

초등학교 1, 2학년 수학 영재아를 위한 심화학습 프로그램 개발

김 해 규 (제주교육대학교)

고 길 철 (제주남초등학교)

영재교육은 영재들이 창의적인 지식 생산자로서의 역할을 수행할 수 있도록 하여 개인의 잠재력을 최대한 개발시켜주어 자아실현을 도모할 수 있도록 해주고 더 나아가 국가 경쟁력을 높일 수 있으므로 학교와 지역사회에서는 영재교육의 활성화를 위하여 다양한 영재교육 프로그램을 개발하고, 영재에게 적합한 교수-학습 자료를 마련하여 그들의 흥미와 빠른 학습 속도를 충족시켜줄 수 있도록 심화된 학습 기회를 제공하기 위해 노력해야 한다. 그러나, 이미 연구된 자료들을 살펴보면 초등학교 고학년을 위주로 하는 영재 교육 프로그램이 대부분이어서 저학년 영재아동을 위한 자료는 전무한 실정이다. 따라서 본 연구에서는 초등학교 저학년 단계에서 수학분야에 영재성이 있거나 흥미를 가지고 있는 아동을 위한 수학 심화학습 프로그램을 개발하고자 한다.

I. 서 론

1. 연구의 필요성 및 목적

영재교육은 영재들이 창의적인 지식 생산자로서의 역할을 수행할 수 있도록 하여 개인의 잠재력을 최대한 개발시켜주어 자아실현을 도모할 수 있도록 해주고 더 나아가 국가 경쟁력을 높일 수 있도록 해준다. 그러므로 학교와 지역사회에서는 영재교육의 활성화를 위하여 다양한 영재교육 프로그램을 개발하고, 영재에게 적합한 교수-학습 자료를 마련하여 그들의 흥미와 빠른 학습 속도를 충족시켜줄 수 있도록 심화된 학습 기회를 제공하기 위해 노력하고 있다. 우리나라에서도 국가차원에서 영재교육의 중요성을 인식하여 제도적으로는 영재교육진흥법이 마련되어, 2003년부터 각 시·도 교육청에서는 5, 6학년을 대상으로 한 영재학급을 설립·운영 중에 있을 뿐만 아니라, 영재교육에 대한 노력은 전국의 15개 대학 부설 영재교육원과 각종 영재 관련 세미나를 통해서 발표되는 연구물을 통해서도 실감할 수 있다. 수학분야에서도 수학 영재교육에 관한 기초 연구가 많은 수학교육학자들에 의해 연구되었다.¹⁾ 또한 초등수학 영재 학습 자료가 다수 연구·발표되었으나²⁾, 김주봉(1999)은 구체

1) 수학 영재 판별 도구 개발(김홍원·김명숙·송상현, 1996 ; 김홍원·김명숙·방승진·황동주, 1997 ; 수학 영재의 지도와 평가에 관한 사례 분석(김수환, 2001) ; 경기도 수원 교육청의 과학, 수학분야 특기·적성교육 실태 조사(한길준·정승진, 2001) 등을 들 수 있다.

적인 영재교육 자료의 부족을 지적하고 있으며³⁾, 한길준·정승진(2001)은 영재교육 자료의 부족을 해결하기 위해서 전국의 과학영재교육원에서 자체적으로 개발하여 사용하고 있는 영재교육 프로그램들을 서로 공유할 것을, 김수환(2000)도 영재교육의 대중화를 위해서는 영재교육에 활용된 프로그램들을 대중적으로 보급할 것을 강조하고 있다. 또한 이미 연구된 자료들을 살펴보면 초등학교 고학년을 위주로 하는 영재 교육 프로그램이 대부분이어서 저학년 영재아동을 위한 자료는 전무한 실정이다. 따라서 저학년 단계에서 수학분야에 흥미가 있고 재능이 있는 아동에게 수학적 재미와 지적 호기심을 유발시킬 수 있는 심화학습 프로그램 개발의 필요성이 절실히 대두되고 있다. 따라서 본 연구에서는 초등학교 저학년 영재아를 위한 심화학습 프로그램을 개발하고자 한다.

2. 연구의 내용

본 연구는 다음과 같은 내용에 초점을 맞추었다.

- 1) 심화학습 프로그램 개발을 위하여 1~2학년 수학과 교육과정에서의 심화과정을 살펴보고 각 단원을 연결·분석하여 프로그램 개발 방안을 모색한다.
- 2) 초등학교 저학년(1~2학년)의 수학과 교육과정 내용과 영역별에 맞는 심화학습용 프로그램을 개발한다.

II. 이론적 배경

1. 수학 영재의 정의

영재를 어떤 아동으로 규정할 것인가에 대해서는 학자마다 다양한데 렌줄리(Renzulli)는 영재성은 세 가지의 심리적인 특성들, 즉 평균이상의 능력, 높은 수준의 과제집착력, 높은 수준의 창의성이 역동적으로 상호 작용하여 나타나는 능력이라고 하였다.(조석희 등, 1996, 재인용)

한편, 가네(Gagne)는 수학영재를 수학이라는 영역에서 평균 이상으로 타고난 능력 즉, 수학적 능력이 뛰어난 아동으로 정의(이종욱, 2000)하였고, 김홍원 등(1997)은 계산기능이나 높은 수학 성취도 보다는 수학적 사고력과 추론능력 및 적용력이 우수한 아동이라고 정의하고 있다.

-
- 2) 영재를 위한 심화학습 프로그램 개발 연구-국어, 사회, 수학, 과학을 중심으로(김주훈·박경미·최고운·이은미, 1996), 인터넷 LOGO와 창의력 영재교육(조한혁·우혜영, 2001), 그래프 이론을 활용한 초등학교 영재 교육 프로그램 개발(류성림, 2001) 등을 들 수 있다.
 - 3) 송상헌(1999)은 우리나라 영재교육의 활성화를 위해서 시급히 해야 할 일에 대해서 대부분의 응답자들이 공통적으로 실제로 운영할 수 있는 학습자료의 개발을 1순위로 꼽았다. 이종욱(2000)에서 재인용 함.

2. 수학 영재의 특성

저학년 수학 영재를 위한 심화학습용 프로그램을 개발하는 데에 있어 영재아의 특성을 이해하는 것은 프로그램 개발에 많은 도움을 줄 것이다.

NCTM에서는 영재들이 가지고 있을만한 가능한 행동 특성을 일반적 행동 특성, 학습 행동 특성, 창의적 행동 특성, 수학적 행동특성으로 크게 4가지로 나누어서 설명하고 있는데 그 중 수학적 행동 특성을 요약해 보면 다음과 같다.(이종욱, 2000, 재인용)

· 수에 대한 조기의 호기심과 이해력이 높고 수와 공간적 관계에 대한 논리적이고 상징적인 사고 능력이 뛰어나다.

