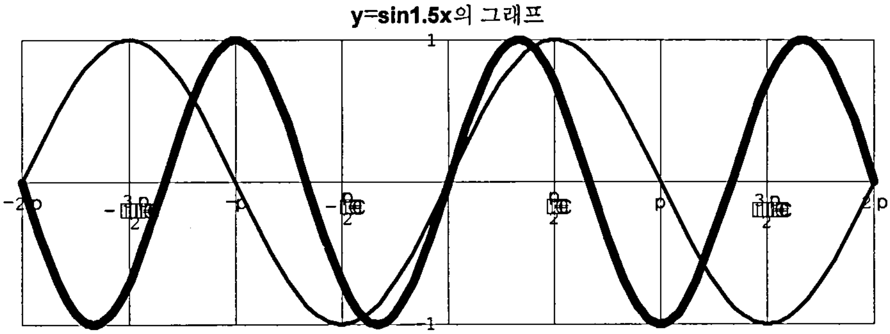
b의 값의 변화에 따라 그래프에 어떤 영향이 있는지를 확인하기 위하여 b를 변수로 갖는 sin(x)와 sin(bx)의 그래프를 g(b)로 정의한다[6]. b의 값을 변화시키면서 sin(bx)의 그래프의 변화를 관찰함으로써 b의 값의 변화가 함수에 미치는 영향을 확인할 수 있다.

---

5) f(a)는 전통적인 의미에서의 함수와는 약간 다르다. 이것은 하나의 그래프가 아니라 두 함수sin(x)와 asin(x)의 그래프를 하나의 좌표평면에 나타낸 결과를 f(a)로 정의한 것이다.

6) f(a)의 경우와 같이 g(b)도 sin(x)와 sin(bx)의 그래프를 하나의 좌표평면에 나타낸 결과를 g(b)로 정의한다.

```
g[b_] := Plot[{Sin[x], Sin[b*x]}, {x, -2 π, 2 π},
      PlotStyle -> {RGBColor[0, 0, 1], Thickness[0.01]},
      PlotLabel -> FontForm["y=sin" <> ToString[b] <>
            "x의 그래프", {"Helvetica-Bold", 12}],
      Ticks -> {{-2 π, -3 π/2, -π, -π/2, 0, π/2, π, 3 π/2, 2 π}, {-1, 1}},
      AspectRatio -> Automatic, ImageSize -> 600,
      GridLines -> {{-2 π, -3 π/2, -π, -π/2, 0, π/2, π, 3 π/2, 2 π}, {-1, 1}},
      PlotRange -> {{-2 π, 2 π}, {-1, 1}}];
g[2]
```

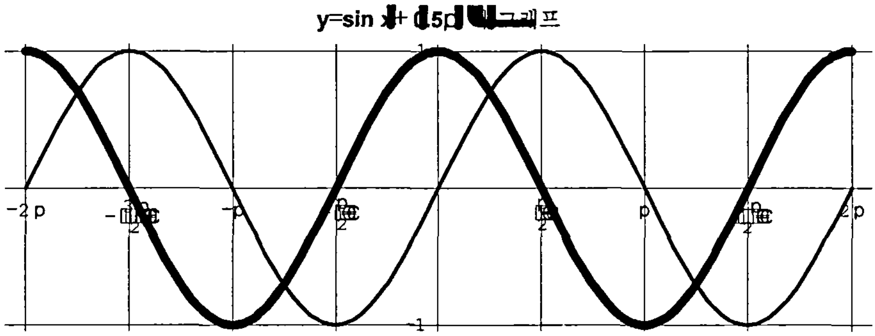


③ y = sin(x+c)의 그래프

여기서도 마찬가지로 c가 그래프에 미치는 영향을 확인하기 위하여 sin(x)와 sin(x+c)의 그래프를 h(c)로 놓고 c를 변수로서 계속 변화시키면서 그래프의 변화를 관찰하여 c의 영향을 학습하고자 한다[7].

```
h[c_] := Plot[{Sin[x], Sin[x + c]}, {x, -2 π, 2 π},
      PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0], Thickness[0.01]},
      PlotLabel -> FontForm["y=sin(x+(" <> ToString[c/π] <>
            "π))의 그래프", {"Helvetica-Bold", 12}],
      AspectRatio -> Automatic,
      Ticks -> {{-2 π, -3 π/2, -π, -π/2, 0, π/2, π, 3 π/2, 2 π}, {-1, 1}},
      ImageSize -> 600,
      GridLines -> {{-2 π, -3 π/2, -π, -π/2, 0, π/2, π, 3π/2, 2π}, {-1, 1}}];
h[0.5π];
```

7) 앞에서와 같이 h(c)도 sin(x)와 sin(x+c)의 그래프를 하나의 평면 위에 나타낸 결과이다.

