

초등수학경시대회 문항분석을 통한 초등수학 영재교육 활성화 방안에 관한 연구

김 해 규 (제주교육대학교)

김 승 진 (제주동초등학교)

우리 나라 수학경시대회의 운영은 선발에 초점이 맞추어져 있어, 지속적인 교육 및 피드백이 결여되어 있고 단순히 경시대회성 기출문제만을 반복하여 출제하고 있는 실정이다. 그러므로 영재의 특성을 고려하고, 영재성을 키워주기 위해서는 무엇보다도 수학 창의적 문제해결력을 신장시켜줄 수 있는 학습 자료의 개발이 시급하다.

따라서 본 논문에서는 초등수학경시대회 기출문제와 시중에 출판되어 있는 경시대회 준비를 위한 학습 자료를 분석하여, 일선 초등학교 현장에서 실시되고 있는 영재교육을 활성화시킬 수 있는 방안을 연구하는 데 목적이 있다.

I. 서 론

1. 연구의 필요성 및 목적

우리 나라의 수학 영재교육에 대한 관심은 수학경시대회라는 방법으로 1970년 이래로 계속되어 왔다. 1970년대 초에 육영재단인 어린이회관 주최 전국 어린이 수학경시대회를 시발로 1980년대 초반부터는 각 시도 교육청별로 수학경시대회가 실시되어 왔으며, 1990년대 들어서면서부터는 각종 학습지 회사나 학원에서 전국 규모의 수학경시대회를 개최하고 있다. 또한 일부 초등학교에서는 각종 수학경시대회에 대비하여 특별활동의 일환으로 수학경시반을 운영하고 있다.

그런데 이런 수학경시대회가 수학적인 능력을 표출할 수 있는 가장 보편화된 통로이고 수학영재 교육에도 지대한 영향력을 행사하고 있지만 수학대중화에는 별로 기여하는 바가 없고 건전한 수학 문화로 자리잡고 있지도 못하다. 특히 경시대회의 운영도 선발에만 초점이 맞추어져 있으므로 지속적인 교육 및 피드백이 결여되어있고 수학 교육적인 측면에서 볼 때 문항선정에서도 중요한 점을 놓치는 경우가 많고, 단순히 경시대회성 기출문제만을 반복하여 출제하고 있는 실정이다. 그러므로 영재의 특성을 고려하고, 영재성을 키워주기 위해서는 무엇보다도 수학 창의적 문제해결력을 신장시켜 줄 수 있는 학습 자료의 개발이 시급하다.

따라서 본 논문에서는 초등수학경시대회 기출문제와 시중에 출판되어 있는 경시대회 준비를 위한 학습자료를 분석하여, 일선 초등학교 현장에서 실시되고 있는 영재교육을 활성화시킬 수 있는 방안을 연구하는 데 목적이 있다.

2. 연구 내용

연구는 초등수학경시대회 기출문제들을 분석하여 초등수학 영재교육을 활성화시키는 방안을 연구하기 위해서 다음과 같은 연구 내용에 초점을 맞추었다.

가. 2002년에 실시된 각종 초등수학경시문제의 출제 비율을 제7차 수학과 교육과정의 영역별로 분석한다.

나. 2000년~2002년에 실시된 각종 초등수학경시문제를 수학영재교육 프로그램의 유형으로 분류한다.

다. 경시대회 문항의 분석을 통한 효율적인 영재교육 활성화 방안을 연구한다.

3. 연구 자료 개발의 절차와 방법

위의 연구 내용에 따른 자료 개발의 절차와 방법은 다음과 같다.

가. 최근 실시된 각종 수학경시대회 문제들을 각 학년별·영역별로 평가요소들을 살펴본다.

나. 연구내용의 2-나 항에서 분류된 수학경시대회 문제들을 초등수학 영재교육에 접목시킴으로써, 수학경시문제들을 효율적으로 지도할 수 있는 초등수학영재교육 프로그램을 개발한다.

4. 연구의 기대 효과 및 제한점

본 연구로 기대되는 효과를 아동과 교사의 입장에서 살펴보면 다음과 같다.

첫째, 아동들에게는 수학을 활용하여 수학의 친밀성을 함양시킬 수 있는 자료, 탐구하고 예측하며 논리적으로 추론하는 능력을 길러주는 문제해결 자료, 창의력을 향상시킬 수 있는 자료 등을 접함으로써 수학에 대한 잘못된 인식과 편견을 줄이고 흥미와 관심을 갖도록 해 줄 것이다.

둘째, 교사들에게는 수업에 사용할 다양하고 풍부한 자료를 제공함으로써 아동들에게 흥미와 빠른 학습 속도를 충족시킬 수 있는 학습내용과 심화된 학습 기회를 제공할 수 있다.

반면에, 본 연구에서 개발한 프로그램은 초등학교 5-6학년 아동을 대상으로 한 것이므로, 초등학교 저학년 급의 수학 내용을 다루지 못한 아쉬움이 있다. 또한 본 연구에서 개발한 프로그램은 대규모 집단을 선정하여 장기적으로 투입해 보고 야기되는 문제점을 진단 보완하여 그 효과를 도출하도록 하는 것이 바람직하지만, 소규모의 단위 학급 및 클럽활동반에서만 실시하였으므로, 본 연구로부터 이끌어낸 결론을 일반화하여 적용하기에는 다소 무리가 따를 것이 예상된다.

II. 이론적 배경

1. 수학 영재의 정의와 특성

가. 영재성의 정의와 수학 영재

영재성에 대한 개념과 영재에 대한 기준이 그 사회의 가치관이나 문화, 시대의 흐름에 따라 달라지고 있기 때문에 영재성과 영재에 대한 학자들의 시각도 매우 다양하다.

우리나라의 영재교육진흥법¹⁾에 “영재라 함은 재능이 뛰어난 사람으로서 타고난 잠재력을 계발하기 위하여 특별한 교육을 필요로 하는 자를 말한다”로 되어있는데, 이 정의는 미국 교육부의 정의를 바탕으로 하고 있다.

그러나, 송상헌(1996)은 ‘수학 영재성’이란 선천적으로 타고난 소질과 적성 및 후천적으로 학습한 수학에 대한 기초 지식을 배경으로 하여 수학적인 문제를 해결하고자 하는 지적, 정의적인 행동특성이 수학적 사고 기능과 긍정적으로 조화롭게 작용하여 수학적 과제를 창의적으로 수행해 낼 수 있는 잠재적 가능성으로 정의했으며, ‘수학 영재’는 이러한 수학 영재성을 가지고 수학 분야에서 이미 탁월한 성취를 보이고 있거나 보일 가능성이 있는 자로 규정하고 있다.

나. 수학 영재의 특성(박명진, 2000, 재인용)

NCTM에서는 수학 영재들이 가지고 있을만한 가능한 행동 특성을 크게 일반적 행동 특성, 학습 행동 특성, 학습 행동 특성, 창의적 행동 특성, 수학적 행동 특성 4가지로 나누고 있는데, 그 중 수학적 행동 특성을 살펴보면 다음과 같다.