- 수학적 패턴, 구조, 관계, 그리고 연산에 대한 지각과 일반화하는 능력이 뛰어나다.
- 분석, 연역, 귀납적으로 추론하는 능력이 뛰어나 합리적으로 해를 찾는다.
- 수학적 기호, 관계, 증명, 풀이방법 등을 기억하는 능력이 뛰어나다.
- 학습한 것을 새로운 상황에 적용하는 능력이 뛰어나다.
- 수학적 문제를 풀이하는데 있어서의 활동력과 지속성이 뛰어나다.

또한 조석희 등(1996)은 논리 수학적 재능 분야의 영재아의 특성을 다음과 같이 제시하고 있다.

- 한번 풀기 시작한 문제는 끝까지 풀려고 노력한다.
- 수와 관련지어 생각하기를 좋아하며 과학 실험을 즐긴다.
- 수리적 개념을 쉽게 이해하며 숫자 세기를 즐긴다.
- 물건이 어떻게 작동하는지, 자연의 이치에 대한 질문이 많다.
- 자연현상에 대해 관심이 많고 과학과 관련된 TV 프로그램이나 책을 즐겨 찾는다.
- 블록이나 장난감을 가지고 놀 때도 원인, 결과를 놓고 실험하기를 즐긴다.
- 패턴이나 규칙을 찾아내려고 애쓴다.
- 물건들이 어떻게 작동하는가를 찾아내려고 한다.

지금까지 살펴본 영재 아동의 수학적 행동특성은 프로그램의 주제 선정과 개발에 중요한 시사점을 준다. 앞에서 살펴보았듯이 수학 영재들은 조기에 풍부한 어휘력을 지니며, 공간지각력과 통찰력이 뛰어나며, 호기심이 많고 자발적으로 계획을 시행하고, 창의력과 상상력, 관찰력이 예리하고 수학적 패턴, 구조, 관계, 그리고 연산에 대한 지각과 일반화하는 능력이 뛰어난 점에 비추어 볼 때, 본 연구에서 개발할 자료의 형태로는 패턴 찾기, 실생활에서 찾을 수 있는 수학, 퍼즐, 조작활동 및, 독서를 통해 이해할 수 있는 프로그램 등이 주요 연구 대상이다.

3. 수학 영재를 위한 교수학습 방법

1) 렌줄리의 3단계 심화학습 모형(조석희 등, 1996)

렌줄리(Renzulli)의 3부 심화 학습 모형은 영재아는 물론이고 일반아동에게 까지 확대해서 적용할 수 있는 특징을 가지고 있어 영재를 위한 심화 학습 모형 중에 가장 대표적인 이론으로⁴⁾ 3단계의 학습과정을 통해 학생에게 다양한 수준과 형태의 프로그램을 제공하고 학습이 이루어지도록 돕는다.

(1) 1부 심화과정

이 단계에서는 특정 주제에 대해 학생 스스로 주제 탐색 활동을 하는데 목적이 있다. 따라서 다양한 방법이 활용되고 교육 내용과 관련이 있는 주제를 탐색하고 선택할 수 있도록 하며, 교사들은 자신이 확보하고 있는 다양하고 전문적인 영역에 종사하고 있는 개인, 기업, 학교, 박물관, 단체 등의 목록을 정리하여 필요로 하는 학생의 주제 탐색에 도움을 줄 수 있다.

(2) 제 2부 심화과정

제2부 심화단계는 사고하고 느끼는 기능을 습득하고 숙달하는 것이다. 주제와 관련된 사고기증, 연구기능을 훈련하기 위해 소규모 집단으로 나누어 실시할 수도 있다.

2부 심화 활동은 개방적인 방식으로 학생들의 사고력이 최고조에 다하도록 향상시키는 과정으로, 학생들로 하여금 도전적인 연구를 하도록 권유할 수도 있다.

(3) 제 3부 심화과정

학생들은 개인적으로 또는 소규모 집단에서 자신이 스스로 선택한 실질적인 문제를 중심으로 전문가가 문제를 해결해 나가는 과정을 그대로 경험해 보는 방식으로 3부 활동에 참여하는 학생들은 자기 스스로 개별 연구과제를 계획한다. 여기서 연구과제는 2-3일의 단기적인 것도 있고 2-3개월의 장기적인 것이 될 수도 있다. 하지만 여기서 중요한 것은 지식을 소비하는 것이 아니라 생산해내는 방식이 되어야한다는 것이다.

4. 제 7차 초등학교 1~2학년 교육과정 내용(교육부, 1997)

다음의 표는 제7차 초등학교 1-2학년 수학과 교육과정 내용을 단원과 영역별로 분석한 내용이다.

4) 미국의 초, 중, 교교의 70~80%가 이 모형을 이용하여 영재들을 교육하고 있다. 이 모형은 이전의 영재 프로그램이 주 대상으로 삼았던 상위 3~5%보다는 좀 더 많은 15~20% 학생을 대상으로 다양한 형태와 수준의 심화학습 프로그램을 제공한다.(강숙희 등, 1999)

1) 수와 연산 영역

내용 단계		내 용	심화과정	단 원
1 단 계	1-가	<ul style="list-style-type: none"> • 50까지의 수 • 간단한 수의 덧셈과 뺄셈 • 덧셈과 뺄셈의 활용 	<ul style="list-style-type: none"> • 수세기가 필요한 실재장면에서 여러가지 방법으로 수 세기 • +, -, = 기호 	<ul style="list-style-type: none"> • 5까지의 수 · 9까지의 수 • 가르기와 모으기 • 더하기와 빼기 · 50까지의 수
	1-나	<ul style="list-style-type: none"> • 100까지 수 • 두 자리 수의 덧셈과 뺄셈 • 곱셈의 도입 • 덧셈과 뺄셈의 활용 	<ul style="list-style-type: none"> • 덧셈과 뺄셈 계산에서 여러가지 방법 생각하고, 그 방법 설명하기 • >, < 기호 	<ul style="list-style-type: none"> • 100까지의 수 • 10가르기와 모으기 • 10이 되는 더하기와 10에서빼기 • 더하기와 빼기(1) • 더하기와 빼기(2)
2 단 계	2-가	<ul style="list-style-type: none"> • 1000까지 수 • 두 자리 수의 덧셈과 뺄셈 • 곱셈의 도입 • 덧셈과 뺄셈의 활용 	<ul style="list-style-type: none"> • 두 자리 수의 덧셈과 뺄셈 그리고 곱셈이 관련된 문제 만들고 해결하기 	<ul style="list-style-type: none"> • 세자리의 수 • 두자리 수의 덧셈과 뺄셈(1) • 두자리 수의 덧셈과 뺄셈(2) • 곱하기
	2-나	<ul style="list-style-type: none"> • 곱셈구구 • 세 자리 수 범위에서 덧셈과 뺄셈 • 덧셈, 뺄셈, 곱셈의 활용 	<ul style="list-style-type: none"> • 덧셈과 뺄셈에서 여러 가지 방법을 생각해 내고, 그 방법 설명하기 	<ul style="list-style-type: none"> • 곱셈구구 • 세자리 수의 덧셈과 뺄셈(1) • 세자리 수의 덧셈과 뺄셈(2)