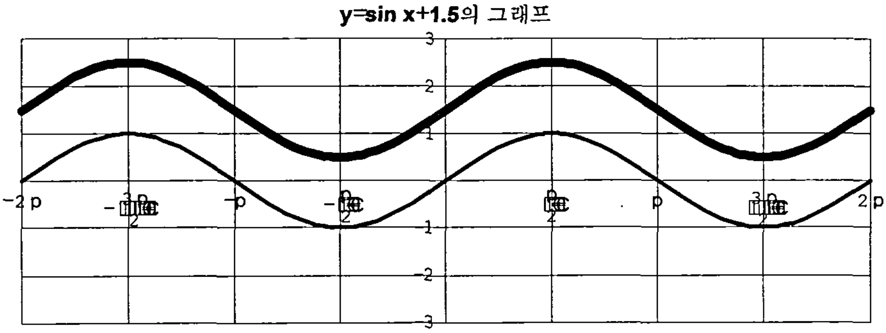


④ y = sin(x)+d의 그래프

d의 값의 변화에 따라 그래프가 어떻게 변화는 지를 알기 위해서 여기서도 sin(x)와 sin(x)+d의 그래프를 k(d)라 정의하고[8] d의 값을 바꾸면서 그래프의 변화를 관찰함으로서 d에 따른 그래프의 변화를 학습한다.

```
k[d_] := Plot[{Sin[x], Sin[x] + d}, {x, -2 π, 2 π},
      PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0], Thickness[0.01]},
      PlotLabel -> FontForm["y=sin x+" <> ToString[d] <>
            "의 그래프", {"Helvetica-Bold", 12}],
      AspectRatio -> Automatic,
      Ticks -> {{-2π, -3π/2, -π, -π/2, 0, π/2, π, 3π/2, 2π},
         {-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3}}, ImageSize -> 600,
      GridLines -> {{-2 π, -3 π/2, -π, -π/2, 0, π/2, π,
            3 π/2, 2 π}, {-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3}},
      PlotRange -> {{-π, 2 π}, {-3, 3}}];
```

8) k(d)도 sin(x)와 sin(x)+d의 그래프를 같은 좌표평면에 나타낸 결과이다.



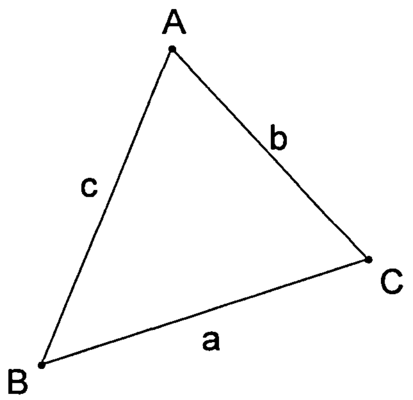
이와 같이 우리는 y= asin[b*x+c]+d에서 a, b, c, d를 변화시키면서 변화된 값을 가진 함수와 그 그래프를 동시에 관찰함으로써, 첫째 a, b, c, d의 변화가 그래프에 미치는 영향을 학습할 수 있었고, 둘째로 역으로 이러한 그래프의 변화를 통하여 a, b, c, d의 변화가 함수에 미치는 영향 즉 삼각함수의 주기, 진폭, 최대값, 최소값, 최대·최소값을 갖는 위치 등을 학습할 수 있다. 즉 함수와 그래프라는 두 표현체계의 연결을 통하여 삼각함수의 두 가지 측면 모두를 학습할 수 있다.

