韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 15집, 2003. 1. 23-28.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 15, Jan. 2003. 23-28.

교사양성대학 수학교육과 "해석학" 강좌 운영
-교육과정 및 교수학습 방법개발과 관련한-

이 병 수 (경성대학교)

실수계와 n-차원 벡터 공간을 대수적 특성, 순서적 특성 그리고 위상적 특성을 중심으로 전개하고, 실변수 실가 함수와 n-차원 벡터 공간을 정의역으로 하는 실가함수를 연속성 (미분가능성), 단조성 그리고 볼록성을 중심으로 내용을 다룬다. 특히 실생활과 관련하여 이론을 전개하여 학습을 지도할 수 있는 교육과정을 개발하고, 직관적인 사고와 수리 논리적인 사고의 적절한 배합을 통해 학습자들이 적극적으로 학습에 임할 수 있는 교수 학습 방법을 개발하는 것을 목적으로 한다.

I. 서 론

일반적으로 수학 교육 체계의 네 가지 구성 요소로 수학외 교사와 학생 그리고 교육공학의 중요성을 지적하고 있다(Gavalas, 2000). 그 중에서도 수학 교육에서 가장 중요한 일은 무엇보다도 학습의 주체인 학생과 학습지도의 주체이자 학습 환경의 보조자인 교사의 역할이다. 따라서 우리가 가장 중점적으로 다루어야 할 내용은 교사와 학생간의 인간 관계에서 이루어지는 학습 과정 그 자체라고 할 수 있다. 교사와 학생간의 학습과 관련된 인간관계는 보통 강의와 함께 질문과 답변으로 이루어진다. 학생이 교사에게 행하는 질문과 교사가 학생에게 행하는 질문 및 그 질문에 따른 답변이 두 사람간의 수학적 인간 관계이다. 수학 강의의 한 축인 교사의 학생을 향한 질문의 양식이나 수준 혹은 형식에 따라 학생들의 수학에 대한 개념의 이해나 수학의 구성과정에 대한 이해가 달라질 수 있다(Mason, 2000). 교사의 질문은 학생들로 하여금 수학적 개념이나 기법 혹은 방법의 이해를 돕고 또한 그러한 것들을 이해한 정도를 평가하는데 있어서 교육적 도구의 역할을 한다. 반면 학생들의 질문은 교사로 하여금 학생들의 이해 수준을 직접 느끼게 하고, 자신의 강의 내용의 수준과 방법을 스스로 평가하게 하며, 그에 따른 개선책을 강구하게 만든다. 이러한 느낌과 평가 그리고 개선책의 강구는 학습 현장에서 즉시 이루어지므로, 수학교육에서 무엇보다도 중요한 것은 학생들의 직접적인 질문이며 또한 그러한 질문을 자연스럽게 유도하고 이끌어 나가는 것이 교사들의 가장 중요한 학습 환경 조성이다. 또한, 학생들이 그룹을 지어 그들의 생각과 의문점들에 대한 의견을 교환하고 그들 스스로 동의하거나 또는 동의하지 않으면서 공동의 의견과 공동의 생각을 만들어 낸다면 수학 학습은 더욱 풍부해질 것이다(Lloyd, 1999; Richards, 1991; Slavin, 1990; Voigt, 1996). 따라서 학생들이 스스로 혹은 교사의 지도 아래 적극적으로 3 내지 5명 정도의 그룹을 짜서 서로 토론하고 그 결과를