2) 도형 영역

내용 단계		내 용	심화과정	단 원
1 단 계	1-가	<ul style="list-style-type: none"> • 입체도형의 모양 	<ul style="list-style-type: none"> • 여러가지 물건 모양에 따라 분류하고, 공통적인 특징 설명하기 	<ul style="list-style-type: none"> • 여러가지 모양
	1-나	<ul style="list-style-type: none"> • 평면도형의 모양 • 집판에서 공간감각 기르기 	<ul style="list-style-type: none"> • 기본적인 평면도형 모양에 따라 분류하고, 공통적인 특징 설명하기 	<ul style="list-style-type: none"> • 여러가지 모양
2 단 계	2-가	<ul style="list-style-type: none"> • 기본적인 평면도형 • 구체물의 이동에서 공간감각 기르기 	<ul style="list-style-type: none"> • 옮기기, 뒤집기, 돌리기 등의 활동을 통해 제시된 구체물이나 그림이 어떤 과정을 거쳤는지 설명하기 	<ul style="list-style-type: none"> • 도형과 도형 움직이기
	2-나	<ul style="list-style-type: none"> • 입체도형의 구성 	<ul style="list-style-type: none"> • 쌓기나무로 만들어진 간단한 입체 도형에서 쌓기나무 개수 세기 	<ul style="list-style-type: none"> • 쌓기나무 놀이

3) 측정 영역

내용 단계		내 용	심화과정	단 원
1 단 계	1-가	• 여러가지 양의 비교	• 생활에서 양의 크기 비교에 사용되는 말 찾기 • 여러가지 물건을 양의 크기에 따라 순서대로 늘어놓기	• 비교하기
	1-나	• 시각 읽기	• 시각을 이용하여 하루생활계획 말하기	• 시계보기
2 단 계	2-가	• 길이(cm) • 시각과 시간 • 여러 가지 시간 단위	• 신체 여러 부위의 길이를 알아보고 활용하기	• 길이재기 • 시간 알아보기
	2-나	• 길이(m) • 측정값 나타내기	• 발걸음, 양팔을 이용한 신체활동을 통하여 길이를 재고, 비교하기	• 길이재기

4) 확률과 통계 영역

내용 단계		내 용	심화과정	단 원
1 단 계	1-가	• 한가지 기준으로 사물을 분류하기	• 사물이나 사람을 미리 정한 두 세가지 기준에 따라 분류하여 개수세기	• 분류하여 세어보기
	1-나	•	•	
2 단 계	2-가	•	•	
	2-나	• 표와 그래프 만들기	• 생활에서 활용되는 표, 그래프 수집하기	• 표와 그래프

5) 문자와 식 영역

내용 단계		내 용	심화과정	단 원
1 단 계	1-가	•	•	•
	1-나	• □를 사용한 식 • 문제를 실제로 해보기, 그림그리기, 식만들기등으로 해결하기	• 간단한 덧셈식이나 뺄셈식에 적합한 문제 만들기	• 문제 푸는 방법 찾기
2 단 계	2-가	• □의 값 구하기 • 식에 알맞은 문제 만들기	• 식을 보고 그 식에 알맞은 일상 생활과 관련된 문제를 두세 개 만들기	• 식 만들기과 문제 만들기
	2-나	• 식만들기,미지항구하기 • 문제를 표만들기, 거꾸로 풀기 등 여러 가지 방법으로 해결하기	• 식에 알맞은 문제 만들기	• 문제 푸는 방법 찾기

6) 규칙성과 함수 영역

내용 단계		내 용	심화과정	단 원
1 단 계	1-가	• 규칙적인 배열에서 규칙찾기	• 여러가지 무늬에서 규칙 찾아 설명 하기	• 여러 가지 모양
	1-나	• 자신이 정한 규칙에 따라 배열하기 • 1~100의 수 배열표에서 규칙찾기	• 규칙적인 배열에서 규칙을 찾고, 그 배열을 여러 가지 방법으로 나타내 기	• 여러가지 모양 • 100까지의 수
2 단 계	2-가	• 다양한 변화의 규칙 찾기 • 1~100의 수 배열표에서 뛰어 세는 규칙 찾기	• 부분적으로 주어진 수 배열표에서 숨겨진 수 찾기	• 도형과 도형 움직이기 • 세 자리 수
	2-나	• 곱셈표에서 여러 가지 규칙 찾기	• 규칙을 이용하여 12×12의 곱셈표 만들기	• 곱셈구구

III. 초등학교 1~2학년용 영재아를 위한 심화학습 프로그램 개발 방향 및 실제

1. 프로그램 개발의 방향

1) 영재를 위한 심화학습 자료의 형태

남승인(1998)은 수학영재의 특성으로 관심있는 주제에 대해서는 오랫동안 집중하는 경향이 있고, 학습한 주제에 대해서는 새로운 문제해결에 빨리 적용하는 경향이 있으며 문제해결을 예상치 못한 방식으로 해결하는 경향을 보인다고 했으며, 조석희 등(1996)은 수학적 재능분야에서 한번 풀기 시작한 문제는 끝까지 풀려고 노력하며, 수와 관련지어 생각하기를 좋아하며, 패턴이나 규칙을 찾아내려고 애쓰며, 여러 가지 자연현상에 대해서 관심을 많이 갖는다고 한다.

따라서 수학 영재를 위한 학습자료의 개발 방향은 영재의 지적, 정의적 특성을 고려하면서 수학적 능력의 신장을 그 목표로 해야할 것으로 사료된다.

이러한 맥락에서, 본 연구에서의 자료 개발의 형태를 주제 중심의 학습자료, 활동중심의 학습자료 및 개방적인 교육내용이 포함되도록 설정하였다.

구체적인 개발의 방향으로는 첫째, 초등학교 저학년(1-2학년) 교육과정의 6개 영역의 내용과 심화학습과 관련이 있고 문제해결 수준이 저학년의 일반 아동 이상이 해결할 수 있는 자료를 주제별로 개발하였다. 둘째, 수학적인 사고력을 향상시킬 수 있고 창의력을 신장시킬 수 있다고 판단되는 자료를 영역별 단위 주제별로 구성하여 개발하였다. 예를 들면, 프랙탈 탐구, 피보나치 수열, 패턴블럭, 펜토미노, 기하판, 도형 그리기, 수와 연산 퍼즐, 성냥개비 퍼즐 등의 자료를 저학년 교육과정에 맞도록 재구성하였다. 셋째, 초등학교 저학년의 학습 특성상 활동과 탐구 위주의 내용으로 프로그램을 구

성하고 단위 프로그램의 활동 양도 초등학교 저학년의 학년 특징을 고려하여 한 주제 당 활동시간이 2차시-4차시 내외의 범위에서 운영할 수 있는 프로그램으로 구성하였다. 넷째, 각 프로그램은 렌줄리의 3부 심화과정 형태로 구성하였다.

