韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 15집, 2003. 1. 153-159.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 15, Jan. 2003. 153-159.

문제해결을 통한 수학적 일반성의 발견

김 용 대 (청주교육대학교 강사)

수학 학습의 목표를 수학적 사고력의 신장이라는 측면에서 보았을 때 이를 위하여 문제에 대한 다양한 해법을 찾는 활동은 중요하다. 문제에 대한 다양한 접근은 문제해결의 전략을 학습시키고 사고의 유연성을 길러줄 수 있는 방법이 된다. 문제에 대한 다양한 해법을 찾는 과정에서 이미 알고 있는 지식이 어떻게 응용되는지를 알게 된다. 특히 기하 문제에 대한 다양한 접근은 문제해결의 전략을 학습시킬 수 있는 좋은 예가 된다.
본고에서는 문제해결을 통한 수학적 일반성을 발견하기 위한 방법으로서 문제에 대한 다양한 해법을 연역과 귀납에 의하여 일반화하는 과정을 탐색하고자 한다. 특히 수학 문제에 대한 다양한 해법을 찾는 것은 문제해결 전략으로서 뿐만 아니라 창의적 사고의 신장 측면에서 시사점을 던져준다.

Ⅰ. 들어가는 말

'수학은 무엇인가?'에 대한 논의는 대체적으로 유클리드 식의 체계적이고 연역적인 과학으로서의 수학의 측면과 실험적이고 귀납적인 과학으로서의 수학의 측면으로 구분된다. 그리고 '수학을 왜 배워야 하는가?'에 대한 논의는 '수학적 사고력을 향상시킨다'는 것으로 수렴된다. 수학적 사고는 크게 수학의 내용에 대한 사고와 수학의 방법에 대한 사고로 분류된다. 그런데 수학의 연역적·귀납적 측면과 수학적 사고의 내용적·방법적 측면들은 서로 밀접한 관련성을 지닌다.

인간의 사고는 문제 의식에서 시작된다고 한다. 주어진 문제를 해결하기 위해서는 분명한 목적을 지닌 의미 있는 사고를 필요로 한다. NCTM(2000)의 학교 수학을 위한 원리와 규준에서도 '학생들은 문제해결을 통한 수학을 학습함으로써 수학적으로 사고하는 방법을 획득해야 한다.'고 주장한다. 또한 박한식(1994)은 수학과 교육과정의 기본적인 생각의 하나로서 문제에 대한 여러 가지 해법의 중요성을 강조하고 있다. 그 이유는 개성이 각기 다른 학생들을 지도하는데, 어느 한 가지 방법만을 학생들에게 강요하는 것은 옳지 않기 때문이다. 따라서 다양한 학생을 지도하는데 있어서는 어떤 한 문제에 대한 다양한 해법을 수학 교사는 미리 알고 있어야 한다는 것이다.

그런데, 수학 문제의 대부분은 귀납이나 연역에 의하여 접근된다. 특히 이러한 귀납이나 연역의 방법은 문제를 해결하거나 증명을 하는데 있어서 중요한 역할을 한다. 일반적으로 연역이나 귀납에 의하여 일반화된 수학적 지식을 수학적 일반성이라고 한다. 수학 학습의 목표를 수학적 사고력의 신장이라는 측면에서 보았을 때 학생들의 수학적 일반성에 대한 이해력을 높이는 방법으로서 문제에 대한 다양한 해법을 찾는 활동의 필요성이 생긴다.

본고에서는 문제해결을 통한 수학적 일반성을 발견하기 위한 방법으로서 문제에 대한 다양한 해법을 연역과 귀납에 의하여 일반화하는 과정을 탐색하고자 한다. 특히 수학 문제에 대한 다양한 해법을 찾는 것은 문제해결 전략으로서 뿐만 아니라 창의적 사고의 신장 측면에서 시사점을 던져준다.

Ⅱ. 문제해결과 일반화

1. 다양한 해법을 통한 문제해결

문제를 해결하기 위해서는 여러 가지 측면에서 바라보아야 한다. 그리고 문제를 해결하는 데는 여러 가지 종류의 보조 요소가 있다. 특히 기하 문제를 풀 때에는 그림에 적절한 보조선을 도입할 수 있다. 예를 들어, 해결하고자 하는 문제가 기하 문제이고 전에 해결한 관련 문제가 삼각형에 관한 것이라고 하자. 그러나 주어진 도형에는 삼각형이 없는 경우, 회상한 문제를 어떻게든 이용하려면 삼각형을 생각해야 한다. 그러므로 그림에 적절한 보조선을 그어서 삼각형의 성질을 도입해야 한다. 이런 경우에 보조선을 어떻게 긋는가에 따라 문제에 대한 다양한 해법이 나타날 수 있다. Stanic & Kilpatrick(1989)에 의하면, 문제에 대한 다양한 해법을 찾는 것은 문제 상황 없이 원리만을 지도하는 것보다 훨씬 더 동기유발적인 면이 높다. Schoenfeld(1992)는 문제해결 과제를 통한 탐구 중심의 수학 지도는 학생들의 수학에 대한 좀 더 창의적인 사고 방법을 계발시키는데 도움을 준다고 한다. 또한 주어진 상황에서 문제를 만들어 봄으로써 사고의 유연성이 길러질 뿐만 아니라 주어진 문제에 대한 다양한 해법이나 해를 찾는 활동을 통해 창의적인 유연성을 기를 수 있다고 한다.