- 수에 대한 조기의 호기심과 이해
- 수와 공간적 관계에 대한 논리적이고 상징적인 사고 능력
- 수학적 패턴, 구조, 관계, 그리고 연산에 대한 지각과 일반화하는 능력
- 분석적, 연역적, 귀납적으로 추론하는 능력
- 수학적 추론을 간략화하고, 합리적이고 경제적인 해를 찾는 능력
- 수학적 활동에서 지적 처리과정의 유연성과 가역성
- 수학적 기호, 관계, 증명, 풀이방법 등을 기억하는 능력
- 학습한 것은 새로운 상황에 적용하는 능력
- 수학적 문제를 풀이하는데 있어서의 활동력과 지속성
- 수학적 지각력

1) 영재교육진흥법, 1999, 제2조1항.

2. 영재 교수-학습 모형의 분석(장영숙 외 4인, 2000)

가. Renzulli의 심화학습 3단계 모형

심화학습 3단계모형은 영재교육에서 가장 널리 활용되고 있는 영재 교수-학습 모형중의 하나이다.²⁾ 이 모형은 영재학생들에게 학습 선택의 자유와 개별화 교수의 학습환경을 제공해 주는 것을 기본 원리로 삼고 있다. Renzulli는 3단계의 심화학습 원리를 제안하고 있는데, 제 1부 심화는 일반적인 탐색활동의 단계로서 장차 제 3부에서 독자적인 탐구과제를 수행할 수 있도록 학생들에게 광범위하고 다양한 내용에 접하게 하며 아이디어를 내면화시켜주는 과정이다. 이 단계에서는 정규교육과정에서 다루지 않는 다양한 주제와 영역을 소개하며 전문가 초청 강연, 견학, 비디오 상영, 조사, 토론 등의 활동으로 진행된다. 제 2부 심화는 모든 학생들이 실제 삶의 여러 분야에서 발생하는 다양한 문제들을 좀 더 효과적으로 처리할 수 있도록 하는 기술, 능력, 태도, 방법 등을 말한다. 이러한 능력이나 기술 중 많은 것들이 3부 심화 활동 단계에서 개별적 탐구학습을 수행하는 데 중요한 요소들이 된다. 이 단계에서 중점적으로 다루어지는 기능은 학습 기능, 연구 기능, 참고자원 활용 기능, 의사소통 기능으로 학습 활동의 과정이 학생이 관심을 갖는 주제에 관한 것이어야 한다. 이 단계에서는 개념의 이해를 돕는 발견학습 또는 실험 활동·기능을 익히는 확인 실험활동 등이 주로 이루어진다. 제 3부 심화에서는 이해한 내용이나 습득 숙달된 기능을 적용하여 일상생활 또는 주변에서 발견할 수 있는 문제를 학생이 주도적으로 정하고 이를 해결하기 위한 탐구 활동으로 이루어진다. 이 단계에서는 전문가들이 사용하는 연구 방법을 활용하여 탐구를 수행하는 방식으로 진행되며, 이 단계에서 학생들이 반드시 산출물을 만들어내도록 기회를 제공하고 격려해 주어야 한다. 이 모형의 장점은 영재 학생들의 흥미와 학습 양식을 존중하며, 실생활에 기초하고 있다는데 있다. 또한 이 모형은 프로그램의 철학적 기초, 영재에 대한 정의, 영재에 대한 규명, 교수 활동, 그리고 프로그램 평가를 위한 전략 등을 포함하는 전체적인 프로그램 틀을 제공한다. 뿐만 아니라, 이 모형은 넓은 범위의 학생에게 다양한 수준과 형태의 심화학습 프로그램을 제공함으로써 경쟁적인 분위기보다는 협동적인 분위기를 조성하며 점진적인 심화 단계를 거처가면서 학생들이 체계적으로 프로젝트에 접근할 수 있게 한다.

3. 수학 영재교육 프로그램 유형

가. 남승인(1998)의 수학 영재 프로그램의 유형

국내외에서 이루어지고 있는 학습 프로그램의 내용을 분석하여 분류한다면, 문제해결형 프로그램, 주제 탐구형 프로그램, 과제(Project)개발형 프로그램으로 나눌 수 있겠다. 이들 프로그램의 공통적인 성격은 학생들의 대한 창의적인 사고력의 개발에 있으며, 프로그램 사이의 명확히 구별은 어려우나 다음과 같은 특징이 있다.

2) Renzulli의 3부 심화 모형은 발달적인 성격을 지닌 1, 2, 3부의 연계적인 프로그램으로 구성되어 있는데, 이 모델은 영재아만이 아니라 일반 학생들에게도 적용할 수 있어서 가장 포괄적이고 일반적인 모형으로 미국의 초·중등학교의 70-80%가 적용하고 있는 모델이다. (박명진, 2000, 재인용)

1) 문제해결형 프로그램

정규 수학 교육과정의 연장선상에서 이루어지는 프로그램으로 이미 학습한 내용에 대한 통합 및 이를 심화·발전시킬 기회 제공, 보다 창의적이고 다양한 문제 해결 전략의 개발, 수학에 대해 이해의 촉진과 확장, 지적 호기심 및 도전의식의 자극을 통한 수학적 재능을 개발하는데 초점을 둔다.

2) 주제 탐구형 프로그램

교과 내용과 연계된 과제에 대해서 귀납적 또는 연역적 탐구활동을 통해 학생이 주체가 되어 학생 스스로 수학적 개념과 원리·법칙 등을 일반화할 수 있는 기회의 제공, 기존의 문제 해결 접근 방법과 달리 학생들의 독창적인 탐구활동을 통해 새로운 문제 해결 전략의 일반화 및 수학적 원리와 법칙의 창안과 확장에 초점을 둔다.

3) 과제 해결형 프로그램

학생 개개인이 갖고 있는 기존의 범 교과적인 모든 지식과 도구를 활용하여 비교적 장기간에 걸쳐서 실생활과 관련된 독립된 문제를 해결하는 과정에서 보다 고차적인 수학적 사고력과 창의적인 아이디어를 개발·신장시키는 데 초점을 둔다. 이 유형의 프로그램은 단순히 수학적 지식에 국한되는 것이 아닌 개인이 갖고 있는 범 교과적 지식을 연결·통합하여 주어진 문제를 해결하는 과정에서 타고난 수학적 재능을 최대한 발휘할 수 있는 기회와 환경을 제공하는 데 있다.

나. 박명전(2000)의 수학 영재 프로그램의 유형

수학 영재 프로그램의 내용을 분석하여 분류한다면 다음과 같이 주제 탐구, 다답형 탐구, 수학퍼즐 탐구 3영역으로 선정할 수 있다.

1) 주제 탐구형 프로그램

다양한 주제에 대한 탐구활동을 할 수 있는 프로그램을 개발한다. 예를 들면 각종 수학교구를 활용한 게임 등으로 흥미와 호기심을 불러일으킬 수 있는 다양한 주제에 대한 탐구활동을 할 수 있는 프로그램이다.

2) 다답형 문제형 프로그램

창의성의 하위 요소인 유창성, 융통성, 독창성, 정교성을 길러 줄 수 있는 문제인데, 예를 들면 송상헌(1998)이 수학영재교육 프로그램 개발을 위한 기초 연구에서 수학 창의적 문제해결력 검사지에 제시한 문제들과 같은 것이다.