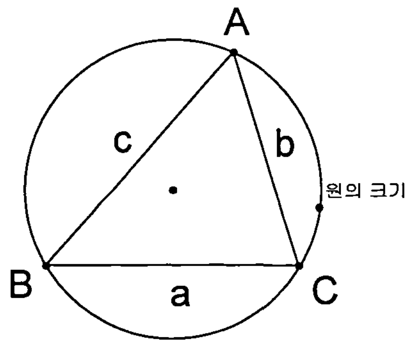
(2) 사인법칙

대부분의 고등학교 10-나 수학교과서에서는 사인법칙을 설명하고, 증명에서 각이 예각일 때, 직각일 때와 둔각일 때로 나누어서 생각하면서 원에서 같은 호에 대한 원주각의 크기는 같다는 것을 선행 지식으로 요구하고 있다. 이러한 증명은 논리적으로 명확하고, 논리성을 기르는 좋은 방법이기는 하나, 논리성이 부족한 학생과 선행학습이 충분히 잘 되어있지 않은 학생들에게는 어려움을 느끼게 한다. 이런 상황에서 테크놀로지를 활용하면 위에서와 같은 어려움을 겪고있는 학생들도 사인 법칙의 내용을 이해할 수 있는 기회를 충분히 제공할 수 있다고 본다. 테크놀로지를 활용한 사인법칙으로의 다음과 같은 접근 방법을 생각할 수 있다.

평면상의 임의의 서로 다른 세 점 A, B, C를 잡고 이 점들을 연결한 삼각형을 생각해보자. 이 때 꼭지점 A, B, C와 마주보는 변을 각각 a, b, c라 하자. 이 삼각형에서 $\frac{a}{\sin A}$, $\frac{b}{\sin B}$, $\frac{c}{\sin C}$ 의 값을 계산해 본다. A, B, C를 움직이면서 값의 변화를 관찰한다. 또 세 점 A, B, C를 고정된 원 위에서 잡았을 때, 이 세 점의 변화에 따른 $\frac{a}{\sin A}$, $\frac{b}{\sin B}$, $\frac{c}{\sin C}$ 의 값의 변화를 관찰한다[9].

9) 여기서 우리는 GSP(Geometer's Sketchpad) 프로그램을 사용한다.





$$\frac{a}{\sin(\angle BAC)} = 6.95\text{ cm} \qquad \frac{a}{\sin(\angle BAC)} = 4.96\text{ cm}$$

$$\frac{b}{\sin(\angle CBA)} = 6.95\text{ cm} \qquad \frac{b}{\sin(\angle CBA)} = 4.96\text{ cm}$$

$$\frac{c}{\sin(\angle ACB)} = 6.95\text{ cm} \qquad \frac{c}{\sin(\angle ACB)} = 4.96\text{ cm}$$

여기서 A, B, C의 위치를 변화시켜도 삼각형의 형태에 상관없이 사인 법칙이 성립함을 관찰할 수 있다. 이 과정에서 우리는 하나의 삼각형을 입력하여 사인법칙이라는 결과(혹은 관계)를 얻었다. 즉 삼각형이라는 수학적 대상과 사인법칙이라는 수학적 관계를 중간의 여러 가지 복잡한 계산을 생략하고 직접 연결함으로서 구체화시켰다. 이러한 직접연결은 중간의 복잡한 과정을 생략함으로서 인지과정을 대폭 축소시키고 간략하게 함으로써 인지적 특성에 본질적인 변화를 가져왔다. 그리하여 논리성이 부족한 학생과 선행학습이 충분히 잘 되어있지 않은 학생들의 이해에도 도움을 줄 수 있다.

Ⅲ. 결론 및 제언

지금까지 우리는 삼각함수의 학습에서 테크놀로지를 어떻게 활용할 수 있는지 그리고 테크놀로지의 활용이 어떻게 학습에 영향을 미치는지에 대하여 알아보았다. 테크놀로지를 활용한다고 하여 어려운 수학이 하루아침에 갑자기 쉬워지는 일이 일어나지는 않을 것이다. 그러나 본고에서 제시한 바와 같이 이러한 테크놀로지의 활용은 방법론적으로 네 가지 측면 즉 '수학과 학생들의 실제 경험의 연결', '수학적 대상과 수학적 관계의 구체화', '수학의 다양한 표현 체계의 연결', '사고력 중심의 수학교육 추구'에서 효과가 있었다. 또한 본고에서는 테크놀로지에 기반을 둔 학습환경은 다음과 같은