공동의 이름으로 발표하게 하는 것은 학습 증진과 인간 관계의 형성에 많은 도움이 될 것이다. 한편, 수학교육은 Zulkardi(2002)의 의견과 같이 실세계(real world)와 관련된 내용을 지도하는 것과 함께 학생들이 배우는 수학적 내용을 스스로 실생활 문제 상황(real-problem situations)으로 상상하고 해결할 수 있게 해야 한다. 수학교육 연구는 보통 순수적인 면과 응용적인 면의 두 가지 측면을 가지고 있다. 수학적인 사고와 수학적인 지도 그리고 수학적인 학습의 본성을 이해하는 것이 수학교육의 순수한 일면이고, 또 하나는 그러한 이해를 수학 강의의 개선에 활용하는 것이 수학교육의 응용적인 일면이다(Schoenfeld, 2000). 교사 양성 대학은 전문적인 수학자의 양성이 목적이 아니고 유능하고 바람직한 학습지도자의 양성이 목적이므로, 수학적 내용의 많고 적음이 문제가 아니고 수학적 내용의 전달 방법과 전달 내용이 그 무엇보다도 더 중요하다. 따라서 Cohen(2001)의 지적처럼 교사는 지도하고 있는 수학 내용을 잘 알고 있어야 할 뿐 만 아니라, 이전 수준의 학습 내용과 이후 수준의 학습 내용을 심도있게 알고 있어야 한다. 아울러 그는 지도 내용의 타 분야에의 응용 정도도 훤히 알고 있어야 한다고 지적하고 있다. 예비 교사가 습관적으로 수학적 사고를 하는 마음 가짐을 가지고 유연하고 상호 활동적인 학습지도를 할 수 있는 능력을 기르도록 지도해야 한다(Krantz, 2001). 그러기 위해서는 예비교사로 하여금 다양한 효과적인 학습 지도 스타일을 경험할 수 있도록 해야 하고 활동적인 학습 모형에 참여시켜야 한다.

한편, 미적분학은 선수과목인 precalculus에 무한개념을 포함한 내용으로서, 시간과 공간을 무한히 분할하는 무한소 개념이 주류인 미분학과 무한합에 관련된 무한대 개념이 주류인 적분학의 통합과목이다. 이러한 미적분학은 사실상 실변수 실가함수 $f: R \to R$를 유계폐구간 $[a, b]$에서 연속성을, 유계개구간 (a, b)에서 미분가능성을 가정하면서 다루고 있다(예를 들면 최대치·최소치 정리, 평균치 정리 등등...). 여기서 실제적으로 다루어지고 있는 함수의 정의역인 유계폐구간 $[a, b]$와 유계개구간 (a, b)는 연결 집합이고 또한 순서를 가지고 있는 무한집합이다. 더군다나 유계폐구간 $[a, b]$는 콤팩트(compact) 집합이다. 해석학에서는 실수계 R의 세 가지 기본축이라고 할 수 있는 대수성(볼록성을 포함), 순서성, 위상성을 기본으로 실수계 R의 수학적 특성을 다루고 있으며, 또한 실변수 실가함수 $f: R \to R$의 연속성, 단조성, 미분가능성, 적분가능성, 볼록성 등을 다루고 있다. 더군다나 n-차원 벡터공간 R^n의 대수성(볼록성을 포함) 및 위상성과 n-차원 벡터공간 R^n에서 정의된 실가함수 $f: R^n \to R$의 연속성, 단조성, 미분가능성, 적분가능성, 볼록성 등과 같은 실해석학에 관한 내용을 일반적인 거리공간에서 정의된 함수들로 확장하여 심화 과정으로 다룰 수 있다. 이러한 해석학의 내용은 모두 복소해석학, 함수해석학의 연구로 바로 연결되며, 비선형해석학의 연구로 이어져 부동점이론, 최적화이론, 게임이론, 균형이론 등의 여러 응용분야로 연결된다.

본 해석학교육의 교육 과정 및 교수학습 방법개발"과 관련한 강좌의 운영에서는 교사가 학생들의 질문을 유도하여 교사와 학생들의 충분한 토론의 기회를 갖는 학습 상황을 연출하는 방향으로 학습지도를 전개하며, 직관력을 최대한 활용하는 입장에서 논리적인 수학적 사고 구조의 형성을 도우며, 학습 내용을 실생활의 문제와 관련시켜 지도할 수 있게 하고, 또 학생들이 자연스럽게 수학적 내용

을 실생활로 연계시켜 사유하면서 끌어 나가는데 도움을 줄 수 있는 보조자로써의 역할을 하는 것을 목적으로 한다.