이것으로 볼 때, 수학 문제의 해결에서 다양한 해법을 찾는 것은 중요한 부분이 된다.

2. 귀납이나 연역을 통한 일반화

일반화는 수학적 사고와 수학적 문제해결의 중요한 요소가 된다. 수학 문제 가운데는 일반적인 문제가 보다 해결하기 쉬운 경우를 볼 수 있다. 즉, 특수한 문제를 푸는 성공의 열쇠는 일반적인 문제를 생각해 내는 것이다. 따라서, 일반적인 문제를 해결하는 것이 특수한 문제를 해결하기 위한 수단으로 제공되어지기도 한다. 특히 귀납적 사고는 창의성의 측면에서 보아 중요한 사고방법이다. 귀납적 사고에는 실제로 다음의 두 경우가 있다(박한식 외, 1986).

◇ 몇 가지의 개별적, 특수한 사실에서 출발하여 그들에 공통인 보편적인 성질을 예측하고 유도한다(예를 들어, 몇 개의 삼각형의 내각의 크기의 합에서 임의의 삼각형에 대한 내각의 크기의 합을 예측한다.).

◇ 어떤 사실의 부분에 관한 성질이나 방법에서 전체에 관한 성질이나 방법을 예측하고 유도한다(예를 들어, 삼각형의 내각의 크기의 합, 사각형의 내각의 크기의 합, 오각형의 내각의 크기의 합에서 일반적으로 n각형의 내각의 크기의 합을 예측한다.).

일반적으로 연역적 방법에 의한 발견은 논리적 추론 능력을 요구하고, 귀납적 방법에 의한 발견은

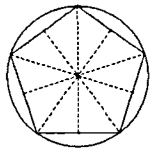
규칙성을 찾고 일반화하는 능력을 요구한다.

Ⅲ. 수학적 일반성의 발견

1. 정다각형의 성질

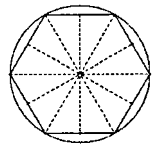
변의 길이가 모두 같고 각의 크기도 모두 같은 다각형을 정다각형이라 한다. 꼭지점의 수가 모두 같은 정다각형은 서로 닮은꼴이다. 정다각형은 외접원을 가지며, 그들은 공통의 중심을 가지고 있다.

첫째, 정오각형의 경우를 살펴보자. 오른쪽 [그림 1]과 같이 정오각형의 외접원의 중심을 5개의 꼭지점에 연결하면, 5개의 이등변삼각형이 생긴다. 각 이등변삼각형의 꼭지각은 72° 이고 두 개의 밑각을 더하면 108° 이다. 그리고 정오각형은 외접원의 중심을 지나는 5개의 대칭축을 가지고 있다. 그 각 대칭축은 꼭지점과 그 대변의 중점을 지난다.



<그림 1>

둘째, 정육각형의 경우를 살펴보자. 오른쪽 [그림 2]와 같이 정육각형의 외접원의 중심을 6개의 꼭지점에 연결하면, 6개의 정삼각형이 생긴다. 각 정삼각형의 꼭지각은 60° 이고 두 개의 밑각을 더하면 120° 이다. 그리고 정육각형은 외접원의 중심을 지나는 6개의 대칭축을 가지고 있다. 이들 중 3개는 서로 마주보는 꼭지점을 연결한 것이고, 나머지 3개는 서로 마주보는 변의 중심을 연결한 것이다.



<그림 2>

이것을 귀납적으로 일반화하면, 정 n각형의 외접원의 중심을 n개의 꼭지점에 연결하면 n개의 이등변삼각형이 생긴다. 각 삼각형의 꼭지각은 $(360° \div n)$이다. 그리고 두 밑각의 합은 정다각형의 한 내각의 크기가 된다. 즉, $180° - \frac{360°}{n} = 180° \times \frac{n-2}{n}$ 이다. 그런데 짝수개의 꼭지점을 가진 정다각형은 외접원의 중심에 관하여 점대칭이다. 짝수개의 꼭지점을 가진 정다각형은 n개의 대칭축을 가지고 있다. 이들 중 ($n \div 2$)개는 서로 마주보는 꼭지점을 연결한 것이고, 나머지 ($n \div 2$)개는 서로 마주보는 변의 중심을 연결한 것이다. 그리고 홀수개의 꼭지점을 가진 정다각형도 n개의 대칭축을 가지는데 그 각 대칭축은 꼭지점과 그 대변의 중심을 지난다.