2) 프로그램의 구성 형태

- 프로그램 제목

1-01	수와연산	주제	원시인과 숫자	· 1-가-5까지의 수 · 1-가-9까지의 수
------	------	----	---------	------------------------------

- 프로그램의 목적
- 학습목표
- 1부 심화 : ♀ 씨뿌리기 활동
- 2부 심화 : ※ 싹틔우기 활동
- 3부 심화 : 🌻 꽃피우기 활동
- 참고자료

2. 심화학습용 프로그램 개발의 실제

본 연구에서 개발한 자료는 초등학교 1-2학년 영재아를 위한 심화학습 프로그램으로 수학 영역, 자료명, 프로그램 내용 및 관련 교육과정 단원과 학년을 제시하였다.

1) 수와 연산 영역에 개발된 프로그램 자료

번호	영역	자료명	프로그램 내용	관련 교육과정 단원	시간
1-01	수 와 연 산	원시인과 숫자	1. 숫자의 탄생과정 이야기 자료 2. 원시인의 수세기	· 1-가-5까지의 수 · 1-가-9까지의 수	4
1-02		여러가지 수학 기호들	1. 수학 기호중 +, -, ×, ÷ 2. %, >, <, = 등의 기호의 탄생 배경 3. 일상생활에서 수학기호의 사용	· 1-가-더하기와 빼기 · 1-나-더하기와 빼기(1) · 1-나-더하기와 빼기(2)	4

2) 도형 영역에 개발된 프로그램 자료

번호	영역	자료명	자료내용	관련 교육과정 단원	시간
2-01	도형	쌍기나무로 도시 만들기	1. 쌍기나무로 모양 만들기 2. 새로운 도시 만들기	· 1-가-여러가지 모양 · 2-나-쌍기나무 놀이	4
2-02		소마큐브 만들기	1. 소마큐브 2. 여러 가지 퍼즐 풀기 3. 우유팩으로 소마큐브 만들기	· 2-나-쌍기나무 놀이	4

3) 측정 영역에 개발된 프로그램 자료

번호	영역	자료명	자료내용	관련 교육과정 단원	시간
3-01	측정	길이를 재어보자	1. 신체의 길이 재기 2. 길이의 역사	· 1-가-비교하기 · 2-가-길이재기 · 2-나-길이재기	4
3-02		시간 이야기	1. 시간과 시각 2. 하루생활 계획하기	· 1-나-시계보기 · 2-가-시간 알아보기	4

4) 확률과 통계 영역에 개발된 프로그램 자료

번호	영역	자료명	자료내용	관련 교육과정 단원	시간
4-01	확률과 통계	같은그림, 숫자 맞추기	1. 카드 이용 게임하기	· 1-가-분류하여 세어보기	4

5) 문자와 식 영역에 개발된 프로그램 자료

번호	영역	자료명	자료내용	관련 교육과정 단원	시간
5-01	문자와 식	신문에서 찾은 수학	1. 신문에서 수학 내용 찾기 2. 생활에서 수학 문제 만들기	· 1-나-문제푸는 방법찾기 · 2-가-식만들기와 문제만들기	4
5-02		이런문제 저런문제	1. 여러가지 퍼즐		2

6) 규칙성과 함수 영역에 개발된 프로그램 자료

번호	영역	자료명	자료내용	관련 교육과정 단원	시간
6-01	규칙성	성냥을 움직여라	1. 성냥개비로 도형만들기 2. 성냥개비 퍼즐	· 1-나-여러가지 모양 · 2-가-식만들기와 문제만들기	4
6-02	과함수	숫자로 만든 탑	1. 1로 만들 수 있는 수 2. 9의 신비	· 2-나-곱셈구구	2

3. 개발된 프로그램의 예

1-01	수와 연산	주제	원시인과 숫자	· 1-가-5가지의 수 · 1-가-9가지의 수
------	-------	----	---------	------------------------------

초등학교 저학년(1-2학년) 아동이 수와 연산 영역에서는 1학년에서 100까지의 수 개념을 이해하고, 세고, 쓰며, 읽고, 크기를 비교하는 학습이 대부분이다. 실제로 수의 이해에 대한 학습은 어떻게 생각하면 원시인이 수를 만들게 된 단계를 그대로 아동에게 적용하면서 아동 스스로 수에 대한 문제를 생각하게 해보는 것이 가장 좋을 것이라 생각된다.

따라서 이 프로그램의 목적은 처음 배우는 수를 이야기를 통해서 저학년으로써 수를 어떻게 만들었는지에 대해 흥미를 갖고 생각하고 그 방법을 스스로 직접 찾아보는 데 있다.

학습목표

1. 수가 어떻게 해서 생겨났는지 알아보자.
2. 수가 왜 필요한지 알아보자.
3. 자신의 기준에 맞추어 수를 만들어 보자.

♣ 씨뿌리기 활동

탐구1

원시인네 집에 양이 아주 많이 있었어요. 하지만 원시인은 수를 모릅니다.

그럼 자신이 가지고 있는 양을 어떻게 표시하고 확인했을까요. 이야기해 봅시다.

- 돌로 양의 수만큼 표시, 그림으로 그려서 표시한다. 등등 다양한 답이 나올 것이다.

※ 싹틔우기 활동

1. 다음의 이야기(생선 아홉마리)를 읽어봅시다.

옛날 아주 옛날에 길철이 원시인이 살았어요. 주변에는 나무도 있고, 새도 있었어요. 어느날 원시인은 물고기를 잡았어요. 아니? 그런데 운이 좋아 그 날은 아홉 마리나 잡았어요. 그래서 집에 가서 가족과 배불리 먹었어요. 그리고 며칠 뒤 신이 나서 친구 익준이 원시인에게 자랑을 했어요. “나 물고기 많이 잡았었다.” “몇 마리 잡았는데?” 길철이 원시인은 9를 표현할 수가 없었어요. 그래서 그냥 “잊어버렸어, 하얏튼 많이 잡았어.” 그러자 익준이가 “바보!” 하면서 놀렸어요. 길철이는 집에 가는 동안 몇 마리를 잡았는지 계속 생각했는데, 집에가 보니 물고기 뼈가 그냥 남아 있었고, 세어보니 아홉 마리였어요. 그런데 그 수를 길철이는 친구에게 쓰고 말할 수가 없었다. 또 자꾸 잊어버렸습니다. 그래서 친구에게 그냥 많이 라고 계속했습니다.

탐구1

어떻게 하면 잊지 않고 쓸 수 있을까요? 원시인의 생각으로 말해봅시다.