3) 수학퍼즐 문제형 프로그램

확산적 사고와 수학 창의적 문제해결력을 길러 줄 수 있는 수학퍼즐 문제인데, 수학 퍼즐은 초등 학생들이 매우 흥미있어 하며, 약간의 수학적 아이디어만 있으면 쉽게 해결할 수 있는 것에서부터 많은 시간과 사고가 요구되는 것까지 다양하다. 또한 성냥개비, 바둑돌과 같은 일상 생활용품이나 특별히 수학퍼즐을 위해서 제작된 교구를 가지고 활동적이며 탐구적인 학습 활동을 할 수 있는 프로그램이다.

Ⅲ. 연구의 실제

본 연구에서 수행된 연구의 실제는 다음과 같다.

첫째, 2002년에 실시된 각종 초등수학경시문제의 출제 비율을 제7차 수학과 교육과정의 영역별로 분석하였으며, 둘째, 2000년~2002년에 실시된 각종 초등수학경시문제를 수학영재교육 프로그램의 유형, 즉 문제해결형, 주제탐구형, 수학퍼즐 문제형으로 분류하였다. 마지막으로 위의 2항에서 분류된 초등수학경시대회 문제들을 수학영재교육에 접목시킴으로써, 초등수학경시문제들을 효율적으로 지도할 수 있는 영재교육 프로그램을 개발하고자 한다.

1. 2002년에 실시된 각종 초등수학경시대회 문제의 제7차 교육과정 영역별 출제 비율

| 경시대회 영역 | 제주도학생 수학경시 (10문항) | 한국수학 학력평가 (30문항) | 한국수학 경시대회 (30문항) | 전국수학 학력평가 (30문항) | 한국수학 자격검정 (30문항) | 해법수학 학력평가 (30문항) | 한국수학을 읽피아드 (10문항) | 평균(%) |
|------------|-------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|-------------------------|-------|
| 수와 연산 | 1 | 7 | 6 | 4 | 5 | 8 | 2 | 18.6 |
| | 10 % | 23.3 % | 20 % | 13.3 % | 16.7 % | 26.7 % | 20 % | |
| 도형 | 3 | 11 | 6 | 9 | 8 | 9 | 2 | 27.6 |
| | 30 % | 36.7 % | 20 % | 30 % | 26.7 % | 30 % | 20 % | |
| 측정 | 1 | 5 | 5 | 6 | 5 | 4 | 1 | 14.8 |
| | 10 % | 16.7 % | 16.7 % | 20 % | 16.7 % | 13.3 % | 10 % | |
| 확률과 통계 | 2 | 2 | 4 | 2 | 8 | 3 | 1 | 13.3 |
| | 20 % | 6.7 % | 13.3 % | 6.7 % | 26.7 % | 10 % | 10 % | |
| 문자와 식 | 2 | 4 | 6 | 6 | 2 | 3 | 1 | 14.3 |
| | 20 % | 13.3 % | 20 % | 20 % | 6.6 % | 10 % | 10 % | |
| 규칙성과 함수 | 1 | 1 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 11.4 |
| | 10 % | 3.3 % | 10 % | 10 % | 6.6 % | 10 % | 30 % | |

영역별 문항수 / 전체 문항수 : (%)

2. 수학영재교육 프로그램 유형에 따른 2000년~2002년 실시된 각종 초등수학경시문제의 분류

본 논문에서는 남승인(1998)과 박명전(2000)의 수학 영재를 위한 프로그램 유형에서 각 유형들의 공통적인 성격을 추출하여 남승인이 제시한 프로그램의 유형에서는 문제해결형, 주제탐구형을 선택하고, 박명전이 제시한 프로그램의 유형에서는 수학퍼즐 문제형을 선택하여, 2000년~2002년에 실시된 각종 초등수학경시문제를 문제해결형, 주제탐구형, 수학퍼즐 문제형으로 분류하였다.

| 프로그램의 유형 경시문제 번호 | | 문제해결형 | 주제 탐구형 | 수학퍼즐 문제형 | | |
|---------------------|---------------|---|--|--|---|---------------------------------------|
| 2002 | 제주도 | 1, 3, 8 | 4, 6, 7 | 2, 5, 9, 10 | | |
| | KME (6년) | 전 | 1, 2, 3, 4, 5, 9, 14, 15, 17, 18, 21 | 6, 7, 8, 10, 12, 13, 16, 20, 22, 23, 27, 28, 30 | 11, 19, 24, 25, 26, 29 | |
| | | 후 | 1, 2, 3, 6, 11, 12, 18, 25, 30 | 4, 5, 7, 13, 15, 16, 19, 21, 22, 24, 27 | 8, 9, 10, 14, 17, 20, 23, 26, 28, 29 | |
| | KMC (6년) | 전 | 1, 2, 3, 4, 5, 10, 16, 20, 22, 28 | 6, 7, 8, 9, 12, 14, 15, 17, 23, 24, 25, 27, 30 | 11, 13, 18, 19, 21, 26, 29 | |
| | | 후 | 1, 2, 3, 8, 9, 12, 13, 15, 21, 22, 26, 28, 29 | 4, 6, 7, 10, 14, 18, 24, 25, 27 | 5, 11, 16, 17, 19, 20, 23, 30 | |
| | KMT (6-가급) | 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 14, 16, 17, 18, 19, 21, 22 | 10, 11, 12, 13, 15, 20, 23, 24 주1, 주2, 주3, 주5 | 4, 주4, 주6 | | |
| | KEMO | 3, 5, 7, 10 | 2, 4, 6, 8 | 1, 9 | | |
| 2001 | 제주도 | 1, 3, 8 | 4, 7, 9, 10 | 2, 5, 6 | | |
| | KME (전) | 5 | 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 15, 16, 17, 25, 26, 27 | 12, 13, 18, 20, 28 | 5, 6, 10, 11, 14, 19, 21, 22, 23, 24, 27, 30 | |
| | | 6 | 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 21, 22, 23 | 7, 14, 16, 18, 19, 25, 26, 27, 28, 29, 30 | 4, 13, 15, 17, 20, 24 | |
| | KME (후) | 5 | 1, 2, 4, 5, 6, 11, 12, 13, 16, 17, 19, 24, 25, 27 | 3, 7, 8, 18, 22, 23, 28, 29 | 9, 10, 14, 15, 20, 21, 26, 30 | |
| | | 6 | 1, 2, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 18, 28, 30 | 4, 5, 15, 17, 19, 20, 22, 25, 26, 29 | 3, 6, 7, 10, 16, 21, 23, 24, 27, | |
| | KMC (전) | 5 | 1, 2, 3, 6, 7, 8, 15, 20, 21, 27, | 10, 11, 17, 18, 23, 24, 28, 29, 30 | 4, 5, 9, 12, 13, 14, 16, 19, 22, 25, 26 | |
| | | 6 | 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 21, 22, 23 | 7, 14, 16, 18, 19, 25, 26, 27, 28, 29, 30 | 4, 13, 15, 17, 20, 24 | |
| | KMC (후) | 5 | 1, 2, 3, 6, 8, 10, 11, 14, 19, 22, 27, 28 | 5, 7, 15, 20, 21, 23, 26, 29, 30 | 4, 9, 12, 13, 16, 17, 18, 24, 25 | |
| | | 6 | 1, 2, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 18, 28, 30 | 4, 5, 15, 17, 19, 20, 22, 25, 26, 29 | 3, 6, 7, 10, 16, 21, 23, 24, 27 | |
| | 2000 | 제주도 | 1, 2, 7, 8 | 4, 5, 6, 9, 10 | 3, | |
| | | KME (후) | 5 | 1, 3, 4, 7, 8, 10, 11, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 22, 28 | 5, 6, 20, 23, 24, 25, 26, 27, 30 | 2, 9, 12, 13, 21, 29, |
| | | | 6 | 1, 2, 3, 4, 5, 6, 15, 18, 19, 24, 25, 27, | 7, 9, 12, 14, 16, 20, 23, 28, 30 | 8, 10, 11, 13, 17, 21, 22, 26, 29, |
| KMC (후) | | 5 | 1, 2, 3, 4, 9, 10, 11, 12, 13, 16, 18, 19, 22, 23, 24 | 6, 7, 8, 17, 20, 21, 25, 26, 27, 28, 29, 30 | 5, 14, 15 | |
| | | 6 | 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 11, 16, 18, 24, 26 | 5, 8, 10, 12, 13, 14, 19, 20, 22, 25, 28, 29 | 15, 17, 21, 23, 27, 30 | |