II. 연구 방향

1. 스스로 수학을 즐기고 수학의 본질을 이해하는 것을 돕는 교육과정 및 교수·학습 방법 개발
2. 수학의 유용성을 알고 활용하게 하는 교육과정 및 교수·학습 방법 개발
3. 실생활에서 수학을 발견하고, 수학적 내용을 스스로 실생활의 문제 상황으로 상상하고 해결할 수 있는 능력을 양성하는 교육과정 및 교수·학습 방법 개발
4. 초·중등 교육과정과 연계된 교육과정 및 교수·학습 방법 개발
5. 수학의 각 영역간에 연계성이 강조된 종합화된 교육 과정 및 교수·학습 방법 개발
6. 지적 흥미를 유발하여 자율적으로 탐구하게 하는 교육 과정 및 교수·학습 방법 개발
7. 일반 교육학의 강좌를 수학 교육학에 대폭 흡수한 교육 과정 및 교수·학습 방법 개발
8. 교육 공학이 적극적으로 적용되는 교육 과정 및 교수·학습 방법 개발
9. 교사가 학생들을 가르칠 때 사용하기를 바라는 그러한 수업 모형으로 미래의 교사를 양성할 수 있도록 교육 과정 및 교수·학습 방법 개발
10. 실생활을 수학적으로 모델링할 수 있는 능력을 배양하는 교육과정 및 교수·학습 방법 개발
11. 소그룹으로 공동 학습을 하고 공동 결과를 생산하게 하는 교육 과정 및 교수·학습 방법 개발

III. 연구 내용

직관적인 사고와 퍼지적 사고를 유도하면서 논리적 사고와 분석적 사고를 발전시킬 수 있고, 여러 함수들을 실생활에 활용 및 응용할 수 있으며, 실생활에서의 상황을 수학적으로 모델링할 수 있는 능력을 쌓는 방향으로 교육과정 및 학습 방법을 개발한다.

1. R의 세 축인 대수성(볼록성), 순서성, 위상성을 중심으로 R의 수학적 특성을 전개한다.
2. R^n의 대수성(볼록성), 위상성을 중심으로 R^n의 수학적 특성을 전개한다.
3. $f: R \to R$의 연속성, 단조성, 볼록성, 미분가능성, 적분가능성 등의 개념을 중심으로 실변수 실가 함수 f의 수학적 특성을 다루며 각 함수들의 공간을 구별해서 다룬다.
4. $f: R^n \to R$의 연속성, 단조성, 볼록성, 미분가능성, 적분가능성 등의 개념을 중심으로 실가 함수 f의 수학적 특성을 다루며 각 함수들의 공간을 구별해서 다룬다.
5. 각 함수들의 응용성을 다룬다.

1. 강좌명

해석학 I 및 해석학 II

2. 선수과목

미적분학

3. 강좌 소개

직관적인 실수계는 시간과 공간 그리고 질량, 온도, 기압 등과 같이 연속적으로 변하는 양을 측정하기 위해 사용된 수계(number system)을 말하며, 19세기 후반에 만족할 만한 형식적인 수학적 체계(formal mathematical system)가 만들어질 때까지 많은 수학자들에 의해 사용되었다. 실제로 형식적 실수계 R은 수학에서 다루는 수많은 종류의 공간의 대표적인 하나의 예이다. 일반적으로 실수계의 도입은 실수계를 직접 구성하는 구성적인 방법과 실수계를 구성하지 않고 공리적으로 실수계의 존재성을 인정하는 공리적 방법의 두 가지로 나누어 생각할 수 있다. 실수계의 구성적인 정의 방법은 자연수를 피애노Peano 공리적으로 정의한 후 정수 유리수의 순서로 구성을 확대한 후 최종적으로 실수계를 구성하는 것이다. 반면, 공리적인 정의 방법은 공집합이 아닌 한 집합 위에 먼저 두 개의 연산(우리는 흔히 이 두 개의 연산을 덧셈 연산과 곱셈 연산이라고 부른다)을 정의하고 그 집합이 위의 서로 다른 두 연산에 의해 닫혀 있음을 가정한다. 그리고 체의 공리, 순서 공리, 완비성 공리를 만족할 때, 그 집합을 실수계라고 명명하는 것이다. 구성적인 방법은 집합론에 대한 깊은 이해를 필요로 함으로, 현대 수학 이론을 전개하기 위해서 실수계를 도입할 때는 보통 공리적인 방법이 이용된다. 그러나 공리적인 방법으로 실수계를 정의할 때 실재로 실수계가 존재하는가? 하는 존재성의 문제와 만일 존재한다면, 그것은 단 하나 뿐인가? 하는 유일성의 문제를 마음에 두어야 한다.

4. 목차

<해석학 I>

(1) 기본적인 내용

집합과 함수 그리고 이항 연산, 무한집합, 유리수계를 다룬다.

(2) 실수계의 특성

코씨 수열, 실수계의 대수성(볼록성), 순서성, 완비성과 함께 존재성을 다룬다.

(3) 실직선의 위상

실수계의 위상적 성질을 다룬다.