2. 부시맨과 염소(수 개념 형성과 수 세기)

영화 부시맨을 보면 어느날 갑자기 하늘에서 호리병이 떨어져 온 동네를 동요와 혼란속에 빠뜨린다. 여기서 호리병은 우리가 쉽게 볼 수 있는 콜라병이었다. 아주 단순한 스토리지만 관객들을 사로잡기에는 손색이 없었다. 이 영화에서 주목을 끌었던 부분이 또 하나 있었는데, 바로 부시맨으로 출연한 원주민에게 과연 출연료를 얼마나 줬을까 하는 것이었다.

영화를 마친 후, 감독은 부시맨에게 사고 싶은 것을 마음대로 사라며 많은 돈을 주었다고 한다. 그러나 돈이 무엇인지 전혀 모르는 부시맨은 받은 돈을 종이 대신으로 쓰기도 하고, 바람에 날려 보내기도 했다. 이것을 본 영화 제작자와 감독은 자신들의 실수를 깨닫고 고심 끝에 수십마리의 염소를 대신 사 주었다고 한다. 이 때 사 준 염소가 부시맨들이 그 동안 가져 왔던 염소보다 더 많은 수였다고 한다. 그래서 부시맨들은 이 염소들을 도망가지 못하게 가두고, 또 잡아먹고 하는 데 떡이나 애플 먹었다. (<http://math.hongik.ac.kr/~chae/math/001.htm>)

탐구2

이 이야기를 읽고 느낀 점을 적어 봅시다.

부시맨은 생활이 단순하고, 복잡한 경제 활동이 별로 없어서 수를 거의 필요로 하지 않았다.

실제로 그들은 10이 넘는 수를 세지 못한다고 한다. 10이 넘어가는 수는 그냥 “많다”라고 한다. 이런 그들에게 갑자기 많은(적어도 그들에게는) 염소가 생겼다. 그러던 어느 날, 염소 한 마리가 도망을 갔다고 가정해 보자. 그렇다면 이들은 염소가 없어진 것을 알 수 있을까? 수를 셀 수 있는 사람이라면 궁금할 때마다 염소 수를 세어보면 될 테니까 쉬운 일이겠지만, 부시맨이 큰 수를 셀 수 없다는 것을 생각하면 어떨까?

3. '하나, 둘, 셋, ... ?' 하고 세지 못하던 시절

탐구3

여러분이 수를 모르는 원시인의 입장이 되어서 하나, 둘, 셋하고 세지 못하던 때에는 수를 어떻게 기억했는지 적어 봅시다.

앞의 부시맨의 상황은 우리 인류가 아직 수세기를 하지 못했을 때 겪었을 어려움을 대변해 주고 있다. 사람들은 이러한 문제를 어떠한 방법으로 해결했을까? 그것은 다름 아닌 일대일대응의 원리를 적용한 '나무 눈금 새기기'였다. 염소 우리 옆 나무에 염소 한 마리에 눈금 하나씩을 새겨 놓고, 염소와 나무에 새겨진 눈금을 하나씩 대응시켜 남은 눈금의 수로 없어진 염소의 수를 판정하는 것이다.

▣ 수를 기억하기 위한 방법-텔리 ▣

타고 있던 배가 난파하여 무인도에 상륙하게 된 로빈슨 크루소의 이야기는 여러분도 잘 알고 있을 것이다. 무인도에서 지내는 날짜를 기억해 두기 위해서, 꺾질을 벗긴 나무에 칼로 하루에 한 개씩의 금을 그었다는 이야기가 있다. 이런 식으로 나무토막에 금을 그어 수를 헤아린 것은 원시 사회에 흔히 있던 일이다. 이러한 것을 '텔리(tally, 각목)'이라고 한다. 이것은 중세 유럽 사회에서도 흔히 이루어졌다고 한다. 우리나라 농촌에서도 흔히 텔리 풍습을 볼 수 있는데, 벽이나 나무에 금을 그어서 표시하는 것이 그 예라 할 수 있다.

다음은 송나라 사신으로 고려에 온 적이 있는 '서궁'이라는 사람이 쓴 [고려도경, 1123년]에 나온 글이다.

"고려의 풍습에는 계산막대(산목算木)에 의한 계산은 볼 수 없고, 관청에서 출납 회계를 할때 회계관이 나무토막에 칼로 한 개씩 금을 그는다. 일이 끝나면 그것을 버리고 보관하는 일이 없으니 기록하는 법이 너무도 여술하다."

이 글에서 보면 고려의 관청에서 텔리의 방법을 수를 세고 계산하는데 사용한 것을 알 수 있다. 하지만 고려시대에는 이미 산사(算士: 주로 재정 회계의 업무에 종사하는 계산 능력을 갖춘 관리)제도가 있었으니 실제로 이렇게 계산은 하지 않았을 것으로 생각되지만 텔리를 하였음에는 틀림없다. (가와쿠보 가쓰오, 1996)

탐구4

텔리의 불편한 점을 말해 봅시다.

4. 손가락을 접어가며 세다

탐구5

5, 10, 12를 기준으로 수를 세는 경우를 우리 생활에서 찾아봅시다.

손가락과 발가락을 접어 가면서 수를 세는 방법에도 여러 가지가 있어서 다양한 수세기법이 나왔다. 손가락으로 셈을 할 때, 1, 2, 3, 4, 5 까지 세면 한쪽 손이 접히게 된다. 그래서 5를 한 단위로 하

는 수세기법이 나오게 되었다. 이외는 달리 손가락과 발가락을 모두 써서 20을 한 단위로 하는 수세기법이 나오기도 했다. 그런데 재미있는 것은 12를 한 단위로 하는 수세기법의 출현이다.

사람들이 손가락과 발가락을 이용해 수를 셀 때, 손가락은 아주 쉽게 접하지만, 발가락은 그렇지 못해서, 10을 세고 난 후 엄지발가락으로 11을 세는데 자구만 나머지 네 발가락이 따라 접히는 것이다. 그래서 오른쪽 발가락 전체로 11을 세고 왼쪽 발가락 전체로 12를 세어서 12를 한 단위로 하는 수세기법이 나왔다는 설이 있다. 그런데 5를 한 뭉치로 해서는 너무 적고, 20을 한 뭉치로 해서는 너무 크며, 발가락을 사용하기란 손가락만큼 쉽지 않아서 마침내 사람들은 발가락으로 세는 것을 포기하고 손가락으로만 수를 세게 되었다. 이렇게 해서 10을 한 단위로 하여 수를 세는 10진법이 정착하게 되었다. 우리는 지금 너무나도 자연스럽게 손가락을 접었다 폈다 하며 하나, 둘, 셋, 넷, ...하고 수를 세고 있지만, 이러한 방법이 정착되기까지는 오랜 세월을 걸쳐 많은 시행착오를 겪어야 했다.