3. 영재 교육 프로그램의 실제

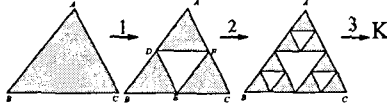
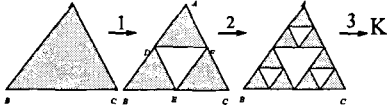
본 연구에서 사용된 영재 교육 프로그램은 초등학교 5~6학년을 대상으로 개발하였으며, 전체 12개의 주제를 통해 학생들의 고급사고력과 수학적 힘을 키워 수학적 능력을 길러주는 데 도움이 되고자 하였으며, 각 프로그램은 경시대회 관련문제, 관련이야기, 학습목표, 준비물 그리고 관련 참고문헌과 관련 사이트를 함께 제시하고 있으며, 렌줄리의 3부 심화학습 이론을 토대로 씨뿌리기(♂), 싹틔우기(♂), 꽃피우기(♂)의 3단계로 구성하였다.

가. 투입된 영재교육 프로그램의 목록

| 순번 | 프로그램의 유형 | 프로그램의 주제명 | 관련교육과정영역 |
|----|----------|---------------------|----------|
| 1 | 문제해결형 | ☐ 수는 언제, 누가 만들었을까? | 수와 연산 |
| 2 | | ☐ 분수와 소수는 어떤 사이일까요? | 수와 연산 |
| 3 | | ☐ 구구단 없이 할 수 있는 곱셈 | 수와 연산 |
| 4 | | ☐ 큰 수 만들기 | 수와 연산 |
| 5 | 주제탐구형 | ☐ 시어핀스키 삼각형과 프렉탈 | 도형 |
| 6 | | ☐ 피보나치 수의 배열 | 규칙성과 함수 |
| 7 | | ☐ 소마큐브 | 도형 |
| 8 | | ☐ 테셀레이션 | 규칙성과 함수 |
| 9 | 수학퍼즐 문제형 | ☐ 탱그램 | 규칙성과 함수 |
| 10 | | ☐ 한 붓 그리기 | 규칙성과 함수 |
| 11 | | ☐ 방진 만들기 | 도형 |
| 12 | | ☐ 퍼즐문제 | 문자와 식 |

나. 투입된 영재교육 프로그램의 예

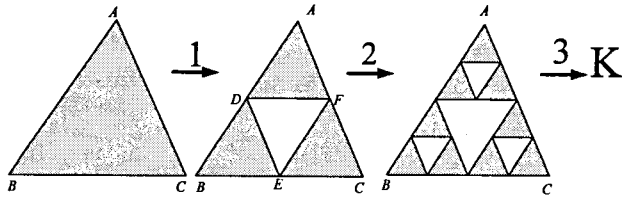
| | | | | |
|---|----------|----------------|----|----|
| 5 | 프로그램의 유형 | 주제탐구형 | 영역 | 도형 |
| | 주 제 | 시어핀스키 삼각형과 프렉탈 | | |

| | |
|-------------|--|
| <p>관련문제</p> | <p>◆ 아래와 같이 정삼각형 1개를 크기가 같은 4개의 정삼각형으로 나눈 후 가운데 있는 삼각형을 잘라내면 3개의 정삼각형이 남습니다. 이와 같은 방법으로 6회 반복했을 때 몇 개의 정삼각형의 남습니까?</p>  <p><제3회 KME 한국수학학력평가(2000), 3단계, 28번></p> <p>◆ 다음은 프랙탈 도형의 하나인 시어핀스키 삼각형을 만드는 과정이다.</p> <p>그림과 같은 삼각형 ABC 모양의 종이를 가지고, 처음은 삼각형 각 변의 중점을 이어서 만든 삼각형 DEF를 오려 내고, 두 번째는 또 다시 나머지 세 개의 삼각형 모양의 종이에서도 앞에서와 같은 방법으로 각 변의 중점을 이어서 만든 가운데 삼각형들을 오려낸다. 이와 같은 방법으로 계속 진행되어 만들어진 도형이 시어핀스키 삼각형이다</p>  <p>☞ 넓이가 1024cm^2인 삼각형을 가지고 위와 같이 시어핀스키 삼각형을 만들 때, 다섯 번째 만들어진 도형의 넓이를 구하여라.</p> <p><제13회 제주도학생수학경시대회(2001), 7번></p> |
|-------------|--|

| | |
|-------------|---|
| <p>학습목표</p> | <ol style="list-style-type: none"> 1. 학생들에게 프랙탈과 그 배경이 되는 수학적 원리에 접근하기 쉽게 하여 활동적인 경험을 제공한다. 2. 프랙탈이 수학의 다른 측면과 어떻게 연관되며 프랙탈 학습이 아이디어를 어떻게 모을 수 있는지를 알게 한다. 3. 시각과 상상력을 통하여 프랙탈의 구조와 형의 아름다움을 느낄 수 있게 한다. 4. 프랙탈 원리를 이용한 입체 카드 만들기 |
| <p>준비물</p> | <p>자, 각도기, 컴퍼스, 풀, 테이프</p> |