2. 정 n각형의 한 내각의 크기를 구하는 다양한 방법

일반적으로 n각형의 내각의 크기의 합이 $180° \times (n-2)$이므로 정 n각형의 한 내각의 크기 a는 $a = \frac{1}{n} \times 180° \times (n-2) = 180° - \frac{360°}{n}$ 로 구해진다. 이를테면, 오각형의 내각의 크기의 합이 $180° \times (5-2) = 540°$ 이므로 정오각형의 한 내각의 크기는 $\frac{180° \times (5-2)}{5} = 108°$ 로 얻어진다.

여기서는 역으로 정오각형의 한 내각의 크기를 연역적으로 구하는 방법을 이용하여 정 n각형의 한 내각의 크기를 귀납적으로 일반화하는 다양한 방법을 찾아본다.

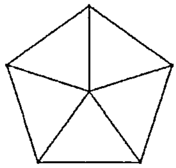
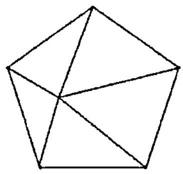
또한 정오각형의 내부의 한 점을 이용한 방법은 다음과 같다(<표 1> 참조).

여기서 방법 ②를 귀납적으로 일반화하면, 정n각형의 내부에 한 점 H를 잡고 이 점을 n개의 꼭지점과 연결시키면 n개의 삼각형이 생긴다. 여기서 n개의 삼각형의 내각의 총합과 정 n각형의 한 내각의 크기를 a 사이의 관계는 $n\times 180^\circ = na+360^\circ$ 이므로

$$a=180^\circ-\frac{360^\circ}{n}$$

를 얻게 된다.

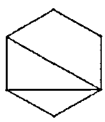
<표 1> 내부의 한 점을 이용한 방법

방법	그림
① 정오각형의 무게중심과 각 꼭지점을 연결하면 다섯 개의 합동인 이등변삼각형이 생긴다. 삼각형의 꼭지각의 크기를 b, 정오각형의 한 내각의 크기를 a(삼각형의 밑각은 $\frac{a}{2}$)라면, $b=360^\circ \div 5=72^\circ$ 이고 $b+\frac{a}{2}+\frac{a}{2}=180^\circ$ 가 된다. 여기서 $b+a=180^\circ$ 이 된다. 그러므로 $a=108^\circ$ 이다.	
② 정오각형 내의 임의의 한 점에서 각 꼭지점을 연결하면 다섯 개의 삼각형이 생긴다. 정오각형의 한 내각의 크기를 a라 하면, 다섯 개의 삼각형의 내각의 총합과 정오각형의 한 내각 사이의 관계는 $5\times 180^\circ=5a+360^\circ$ 이 된다. 그러므로 $a=108^\circ$ 이다.	

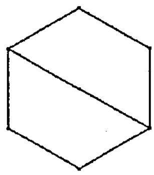
또한, 정오각형의 꼭지점이나 변 위의 한 점을 이용한 방법은 다음과 같다(<표 2> 참조).

여기서 방법 ③을 귀납적으로 일반화하면, 정 n각형의 한 꼭지점에서 $(n-3)$개의 대각선을 그으면 $(n-2)$개의 삼각형이 생긴다. 정 n각형의 한 내각 a와 $(n-2)$개의 삼각형의 내각의 총합 사이의 관계는 $na=(n-2)\times 180^\circ$ 이므로 $a=\frac{(n-2)\times 180^\circ}{n}=180^\circ-\frac{360^\circ}{r}$ 이다.

아래 방법 ④에 대한 귀납적인 일반화에서 정육각형의 경우에는 오른쪽 <그림 3>, <그림 4>와 같이 삼각형과 사각형으로 분할하거나 사각형만으로 분할하는 경우가 있다.



<그림 3>



<그림 4>

먼저 <그림 3>의 경우를 귀납적으로 일반화하면(즉, 하나의 사각형과 여러 개의 삼각형으로 분할), 정 n각형은 사각형 1개와 삼각형 $(n-4)$개로 분할된다. 그래서 정 n각형의 한 내각의 크기를 a라고 하면, $360^{\circ}+(n-4)\times 180^{\circ}=na$ 이 성립하고 여기서 a를 구하면

$$a=180^{\circ}\times\frac{(n-2)}{n}$$

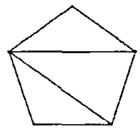
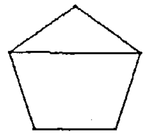
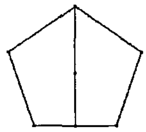
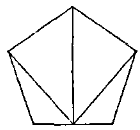
를 얻는다.