꽃피우기 활동

1. 뉴기니아 원주민의 수사법(김용운·김용국, 2001)

미개인은 주로 몸짓으로 수를 나타낸다고 한다. 그렇지만 그들이 사용하는 말 가운데는 수사가 없느냐 하면 그렇지 않다. 있기는 하지만 대부분은 1, 2 정도뿐이고, 많아도 3까지 밖에 없다. 그 이상이 되면 모두 “많다”인 것이다. 이 사실을 가지고 그들의 빈약한 계산 능력을 비웃을 필요는 없는데 그들은 일상 생활에서 그 이상의 수에 대한 필요를 느끼지 않아서 그렇게 된 것이라고 생각하는 것이 옳을 것이다. 이것은 고대 문명을 꽃피운 이집트인이 백만 이상을 모두 “많다”라고 표시한 것과 같은 것이다. 오스트레일리아의 뉴기니아 원주민은 다음의 수사를 사용하였다.

1 은 “우라편”(urapun)

2 는 “오코사”(okosa) 그리고는 없는데, 이두 수를 사용하여

3은 “오코사·우라편”(2+1)

4는 “오코사·오코사”(2+2)

5는 “오코사·오코사·우라편”(2+2+1)

6은 “오코사·오코사·오코사”(2+2+2) 와 같이 셈하였다.

탐구

뉴기니아 원주민이 수를 표현하는 규칙을 설명해보자. 그리고 그 방법은 어떤 점이 불편한지 이야기해 보자. 뉴기니아 원주민이 7~10을 표현하기 위해서 어떤 방법으로 말하였는지 추리하여 봅시다.

2. 여러분 자신들이 필요한 수를 표현할 방법을 만들어 봅시다.

(참고 : 수를 만들 때는 어떤 규칙을 가지고 만들어야 합니다.)

3. 여러분 자신이 직접 손가락을 이용하여 수를 표현하는 방법을 만들고 그려봅시다.

▣ 참고자료 ▣

1. 김용운 · 김용국(2001), 재미있는 수학여행, 김영사, pp32-36.
2. 김원기의 수학홈페이지 (<http://210.178.168.207/%7Ekwg/index.html>)

3-01	측정	주제	길이를 재어보자	· 1-가-비교하기 · 2-가, 나-길이재기
------	----	----	----------	-----------------------------

초등학교 저학년(1-2학년)의 측정영역에서는 길이, 넓이, 무게, 부피 등을 비교하는 학습을 하는데 학습요소를 아이들의 생활에서 도입하고 있고, 소재를 주로 아이들의 학용품에서 많이 찾는다. 심화 학습에서는 그것에서만 그칠 것이 아니라 아이들의 생활하는 활동에서 직접 그것을 찾도록 해야 할 것이다. 따라서 이 프로그램의 목적은 아이들의 활동에서, 몸에서 나오는 길이에 관해서만 새롭게 생각해보고 탐구해 보는데 의의가 있다.

학습목표

1. 생활에서 접하는 물건의 길이를 측정하여 봅시다.
2. 길이는 어떻게 하여 재게 되었을까 생각하여 봅시다.

♂ 씨뿌리기 활동

탐구1

우리 주위에서 길이를 표현하는 말을 찾아봅시다.
- 길다, 짧다, 높다. 등등

탐구2

여러분이 알고 있는 길이를 나타내는 단위를 전부 적어 봅시다.

※ 싹틔우기 활동

1. 어떤 숫자가 제일 긴지 재어봅시다.

우리는 수학공부를 쓰는 수는 0-9까지의 수가 거의 대부분일 것이다. 그러면 그 수를 쓰는데 연필심이 가장 많이 드는 수는 어떤 수일까? 한번 생각해 보자. 직접 수(0~9)를 큰 종이(신문지 1장)에 짝 차게 쓰고 길이를 재어보자.

[준비물] 신문지, 털 실, 가위, 크레파스

탐구1

어떻게 하면 숫자를 쓴 털실의 길이를 쉽게 재고 비교할 수 있을까? 말해봅시다.

탐구2

여러분의 이름과 친구의 이름을 써서 누구의 이름이 더 긴지 알아봅시다.
기준으로 정한 방법을 말하여 봅시다.

2. 내 몸의 치수를 알아봅시다.

우리가 옷가게에 가서 옷을 살 때 옷이 맞는지를 알아보기 위해서는 입어보고 산다. 그리고 옷을 자세히 잘 살펴보면 허리의 둘레 같은 치수가 나와있다. 그리고 아빠가 옷가게에서 와이셔츠를 살 때 목둘레를 알아보기 위해서 줄자로 목 둘레의 길이를 잴다. 이처럼 우리 몸에는 측정할 수 있는 길이가 아주 많다. 그럼 우리 몸에서 이런 길이를 한번 조사해 보자.

탐구3

여러분의 몸에 있는 길이를 재어봅시다. 어떻게 하면 될지 말해 봅시다.

탐구4

다음의 길이를 어떻게 잴지 잘 생각해 보고, 길이를 재어봅시다.

- 1) 키
- 2) 양팔을 벌렸을 때의 길이
- 3) 양팔과 키의 길이는 어느 것이 긴가요?
- 4) 머리의 둘레 길이
- 5) 키의 길이로 여러분의 머리둘레를 몇 번이나 감을 수 있을까요?
예상해서 맞춰보고 실제 재어봅시다.
- 6) 목 둘레의 길이를 재어봅시다.
- 7) 허리 둘레의 길이를 재어봅시다.
- 8) 허리 둘레의 길이는 목 둘레를 몇 번 감을 수 있을까요?
- 9) 얼굴의 길이(머리카락 시작부분에서 턱까지)를 재어보고 친구와 비교해보자.
- 10) 발목 둘레의 길이와 팔목 둘레의 길이를 재어보고 비교해보자.
- 11) 손바닥의 길이와 발바닥의 길이를 재서 비교해 보자.

3. 자 없이 길이 재기

탐구5

자를 만들기 전에는 무엇으로 길이를 재었을까 말해봅시다.

자가 있기 전에 길이를 재기 위해서는 우리 몸의 일부분인 발걸음이나 손가락 길이를 '자'대신에 사용하여 대강의 길이를 나타냈었다.

우리나라에서도 길이의 단위로 [한뼘, 두뼘, ...], [한발, 두발, ...] 등 몸의 일부를 이용하여 길이의 단위를 표현하는 사람들을 적지 않게 볼 수 있다. 세계적으로도 미터법을 길이의 단위로 사용하고 있지만 아직도 서양에서는 피트와 야드를 길이의 단위로 사용하고 있습니다. 우리에게 생소한 단위인 피트와 야드는 어떻게 정해졌을까요? 옛날부터 서양 사람들이 길이의 단위로 사용해온 피트와 야드가 어떻게 정해졌는지 알아보면 신체를 이용한 점에서는 동서양이 같았다는 것을 알 수 있다.