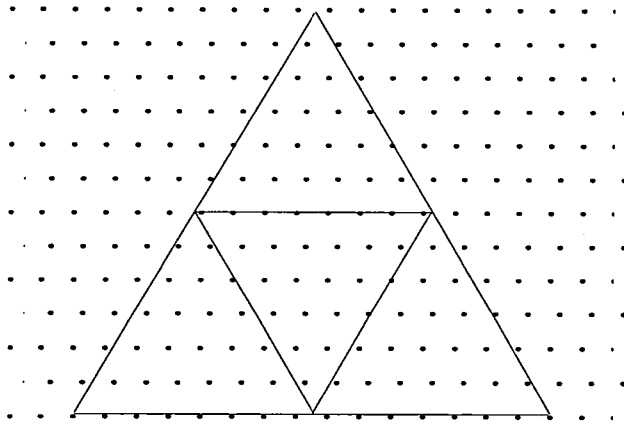
♣ 씨뿌리기

그림과 같은 삼각형 ABC 모양의 종이를 가지고, 처음은 삼각형 각 변의 중점을 이어서 만든 삼각형 DEF를 오려 내고, 두 번째는 또 다시 나머지 세 개의 삼각형 모양의 종이에서도 앞에서와 같은 방법으로 각 변의 중점을 이어서 만든 가운데 삼각형들을 오려낸다. 이와 같은 방법으로 계속 진행되어 만들어진 도형이 시어핀스키 삼각형이다



● 싹틔우기

탐구1 삼각형을 규칙에 따라 그려보기



- 1단계
 - ① 삼각형의 세 변의 가운데 점을 연결한다.
 - ② 가운데 삼각형에 빗금을 친다.
- 2, 3, 4 단계
 - 빗금치지 않은 나머지 삼각형도 같은 방법으로 나누어 빗금을 친다.

【문제 1】 1단계부터 4단계까지 빗금치지 않은 삼각형의 수를 세어보고, 표를 완성하십시오.

| 단 계 | 1단계 | 2단계 | 3단계 | 4단계 |
|--------|-----|-----|-----|-----|
| 삼각형의 수 | 3 | | | |

【문제 2】 똑같은 방법으로 시행해 나갈 때 8단계의 빗금치지 않은 삼각형의 개수는 몇 개나 되는지 알아보십시오.

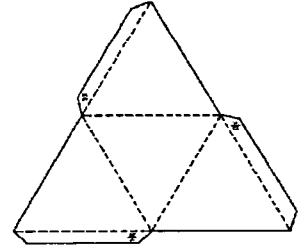
【문제 3】 이 단계를 계속 시행해 나간다면, 삼각형의 모양은 어떻게 되는지 상상해 보십시오.

<활동 1> 프렉탈 피라미드 만들기

▶ 준비물 : 가위, 자, 칼, 이쑤시개, 풀(상당히 중요함), 종이(정사면체를 만들 종이는 두껍고 질긴 카드류의 종이가 좋음), 종이테이프, 순간접착제

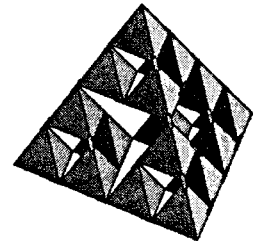
① 기본형 만드는 방법

- 1) 자르기 - 실선을 따라 정확하게 자른다.
- 2) 접기 - 점선을 따라 조심스럽게 자를 대어 접는다. 반드시 직선의 모서리가 직선이 되도록 해야 한다.
- 3) 펼칠하기 - 전개도의 늘어진 부분에 펼칠을 한다. 펼칠을 한 부분이 정사면체의 안쪽에 들어가도록 한다.
- 4) 기다리기 - 풀이 마르도록 기다린다. 모서리가 벌어지면 이쑤시개를 이용하여 벌어진 부분에 다시 펼칠을 하여 붙인다.
- 5) 다음 쪽의 사면체를 이용하여, 가능하면 많은 개수의 사면체를 만드시오.



② 피라미드 만드는 방법

- 1) 1cm×2cm의 종이테이프를 잘라 피라미드의 꼭지점을 서로 마주댄 후 그 위에 종이 테이프를 붙인다.
- 2) 연결부위에 순간접착제(글루건)를 한 방울 떨어뜨린다.



☀꽃피우기

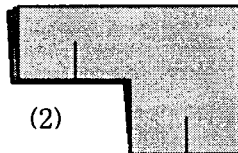
<활동 2> 프렉탈 원리를 이용한 입체 카드 만들기

프렉탈은 점점 더 미세한 구조로 자기 닮음의 성질을 가지는 기하학적인 도형이다. 프렉탈 카드의 핵심은 같은 과정을 원하는 만큼 계속 반복하는 것이다.

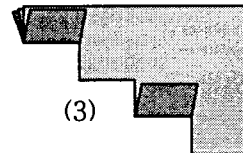
- 준비물 : 색 켄트지 2장(카드 속지와 겉지), 자, 칼, 가위, 풀, 채색 도구
 - 만드는 방법
1. 카드 속지와 겉지를 같은 크기로 자른다.
 2. 카드 속지를 다음 단계로 만든다.



(1)



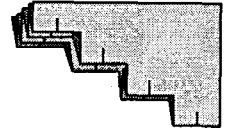
(2)



(3)

(1) 종이를 반으로 접은 후 접은 선(밑변)의 중심에서부터 높이의 반만큼 잘라 왼쪽을 접어 올린다.

(2) (1)의 왼쪽 부분을 펴서 다시 안쪽으로 접어 올리고, 높이의 반만큼 자른다. 다른 한 쪽도 같은 길이 만큼 자른다.

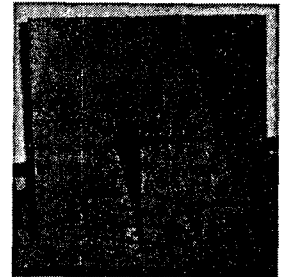


(3) 각각의 왼쪽 부분을 접어 올린다.

(4) (3)의 왼쪽 부분들을 펴서 다시 안쪽으로 접어 올리고, 각 부분의 중심에서 높이의 반만큼 자른다.

(5) 같은 과정을 가능한 만큼 반복한다.

3. 카드 겉지를 반으로 접어서 위에서 완성된 프랙탈 카드 속지와 폴로 겹쳐 붙인다.



4. 카드 겉지와 속지를 예쁘게 장식한다.

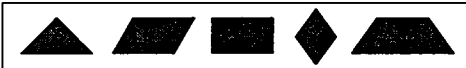
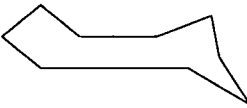
1. 참고 서적 및 문헌

① 김용 · 박명전, 수학 영재의 창의적 문제해결력 신장을 위한 학습자료 개발(2000), 한국교원대학교 석사학위논문, pp. 44-46

2. 관련 인터넷 사이트

① <http://user.chollian.net/~badang25/>

| | | | | |
|---|----------|----------|----|----|
| 9 | 프로그램의 유형 | 수학퍼즐 문제형 | 영역 | 도형 |
| | 주 제 | 탱그램 | | |