다음으로 <그림 4>의 경우를 귀납적으로 일반화하면, 정 n각형은 n이 짝수인 경우와 홀수인 경우로 나뉘어진다.

(i) n이 짝수인 경우에 정 n각형은 $(n-2)\div 2$개의 사각형으로 분할된다. 그래서 정 n각형의 한 내각의 크기를 a라고 하면, $360^{\circ}\times\frac{(n-2)}{2}=na$ 이 성립하고 위와 같은 결과를 얻는다.

(ii) n이 홀수인 경우에 정 n각형은 1개의 삼각형과 $(n-3)\div 2$개의 사각형으로 분할된다. 정 n각형의 한 내각의 크기를 a라고 하면, $180^{\circ}+(\frac{n-3}{2})\times 360^{\circ}=na$ 가 성립하고 같은 결과를 얻는다

<표 2> 꼭지점이나 변 위의 한 점을 이용한 방법

방법	그림
③ 정오각형의 한 꼭지점에서 두 대각선을 그으면 세 개의 삼각형이 생긴다. 정오각형의 한 내각 a와 세 삼각형의 내각의 총합 사이의 관계는 $$5a=3\times180^\circ$$ 이므로 $a=108^\circ$ 이다.	
④ 정오각형의 한 꼭지점에서 하나의 대각선을 그으면 삼각형과 사각형이 생긴다. 정오각형의 한 내각 a와 삼각형, 사각형 사이의 관계는 $$5a=360^\circ+180^\circ$$ 이므로 $a=108^\circ$ 이다.	
⑤ 정오각형의 한 꼭지점과 그 대변을 연결하면 두 개의 사각형이 생긴다. 정오각형의 한 내각 a와 두 사각형 사이의 관계는 $$2\times360^\circ-180^\circ=5a$$ 이므로 $a=108^\circ$ 이다.	
⑥ 정오각형의 변 위의 한 점에서 세 꼭지점을 연결하면 네 개의 삼각형이 생기고 이들의 내각의 총합과 , 정오각형의 한 내각 a 사이의 관계는 $$4\times180^\circ-180^\circ=5a$$ 이므로 $a=108^\circ$ 이다.	

Ⅳ. 맺는 말

위에서 살펴본 바와 같이 다각형을 여러 개의 삼각형으로 분할하는 것은 특히 기하 문제를 해결할 때 사용되어질 수 있는 중요한 전략이 된다. 이러한 방법은 기하학적 도형 가운데 가장 기본적인 도형인 삼각형의 성질을 이용하는 좋은 방법이 된다. 대부분의 기하학습은 삼각형과 사각형의 성질을 학습하는 것이 주가 되고 특히 증명에서 삼각형의 성질이 많이 활용되어진다. 그것이 삼각형의 성질을 이용하는 이유가 된다.

문제에 대한 다양한 해법을 찾는 것은 문제해결의 중요한 목표이기도 하다. 문제해결에서 가장 많이 사용하는 방법이 그림(기하학적 도형)이나 기호를 사용한다고 볼 때, 기하 문제에 대한 다양한 접근은 문제해결의 전략을 학습시키고 사고의 유연성을 길러줄 수 있는 좋은 소재가 된다. 또한 귀납이나 연역에 의한 일반화를 통해 수학적 일반성을 맛볼 수 있는 예가 된다. 이것은 수학적 개념들 사이의 연결성 측면에서 보면 그 교육적 가치를 짐작할 수 있다. 학생들이 문제에 대한 다양한 해법을 찾는 과정에서 이미 알고 있는 지식이 어떻게 응용되는지를 앎으로써 그 중요성과 수학의 매력을 느낄 수 있다. 또한 문제를 다양한 방법으로 접근하는 것은 사고의 유연성을 기를 수 있다.

참 고 문 헌

박한식 · 구광조 (1986). 수학과 교수법, 서울: 교학연구사.

박한식 (1994). 수학과 교원을 위한 수학. 전국수학교육연구발표회 프로시딩, 서울:한국수학교육학회.

NCTM (2000), *Principles and Standards for School Mathematics*, Reston, VA:National Council of Teachers of Mathematics.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to Think Mathematically:Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics. In D.A.Grouws(Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Reston, VA:National Council of Teachers of Mathematics.

Stanic, G. & Kilpatrick, J. (1989). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. In R.I.Charles & E.A.Silver(Eds.), *The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving*, Reston, VA:National Council of Teachers of Mathematics.