1) 옛날 우리 조상

- (1) 거리를 말할 때 “걸어서 100걸음 정도 된다.”
- (2) 물건의 길이를 말할 때 “세 뺨, 또는 두 발 된다.”
- (3) 높이나 깊이를 말할 때 “다섯 키 정도 된다.”

2) 고대 이집트 사람들

팔굽에서 손끝까지의 길이를 “큐빗”이라는 단위를 사용하여 초기의 피라미드 등을 건축을 하였다.

3) 영국이나 미국

- 피트(feet) 이야기

옛날 로마 사람들은 길이를 재는 단위가 없었을 때 흔히 자기 신체의 길이를 단위로 사용하였으나 사람마다 크기가 달라질 수 밖에 없어 불편한 점이 많았습니다. 그러자 어느 임금의 백성들에게 좋은 아이디어를 공표했습니다. 즉 임금 자신의 발가락 끝에서 발뒤축 끝까지의 길이를 기본 단위로 사용하는 것이었습니다. 그러자 백성들은 너무나 기뻐했습니다. 하지만 그 임금이 돌아가시고 다른 임금이 자리에 오르자 소동이 벌어지고 말았습니다. 새로운 임금의 발은 엄청 컸기 때문이죠. 그래서 다시 길이의 단위가 바뀌게 되었고, 구뎡방은 구뎡방대로, 목수는 목수대로, 양복점은 양복점대로 난처한 지경에 빠졌고 결국은 자기들 나름대로 아무렇게나 길이의 단위를 정하고 말았습니다. 그러나 그 기준은 여전히 발의 크기였습니다. 그래서 [발]을 의미하는 단어 푸트(foot)가 길이의 단위가 되었는데, 이것을 복수로 피트(feet)라고 부릅니다. 지금도 쓰고 있는 길이의 단위인 ‘푸트(복수 feet)’는 발이라는 뜻이다.

(1feet = 약 30.4cm)

- ‘마일(mile)’ 이야기

영국에서 에드버러성과 이성에서 조금 떨어진 여왕의 숙소까지의 직선 거리를 “로열마일(Royal mile)” 이라고 부르는데 ‘마일(mile)’은 여기서 유래했다고 한다.

- ‘야드’이야기

야드 또한 길이의 단위인데, 1야드라는 길이는 지금으로부터 800여년 전의 영국 헨리 1세라는 임금이 정해 놓은 것이다. 이 왕의 코에서부터 한쪽 팔을 쭉 뻗은 손가락 끝까지의 거리를 길이의 단위로 삼았던 것이라고 한다.

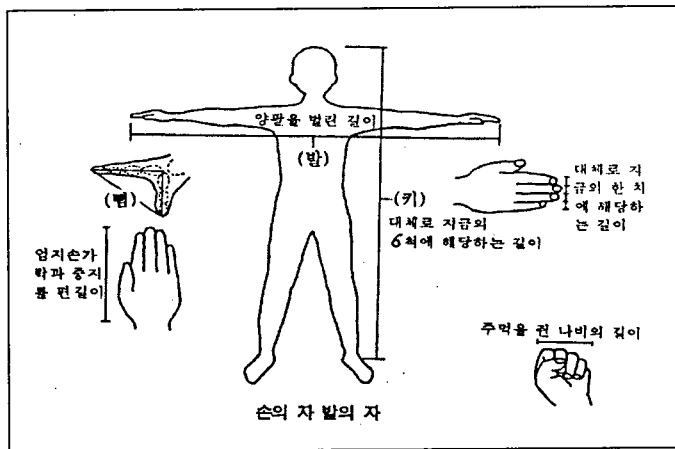
4) 중국이나 한국

우리나라에서도 길이의 단위로 [한뺨, 두뺨, ...], [한발, 두발, ...] 등 몸의 일부를 이용하여 길이의 단위를 표현하는 사람들을 적지 않게 볼 수 있다. 다음은 길이를 나타내는 단위들이다.

- 한 뺨 : 엄지와 인지를 쭉 뻗을 때의 길이 (약 20cm)

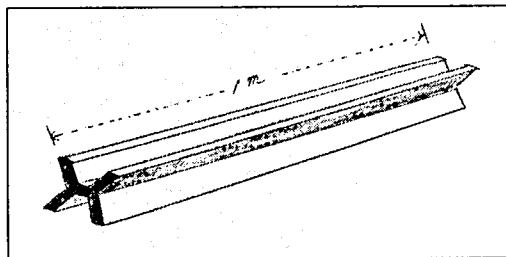
- 한 발 : 두 팔을 잔뜩 벌린 길이
- 한 자 : 1척(尺)이라고 하며 약 30.3cm의 크기
- 한 치 : 1촌(寸)이라고 하며 한 자를 10등분한 길이

또 고목의 큰 나무의 둘레를 ‘아람’이라는 단위로 나타내었는데, 한 아람은 나무통을 양팔로 싸안았을 때 양손가락 끝이 겨우 닿으면 ‘한 아람’이라고 했고 두 사람이 손을 이어서 싸안았다면 ‘두 아람’이라고 부른다. 이와 같이 옛 사람들은 신체 일부를 자로 사용했고, 지금도 자가 없을 때는 흔히 이러한 길이의 단위로 대강의 거리나 길이를 말한다.



그러나 위와 같이 신체 일부를 자로 사용했을 때에는 큰 사람과 작은 사람 차이가 있고 도 그 단위가 나라마다 다르기 때문에 대단히 불편하였다.

그래서 프랑스 정부에서는 세계가 공통으로 같이 사용할 수 있는 ‘미터법’을 제정 공포 했는데 그 길이는 자오선(남극에서 북극까지의 길이)의 2000만 분의 1의 길이를 1m로 하였고, 그것의 100분의 1은 1cm, 또는 그것의 10분의 1을 1mm로, 1m의 1000배는 1km의 단위로 사용하기로 하였다.(1875년의 미터 조약)



<미터 원기 그림 모형>

그러나 세계 각국의 1m 길이가 각기 다르면 혼란이 생기므로 쇠붙이 중 기온 변동에 따른 변화가 가장 적은 백금으로 미터원기를 만들어 파리에 보관하고 있으며 우리나라에서도 1963년 미터법을 공식적으로 사용하기로 하여 지금 사용하는 것이다.

지금은 정밀한 기계, 원자, 광학 등에서 몇 천분의 1mm 등 극히 작은 길이도 사용하고 있다.

☀ 꽃피우기 활동

1. 우리의 주변에서 길이를 표시한 것을 10개 정도 조사하여 찾아보고 그것의 의미를 알아봅시다.

2. 우리주변에서 길이가 아주 긴 것(예를 들면 큰 빌딩의 길이)의 예를 들고 그것의 길이를 잴 수 있는 방법을 말해 봅시다.

3. 우리나라 길이 단위에 대해서 더 자세하게 조사하여 봅시다.