| | |
|---------------|--|
| <p>관련문제</p> | <p>◆ 오른쪽과 같이 정사각형 모양의 색종이를 선을 따라 자른 7조각을 모두 이용하여 윗변과 아랫변의 길이가 다른 사다리꼴을 만들려고 합니다. 만들 수 있는 사다리꼴은 모두 몇 가지입니까? (단, 돌리거나 뒤집어서 모양이 같은 것은 1가지로 생각합니다.)</p> <p><제8회 KME 한국수학학력평가(2003), 5단계, 29번></p> <p>◆ 다음 모양 조각을 한 번씩만 사용하여 주어진 도형을 덮었을 때, 사용하지 않은 모양 조각을 찾아 숫자를 쓰시오.</p>   <p><HME 해법수학학력평가(2003), 5학년 21번></p> |
| <p>관련 이야기</p> | <p>탱그램은 지혜놀이판 또는 탠그램으로도 불리워진다. 탠그램을 우리나라에서는 전래 놀이인 칠교놀이로 전해진다. 칠교놀이는 정사각형 모양을 잘라 만든 7개의 조각들로 도형 및 선, 동물, 기호, 촛대, 집, 배, 사람, 숫자 모양 등 만여 가지의 독창적인 모양을 만드는 게임이다.</p> <p>칠교놀이의 조각은 큰 직각이등변삼각형 2개, 작은 직각이등변삼각형 2개, 중간 크기의 직각이등변삼각형 1개, 작은 정사각형 1개, 평행사변형 1개의 5가지의 7개로 이루어져 있다. 조각의 모양과 개수는 무척 간단하지만 이것만으로 무궁무진하게 많은 모양을 만들 수 있다. 또, 여러 가지 다양한 모양들을 만들다 보면 숨어 있는 원리를 발견할 수 있는데, 일곱 개의 조각들은 각각 도형의 넓이와 변의 길이 사이가 일정한 비로 이루어져 있다.</p> <p>도형의 모습이 어떻게 될 지 머리 속으로 상상하면서 조각들을 맞추어 보자. 저절로 도형에 대한 구성력, 창의력, 직관력 등이 발달할 것이다.</p> |
| <p>학습목표</p> | <ol style="list-style-type: none"> 1. 탠그램 퍼즐 놀이를 통하여 탠그램 조각들을 조작하면서 도형의 모양과 넓이를 익힐 수 있다. 2. 탠그램을 활용하여 도형에서의 여러 가지 기본 개념과 성질을 발견할 수 있다. 3. 탠그램을 이용하여 도형의 넓이, 다각형의 둘레의 길이, 내각의 크기를 측정할 수 있다. 4. 탠그램을 이용하여 여러 가지 모양을 만들면서 수학의 즐거움을 느낄 수 있다. |
| <p>준비물</p> | <p>색종이, 가위, 자, 각도기, 풀, A4용지 여러 장, 색연필, TP지</p> |

♣ 씨뿌리기

① 탱그램의 역사



고대 중국의 퍼즐 게임인 탱그램은 지그소우(jigsaw 끼워 맞추어 본래의 그림을 만드는 어린이 장난감, 놀이, picture puzzle) 퍼즐의 한 종류이다.

이런 탱그램의 역사는 아주 오래되어, 중국에서는 5천년 전부터 즐겨왔다고 한다. (중국에서 5천년전 탄에 의하여, 각각 1000개의 모형을 수록한 탱그램 7권이 편찬되었다.)

탱그램의 목적은 45도나 90도 각도로 자른 각 변이 직선인 7개의 조각을 가지고 하나의 모형을 만드는 것이다. 수학자는 ‘그 단순한 그림들은 일정한 수의 평면기하학의 도형을 예시하는데는 아주 적합하다’고 말하고 있다.

한정된 같은 수의 조각을 가지고 어떤 새로운 독창적인 모형을 고안할 수 있는 것인가가 탱그램의 매력이다.

② 우리 나라의 칠교놀이

칠교놀이(탱그램)는 중국에서 5천년전부터 즐겨온 모양만들기 퍼즐 게임으로, 우리나라에도 전래되어 우리들의 조상들이 그 놀이를 즐겨한 것으로 알려져 있는 놀이이다. 칠교판이라고 하는 7개의 조각을 모두 사용하면서 사람, 동물, 기타 사물 등의 모양을 만들어 즐기는 놀이로 혼자 또는 여럿이 함께 할 수 있는 놀이이다. 우리나라에서는 ‘칠교해’라고 하는 책에 1000여 종에 달하는 모양을 만드는 법에 대해서 소개하고 있다고 한다.

칠교판은 칠교놀이를 위하여 만들어 쓰는 도구라 할 수 있다. 칠교판은 10cm인 정사각형을 잘라 만들며 모두 7조각으로 이루어져있다. 여러분들도 칠교판을 이용하여 다양한 모양을 만들어 보자. 때론 머리가 아프기도하고, 모양을 다 만들면 누군가가 ‘아! 그렇구나’, ‘아! 진짜 똑같다’라는 탄성이 절로 나올 것이다.

♣ 싹틔우기

탐구1 탱그램 조각으로 넓이 구하기

【문제 1】 탱그램의 가장 작은 정삼각형 조각을 ‘1’로 하였을 때, 이 정삼각형으로 각각의 탱그램 조각을 빈틈없이 채우면 넓이가 얼마나 되는지 알아봅시다.

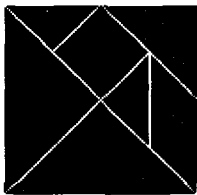
【문제 2】 탱그램의 가장 작은 정사각형 조각을 ‘1’로 하였을 때, 이 정사각형으로 각각의 탱그램 조각을 빈틈없이 채우면 넓이가 얼마나 되는지 알아봅시다.

【문제 3】 넓이가 같은 도형을 탱그램 조각을 이용하여 찾아봅시다.

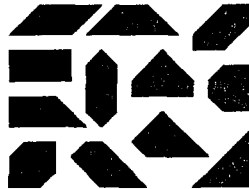
| 도형 | 정삼각형의 넓이를 1로 하였을 때 | 정삼각형의 넓이를 1로 하였을 때 |
|---------|--------------------|--------------------|
| 정사각형 | 2 | 1 |
| 작은삼각형 | 1 | 1/2 |
| 사다리꼴(1) | 3 | 1 1/2 |
| 중간삼각형 | 2 | 1 |
| 평행사변형 | 2 | 1 |
| 사다리꼴(2) | 6 | 3 |

탐구2 탱그램 조각으로 모양 만들기

【문제 1】 정사각형의 종이를 그림1과 같이 자르고 7조각을 모두 이용하여 그림2의 각각의 모양을 하나씩 만들어 보시오.



<그림1. 정사각형종이>

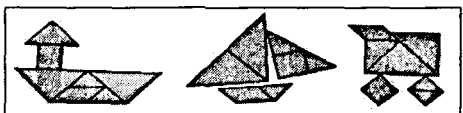
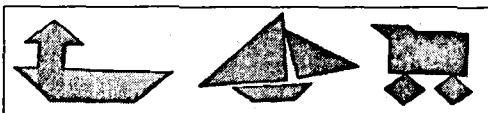


<그림2. 자른 종이를 이용해서 만든 도형>

【문제 2】 (문제 1) 에서 자른 종이를 이용하여 아래 그림3, 4, 5와 같이 만들어 보시오.



<그림3. 여우와 다람쥐>

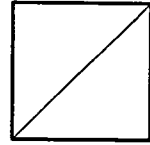


<그림4. 배와 유모차>



<그림5. 새>

탐구3 정사각형의 대각선 길이는 4cm입니다. 이 정사각형의 넓이를 구하여 보시오.



<활동 1> 대각선을 따라 오려 보시오.