측면에서 효과가 있다는 것을 10-나 단계의 삼각함수의 예를 통하여 밝혔다. 첫째로 응용부분과 미래의 학습과의 연계성을 미리 보여줌으로 학생들에게 삼각함수를 공부하여야 하는 동기부여가 손쉬울 것으로 기대되었다. 둘째로 애니메이션과 같은 흥미로운 볼거리를 통하여 수학이 어렵고 딱딱하지만은 않고 재미있다는 것을 보여줌으로 학습의 의욕을 고취시킬 수 있었다. 셋째로 여러 개념의 시각화와 직접 조작의 경험과 인지 방법의 변화를 통하여 논리성이 부족한 학생과 선행학습이 충분히 잘 되어있지 않은 학생을 포함한 모든 학생의 개념형성을 좀더 쉽게 할 수 있을 것으로 기대되었다. 이와 같은 측면에서 이미 제7차 교육과정에서 테크놀로지의 활용이 권장되고 있지만 앞으로 더욱 더 많이 활용될 필요가 있다고 생각된다.

본 연구에서는 제7차 교육과정에서 강조하고 있는 테크놀로지의 활용이라는 측면을 부각시켜 10-나 단계의 삼각함수 단원을 중심으로 다루었다. 이 논문에서의 관점은

테크놀로지가 삼각함수 학습에 미치는 방법론적인 측면으로 '수학과 학생들의 실제 경험의 연결', '수학적 대상과 수학적 관계의 구체화', '수학의 다양한 표현 체계의 연결', '사고력 중심의 수학교육 추구'가 있다. 인지적인 면으로는 여러 개념의 시각화와 직접 조작의 경험과 인지 방법의 변화를 통하여 논리성이 부족한 학생과 선행학습이 충분히 잘 되어있지 않은 학생을 포함한 모든 학생의 개념형성을 좀더 쉽게 할 수 있을 것으로 기대된다는 것이다. 그러나 본 연구에서는 실제적인 수업장면에서의 활용까지는 다루지 못하였다. 이러한 부분은 금후의 과제로 남는다. 또 10-나 단계 이후의 삼각함수 학습과정에 있는 삼각함수의 덧셈정리를 비롯한 여러 가지 공식, 삼각방정식의 문제, 삼각함수의 극한과 미분 적분학과 대학수준의 퓨리어 급수(Fourier Series)등에서 본고의 관점과의 연계성을 고려한 학습지도 자료를 고안할 필요가 있다.

참 고 문 헌

강옥기 (2001), Practical Use of Technology for Mathematics Education, 한국수학교육학회지 시리즈 D, <수학교육연구>, **5(1)**, pp.25-44.

교육부, 수학과 교육과정(제7차 교육 과정), 교육부 고시 제 **1997-15호(별책 8)**

김부윤·위성미 (1997), 대학수학과 중등수학과의 연계성에 관한 一考察, 수학교육논총 **15**, pp.119-133.

신동선·류희찬 (1998), 수학교육과 컴퓨터, 서울: 경문사.

최종술·김향숙·김부윤(2003), 테크놀로지를 활용한 삼각함수 교수법, 대한수학교육학회 2003년 하계 수학교육학연구발표논문집 pp.563-588.

황혜정·나귀수·최승현·박경미·임재훈·서동엽 (2001), 수학교육학신론, 서울: 문음사.

Balacheff, N. & Kaput, J. J. (1996), Computer-Based Learning Environments in Mathematics, In Alan J. Bishop(Eds), *International Handbook of Mathematics Education*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, pp.469-504.

Freudental, H(1981). Major Problems of Mathematics Education, *Educational Studies in Mathematics* **12**, pp.33-150.

Kaput, J. J. (1992), Technology and Mathematics Education, In Douglas A. Grows(Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, New York, NY, Macmillan Publishing Company, pp.515-556.

NCTM (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.* / 구광조 외2명 공역 (1992), 수학교육과정과 평가의 새로운 방향, 서울: 경문사

NCTM (2000). *Principles and Standard for School Mathematics*, Reston, VA.