(4) 수열과 무한 급수

수열의 수렴성, 수열공간, 급수의 수렴성, 수렴판정법 등을 다룬다.

(5) 연속 함수

연속 함수의 특성, 연속 함수들의 공간을 다룬다.

(6) 미분가능한 함수

미분가능한 함수의 특성과 미분가능한 함수들의 공간을 다룬다.

(7) 적분가능한 함수

적분가능한 함수의 특성과 적분가능한 함수들의 공간을 다룬다.

(8) 함수열

함수열의 수렴성, 연속함수열, 미분가능한 함수열, 적분가능한 함수열을 다루며, Weierstrass정리를 소개한다.

(9) 단조함수와 유계변동함수

단조함수와 유계변동함수를 다룬다.

<해석학 II>

(1) R^n의 대수성

벡터 공간 R^n 상에서의 놈, 거리, 내·외적을 다룬다.

(2) R^n에서의 선형사상

행렬과 행렬식, 거넬 등을 다루며 응용으로 게임이론, 균형이론을 소개한다.

(3) R^n의 위상성

개집합·폐집합을 소개하고 수열과 콤팩트 집합을 다룬다.

(4) R^n상에서의 연속함수

R^n상에서 정의된 실가함수의 연속성을 다루며 응용으로 부동점 이론을 소개한다.

(5) R^n상에서의 미분가능성

미분가능성과 접평면, 역함수 정리, 극대값 정리 등을 다루며, 응용으로 최적화 이론을 소개한다.

(6) R^n상에서의 적분가능성

리만 적분가능성, 반복적분, 변수변환 등을 다룬다

(7) 다변수 미적분학의 기본정리

Oriented 곡선 및 평면을 소개하고, Green, Gauss, Stoke 정리 등을 다룬다.

5. 참고 문헌

가. 정동명·조승제 (1983). 실해석학개론, 서울:이우출판사.

나. Bartle, R.G. (1982). Introduction to Real Analysis, New York, John Wiley & Sons Inc..

다. Strichartz, R.S. (1995). The Way of Analysis, Boston, Jones and Bartlett Publishers.

라. Wade, W.R. (1995). An Introduction to Analysis, New Jersey, Prentice-Hall, Inc..

6. 필독서

가. 신현용 역, 우리 수학자 모두는 약간 미친 겁니다, 승산, 1999.

나. 신현용, 송영조 역, 무한의 신비, 승산, 2002.

다. 신현용 · 이종인 · 승영조 역, 뷰티풀 마인드, 승산, 2002.

7. 평가 기준

적극적인 발표와 토론에 참가하는 것을 기준으로 한 평가 비율은 다음과 같다.

중간 및 기말평가 : 각 30%, 구두 시험 : 10%, 발표와 토론 : 30%, 출석 : 10%

참 고 문 헌

American Mathematical Society (2001). *Two reactions to the mathematical eduaction of teachers,* (By Cohen, A.), Notices of the AMS, pp.985-988.

American Mathematical Society (2001). *Two reactions to the mathematical eduaction of teachers.* (By Krantz, S.G.), Notices of the AMS, pp.989-991.

Gavalas, D. (2000). *Study of the 'teaching system' according to systems theory.* Int. J. Math. Educ. Sci. Technol. **31(2)**, pp.261-268.

Lloyd, G.M. (1999). Two teachers' conceptions of a reform-oriented curriculum: Implications for mathematicst teacher development. *Journal of Mathematics Teacher Education* **2**, pp.227-252.

Mason, J. (2000). *Asking mathematical questions mathematicall,* Int. J. Math. Educ. Sci. Technol. **31(1)**, pp.97-111.

Richards, J. (1991). *Mathematical discussions.* In E. von Glasersfeld (Ed.., Radical constructivism in mathematics education. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Schoenfeld, A.H. (2000). *Purposes and Methods of Research in Mathematics Education.* Notices of the AMS, pp.641-649.

Slavin, R. (1990). Research on cooperative learning: Consensus and controversy. *Educational Leadership* **47**, pp.52-54.

Voigt, J. (1996). Negotiation of mathematical meaning in classroom process: Social interaction and learning mathematics. In L.P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G.A. Goldin & B. Greer(Eds.), *Theories of mathematical learning.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. pp.21-50.

Zulkardi (2002). *How to design mathematis lessons based on the realistic approach?* RME. Literature Review, http://www.geocities.com/raluilma/rme.html.