<활동 2> 만들어진 2개의 삼각형을 이용하여 하나의 큰 삼각형을 만들어 보시오.

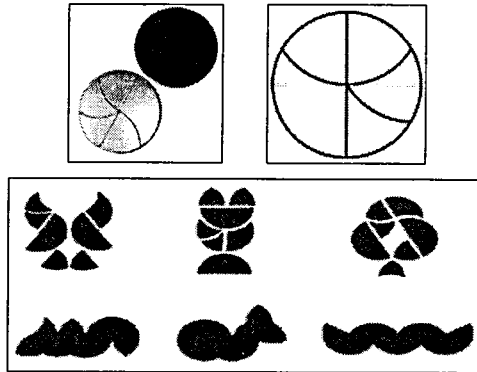
<활동 3> 큰 삼각형의 넓이를 정사각형의 넓이와 비교하여 보시오.

<활동 4> 이 정사각형의 넓이를 구하는 다른 방법이 있는지 생각하여 보시오.

꽃피우기

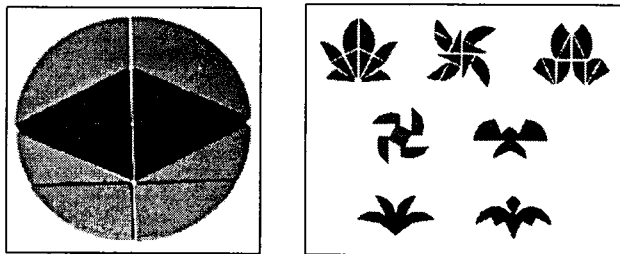
1 원형탱그램 만들기

탐구4 원을 2개를 잘라 만든 독특한 모양의 10개의 조각들을 맞추어 <그림9>와 같이 맞추어 보시오.



<그림9. 원형 탱그램 만들기>

탐구5 원을 잘라 만든 독특한 모양의 10개의 조각들로 <그림10>과 같이 형상들을 만들어 보시오.



<그림10. 원형퍼즐 맞추기>

1. 참고 서적 및 문헌

① 박명전, 수학 영재의 창의적 문제해결력 신장을 위한 학습자료 개발(2000), 한국교원대학교 석사학위논문, pp. 70-74

2. 관련 인터넷 사이트

① 수학사랑, <http://www.mathlove.com/>

② 바당선생의 신비로운 수학, <http://user.chollian.net/~badang25/>

다. 영재프로그램 학습 설문 결과

1) 연구방법

가) 영재 교육 프로그램을 A반(제주동초등학교 5-1반 : 33명)과 B반(제주동초등학교 5학년 수학을 클럽반 : 32명)으로 나누어 설문 조사하였다.

나) 2003년 3월부터 7월까지 약 5개월 정도 학습한 내용을 설문 조사하였다.

다) A반과 B반 모두 동일한 프로그램을 투입하였으나, A반은 수학수업시간마다 동기유발자료 및 심화활동 자료로 활용하였고, B반은 수학클럽활동 시간에 투입하였다.

2) 투입된 영재프로그램 설문 결과

가) 영재프로그램 학습은 다른 교과 학습 문제해결에 얼마나 도움이 되었나요?

| 구분 | 매우 도움이 되었다 | 도움이 되었다 | 보통이다 | 도움이 되지 않았다 | 전혀 도움이 되지 않았다 | 합 계 |
|-----|------------|---------|------|------------|---------------|-----|
| A반 | 23 | 7 | 2 | | | 65 |
| B반 | 24 | 9 | | | | |
| (%) | 72.3 | 24.6 | 3.1 | | | 100 |

나) 영재프로그램 학습은 경시문제 푸는 데 얼마나 도움이 되었나요?

| 구분 | 매우 도움이 되었다 | 도움이 되었다 | 보통이다 | 도움이 되지 않았다 | 전혀 도움이 되지 않았다 | 합 계 |
|-----|------------|---------|------|------------|---------------|-----|
| A반 | 8 | 12 | 13 | | | 65 |
| B반 | 20 | 12 | | | | |
| (%) | 43.1 | 36.9 | 20 | | | 100 |

다) 영재프로그램은 수학 학습에 얼마나 도움이 되었나요?

| 구분 | 매우 도움이 되었다 | 도움이 되었다 | 보통이다 | 도움이 되지 않았다 | 전혀 도움이 되지 않았다 | 합 계 |
|-----|------------|---------|------|------------|---------------|-----|
| A반 | 20 | 10 | 3 | | | 65 |
| B반 | 18 | 14 | | | | |
| (%) | 43.1 | 36.9 | 20 | | | 100 |

라) (다)번의 도움이 되었다면, 어떤 점에서 도움이 되었나요?

| 구분 | 동기 및 흥미 유발 | 경시문제 해결 | 협력학습 | 다양한 수학 체험 | 다양한 문제 해결력 | 합 계 |
|-----|------------|---------|------|-----------|------------|-----|
| A반 | 10 | 2 | 2 | 15 | 4 | 65 |
| B반 | 7 | 6 | 2 | 13 | 4 | |
| (%) | 26.1 | 12.3 | 6.2 | 43.1 | 12.3 | 100 |

마) 하나의 영재프로그램을 학습하는데는 어느 정도의 시간이 적당하다고 생각합니까?

| 구분 | 1시간 정도 | 2시간 정도 | 3시간 정도 | 4시간 정도 | 5시간 정도 | 합 계 |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|-----|
| A반 | 2 | 4 | 13 | 9 | 5 | 65 |
| B반 | | 3 | 15 | 11 | 3 | |
| (%) | 3.1 | 10.7 | 43.1 | 30.8 | 12.3 | 100 |

3) 설문 분석 결과

위 설문 결과는 제주동초등학교 5-1반 (33명)과 (수학창의력) 클럽반 (32명) 대상으로 영재프로그램 학습을 5개월 간의 학습 결과를 설문한 결과다. 비록 적은 인원을 갖고 설문 내용을 선불리 결론 내리기는 부적절하나, 시사하는 바를 몇 가지 간추려 보고자 한다.

첫째, 경시문제를 반복해서 문제를 해결하는 것 보다 다양한 활동과 체험을 통해 보다 원리를 파악하는 학습을 할 때 학습의 효과는 물론 다른 교과 학습에도 도움을 주고 있다.

둘째, 수학 학습에 많은 흥미를 주고 있으며, 교과서 이외의 다양한 체험을 통해 생각하는 수학 학습이 이루어질 수 있었다.

셋째, 수업시간에 수준을 낮추어 학습한다면 모든 아동을 대상으로 할 수가 있었으며, 수학에 관심이 많은 클럽반 아동들이 좀 더 적극적인 경향을 보였다.

라. 반성적 일지

영재 교육 프로그램을 학습한 후 아동들의 소감문을 쓰도록 하였다. 각 소감문들의 공통점은 나름대로 흥미와 동기유발에 관심이 많았고, 다양한 체험과 활동을 통해 수학 학습에 긍정적인 영향을 주었다.

반 성 적 일 지

제주특별자치도 5학년 2반23번 이정현)

※ 다시 생각하여 써 봅시다.