▣ 참고자료 ▣

1. 한국학교발명협회(2001), 발명영재 제15호, pp. 24-25.

IV. 결론 및 제언

본 연구는 초등학교 저학년(1-2학년) 수학 영재아를 위한 심화학습용 프로그램 개발을 목적으로 하였다. 그래서 개발된 프로그램은 영재학급, 특기·적성반, 방과후 영재교실등에서 직접 활용할 수 있도록 하는데 목표를 두었다. 이러한 목표 아래 개발된 프로그램의 특징은 다음과 같이 요약해 볼 수 있다.

첫째, 초등학교 저학년(1-2학년) 교육과정에서 다루는 내용과 관련이 있고 문제해결 수준이 저학년 일반 아동 이상이 해결할 수 있는 심화 자료를 교육과정 영역별로 정리하였다. 즉, 교육과정에 준하여 교육과정에서 제시하고 있는 6개 영역인 수와 연산, 도형, 측정, 확률과 통계, 문자와 식, 규칙성과 함수영역의 내용에 맞는 자료를 각 단위 주제별로 구성하여 단원과 연결하였다. 이것은 학교 현장에서 교사가 교육과정을 운영하면서 영재 교육도 같이 병행할 수 있도록 한 것이다.

둘째, 수학적인 사고력을 향상시킬 수 있고 창의력을 신장시킬 수 있는 다양한 자료를 단위 주제별로 구성하여 심화학습용으로 사용할 수 있도록 하였다.

셋째, 초등학교 저학년의 학습 특성상 활동과 탐구 위주의 내용으로 프로그램을 구성하고 단위 프로그램의 양도 초등학교 저학년의 학년 특징을 고려하여 활동시간을 2차시~4차시의 양으로 개발하였다.

넷째, 프로그램의 형태는 렌줄리의 3부 심화학습 형태를 하나의 단위 프로그램에 포함될 수 있는 방법을 모색하여 프로그램 전개 형태를 구성했다. 그런 학습 활동 속에는 영재 아동의 수학적 특성을 고려하여 탐구활동을 제시하여 자기주도적 학습이 될 수 있도록 하였다. 이러한 점은 트리핑거의 자기주도적 학습과도 맥락을 같이한다고 볼 수 있다.

본 연구의 개발된 프로그램을 근거로 활용함에 있어 다음과 같이 제언하고자 한다.

첫째, 개발된 학습 자료를 효과적으로 지도할 수 있는 수학 영재 교사교육이 절실히 필요하다. 수학영재를 위한 프로그램으로 교수 학습 활동을 하기 위해서는 프로그램에 대한 이해와 영재 교육에 대한 전문적인 지식을 갖춘 교사가 우선적으로 요구된다.

둘째, 초등학교 영재 교육이 연계성을 갖게 하기 위해서는 저학년에 맞는 자료뿐만 아니라 같은 성격의 자료가 중학년용과 고학년용 자료가 동시에 개발되어 활용되어야 하겠다. 더 나아가 초등학교 자료와 중학교 자료가 같은 연계성을 가지고 개발되어야 할 것으로 사료된다.

참 고 문 헌

- 강숙희·조석희·장영숙·류숙희·조영주 (1999). 영재 교수-학습 자료 개발 연구 : 초등학교 저학년용 국어, 수학, 사회를 중심으로, 한국교육개발원 수탁연구 CR 99-21. 한국교육개발원.
- 교육부 (1997). 제7차 수학과 교육과정, 교육부 고시 제1997-15호 별책 8. 서울: 교육부.
- 김수환 (2000). 미국의 영재교육실태 조사 연구. 한국수학교육학회시리즈 F 수학교육학술지, 5(5). pp. 1-20.
- 김수환 (2001). 수학 영재의 지도와 평가에 관한 사례 분석, 한국수학교육학회시리즈 F <수학교육 학술지> 6(6), pp.1-21.
- 김주봉 (1999). 청주교대과학영재교육센터의 '99수학영재캠프 활동'. 한국수학교육학회시리즈 F <수학교육 학술지> 4(4), pp.53-62.
- 김주훈·박경미·최고운·이은미 (1996). 영재를 위한 심화학습 프로그램 개발 연구 : 국어, 사회, 수학, 과학을 중심으로, 한국교육개발원 수탁연구 CR 96-25. 한국교육개발원. p.26.
- 김해규 (2001). 제7차 수학과 교육과정 심화과정에 활용할 수 있는 학습자료개발, 교육인적자원부 정책연구과제. p.125.
- 김홍원·김명숙·송상현 (1996). 수학 영재 판별도구 개발연구(I), 한국교육개발원 연구보고 CR 96-26, 한국교육개발원.
- 김홍원·김명숙·방승진·황동주 (1997). 수학 영재 판별 도구 개발 연구(II)-검사제작편-, 한국교육개발원 수탁연구 CR 97-50. 한국교육개발원.
- 남승인 (1998). 초등학교 수학 영재 지도에 관한 고찰, 한국수학교육학회지시리즈 F <수학교육 세미나> 2, pp.35-57.

- 류성립 (2001). 그래프 이론을 활용한 초등학교 영재교육 프로그램 개발, 한국수학교육학회시리즈 F <수학교육 학술지> 6(6), pp.23-44.
- 수학사랑. 소마큐브 지침서. 서울 : 수학사랑
- 이종욱 (2000). 초등학교 수학생재의 확산적 사고 발달을 위한 학습 자료 개발 연구, 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.
- 장곡초등학교 (2002). 놀이 수학(영재교육 심화자료집 · 2학년 수학). 경기도: 장곡초등학교.
- 장곡초등학교 (2002). 도형이의 수학여행(영재교육 심화자료집 · 3학년 수학). 경기도 : 장곡초등학교.
- 조석희 · 박경숙 · 김홍원 · 김명숙 · 윤지숙 (1996). 영재교육의 이론과 실제, 한국교육개발원 수탁 연구 CR96-28, 한국교육개발원.
- 조한혁 · 우혜영 (2001). 인터넷 LOGO와 창의력 영재교육. 한국수학교육학회시리즈 F <수학교육 학술지> 6(6), pp.55-71.
- 한국학교발명협회 (2001), 발명영재 15, pp.24-25.
- 한길준 · 정승진 (2001). 경기도 수원 교육청의 과학, 수학분야 특기 · 적성교육 실태 조사. 한국수학교육학회시리즈 F <수학교육 학술지> 6(6). pp.73-87.
- G.A.Davis & S.B.Rimm저, 송인섭 외 4 편역 (2001). 영재교육의 이론과 방법. 서울 : 학문사.
- 가와쿠보 가쓰오 (1996). (기초를 알면 문제가 없다) 즐거운 수학 탐구, 여명 출판사.
- <http://210.178.168.207/%7Ekwg/index.html>
- <http://math.hongik.ac.kr/~chae/math/001.html>
- <http://www.edunet4u.net>