사이펀스키 삼각형이라고 할때 처음에는 삼각형의 한 줄을 라고 생각을 하였는데 지금은 어떤 도형인지 알수 있었다. 우리들이 열심히 노력을 하고 만들어낸 사이펀스키 삼각형이 5학년 1반 교실에서 자랑스럽게 전시되었다.

잠시 문제를 풀면서 어려웠던 적을 직접 만들어 보고 체험하는 동안에 시골 그 윤리를 찾을수 있었고 국제 놀이가 더 쉬웠다.

내가 어른 되서 미래에는 사이펀스키 삼각형을 이용하여 삼각형 건물을 만들어 보고 싶기도 하다.

반 성 적 일 지

제주특별자치도 5학년 1반28번 이주름)

※ 다시 생각하여 써 봅시다.

나는 오늘 탐구전에 대해서 배웠다. 처음에는 탐구만들기가 어렵다. 경험사항이 잘 이해된다. 그런데 어떤번 배웠다. 보니까. 경험서 보면 만들기가 쉬웠다. 삼각형 하나를 골라 이 된다. 이 모양이 만들어지니까 다른 모양도 쉽게 만들어졌다. 또 나는 원형모형을 만들어 보았다. 원형모형을 만들 만들어 보았다. 그 모양은 아까와 비슷하게 보였다. 그 원형을 알면 계속 노력하는 것이다. 어떤 사물 사각, 물 등을 만들어서 원형의 모양을 이해할 수 있었다. 원형도 탐구할 계속 진행 있다. 또한 다양한 사물을 내 손으로 만들어 보았다. 탐구원을 계속으로 하고 수학 시간이 탐구원을 만들어 행하면 좋겠다.

IV. 결론 및 제언

1. 결론

현재 실시되고 있는 수학경시대회의 실정으로는 영재의 특성을 고려하고, 영재성을 키워주기에는 다소 부족한 점이 있어 수학 창의적 문제해결력을 신장시켜줄 수 있는 학습 자료의 개발이 시급하다. 그래서 본 논문에서는 초등수학경시대회 기출문제를 분석하여, 일선 초등학교 현장에서 실시되고 있는 영재교육을 활성화시킬 수 있는 방안을 연구하였다.

제주동초등학교 5-1반 (33명)과 (수학창의력) 클럽반 (32명) 대상으로 영재프로그램 학습을 약 5개월 간의 학습 결과를 토대로 결론을 이끌어 내기는 다소 부적절하겠지만, 시사하는 바를 살펴보면 다음과 같다.

첫째, 경시문제를 반복해서 문제를 해결하는 것 보다 다양한 활동과 체험을 통해 보다 원리를 파악하는 학습을 할 때 학습의 효과는 물론 다른 교과 학습에도 도움을 주고 있다.

둘째, 수학 학습에 많은 흥미를 주고 있으며, 교과서 이외의 다양한 체험을 통해 생각하는 수학 학습이 이루어질 수 있었다.

셋째, 수업시간에 수준을 낮추어 학습한다면 모든 아동을 대상으로 할 수가 있었으며, 수학에 관심이 많은 클럽반 아동들이 좀 더 적극적인 경향을 보였다.

그리고 반성적 일지를 통해 공통적인 요소를 살펴보면 문제풀이식 지도보다는 다양한 체험 활동을 통해 보다 쉽게 이해되고 있으며, 수학에 보다 친밀감을 느끼는 것을 알 수 있었다.

따라서 본 연구에서 제시된 영재학습자료는 초등학교 수학영재를 위한 학습자료로서 학생들에게 흥미있고 내적 동기를 유발시킬 수 있고, 더 나아가 고급사고력을 키울 수 있을 것으로 보고 영재교육 현장은 물론 일선의 수학과 교육과정에서도 효과적으로 활용할 수 있을 것으로 기대된다.

2. 제언

끝으로 본 연구를 통하여 다음 몇 가지를 제언하고자 한다.

첫째, 수학 영재 학습 자료는 기존의 경시대회나 올림피아드를 목적으로 하는 문제풀이식 지도보다는 다양한 체험 활동을 통해서 창의성을 신장시킬 수 있는 방향으로 전환되어야 하고, 또한 현재 영재교육에 대한 기초 연구가 어느 정도 이루어져 있기 때문에 이제는 현장에서 직접 사용할 수 있는 수학 영재 학습 자료의 개발이 시급하다.

둘째, 수학 영재 학습 자료의 연계성에 따라 초등학교 저학년용 학습 자료와 중학년용 학습 자료가 함께 개발되어야 할 것이다.

셋째, 개발된 학습 자료를 효과적으로 지도할 수 있도록 영재교육 담당 교원의 자질향상을 위한 교육 및 연수를 정기적으로 실시하여야 할 것이다.

참 고 문 헌

- 교육부 (1997). 수학과 교육과정, 교육부 고시 제 1997-15호 별책8.
- 장영숙 · 강숙희 · 박숙희 · 정태희 · 임희준 (2000). 영재 교수-학습 자료 개발 연구, 한국교육개발원.
- 구자역 · 김홍원 · 박성익 · 안미숙 · 이순주 · 조석희 (2002). 동서양 주요국가들의 영재교육, 서울:문음사.
- 남승인 (1998). 초등학교 수학 영재 지도에 관한 고찰, 한국수학교육학회지 시리즈F, <수학교육 세미나> 제2집.
- 대한수학회 (2002). 한국수학올림피아드(KMO) 6학년 (문제지).
- 디딤돌 (2002). 전국수학학력평가(NMC) 6학년 (문제지).
- 박명전 (2000). 수학 영재 창의적 문제해결력 신장을 위한 학습 자료 개발, 한국교원대학교대학원 석사학위 논문.

- 송상헌 (1996). 수학영재교육 프로그램을 위한 수학적 영재성의 정의와 판별의 이론적 고찰, 대한수학교육학회 논문집, 제6권 제2호.
- _____ (1998). 수학영재성 측정과 판별에 관한 연구, 서울대학교대학원 박사학위 논문.
- 아주대학교 과학영재교육센터 (1998). 수학영재 발굴에 관한 연구, 아주대학교 과학영재교육센터 교육자료집.
- 이종욱 (1999). 초등학교 수학영재의 확산적 사고 발달을 위한 학습자료 개발 연구, 한국교원대학교 대학원 석사학위 논문.
- 장곡초등학교 (2002). 영재교육 심화자료·6학년 수학 수학사 탐험.
- 제주도교육과학연구원 (2000)(2001)(2002). 제주도학생수학·과학경시대회 (문제지).
- 조석희·박경숙·김홍원·김명숙(1996). 영재교육의 이론과 실제, 한국교육개발원 수탁연구 CR96-28, 한국교육개발원.
- 천재교육 (2002). 해법수학경시대회(HME) 6학년 (문제지).
- 한국수학교육평가원 (2000)(2001)(2002). 한국수학인증시험(KMC) 5학년~6학년 (문제지).
- 한국수학자격검정원 (2002). 제3회 한국수학자격검정(KMT) 5가~6가급 (문제지).
- 한국수학학력평가연구원 (2000)(2001)(2002). 초·중·고 한국수학학력평가(KME) 결과보고서.