韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 15집, 2003. 1. 255-260.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 15, Jan. 2003. 255-260.

파이겐바움 분기도를 그리는 과정에서 엑셀의 활용

안 대 영 (한국교원대부설미호중학교)

1980년을 전후하여 카오스연구가 물리학에서 왕성하게 이루어졌다. 미국의 물리학자 파이겐바움(M. J. Feigenbaum)이 보편상수를 발견한 것이(1978) 중요한 계기가 되었다. 파이겐바움의 보편상수는 카오스 현상에서 공통적으로 발견할 수 있다. 보편상수를 탐구하기 위해서는 주기, 배가, 파이겐바움 분기도에 대한 이해가 필요하다. 프로그래밍을 통하여 일반적으로 소개하고 있으므로, 프로그래밍에 대한 깊은 이해없이는 분기도를 탐구하기 어렵다. 프로그래밍을 통해서는 나타나는 결과만을 이해할 수 있다. 이 논문에서는 학습자가 프로그래밍 이전에 엑셀의 기능을 이용하여 파이겐바움 분기도를 그릴 수 있는 방법을 제시하고, 파이겐바움의 주기에 대해 엑셀을 이용하여 시각적으로 이해할 수 있도록 한다.

Ⅰ. 서 론

카오스란 어떤 계(system)가 확고한 규칙에 따라 변화하고 있음에도 불구하고, 매우 불규칙하며 동시에 불안정한 모습을 보여, 먼 상태르 예측할 수 없는 현상을 말한다.

카오스를 알기위해서는 주기, 주기배가, 파이겐바움분기도, 파이겐바움 상수등에 대한 기본적인 내용의 이해가 필요하다. 대부분의 교재에서는 프로그래밍을 통하여 주기배가, 파이겐바움 분기도를 접근한다. 프로그래밍에 대한 이해가 없는 상황에서는 결과치만 보고 학습자 스스로 탐구할 수 있는 환경을 제공하지 못한다. 따라서 이논문에서는 프로그래밍을 통한 접근과 엑셀을 이용하는 방법을 통하여 학습자 프로그래밍 하지 않고 접근할 수 있는 방법을 소개하고자 한다.

Ⅱ. 본 론

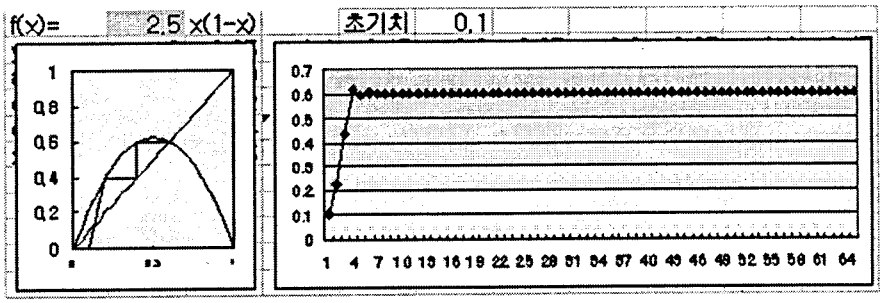
1. 주기 및 주기 배가

주기 및 주기 배가에 대해 알아보자. $x_{n+1}=ax_x(1-x_n)$을 $f(x)=ax(1-x)$로 표기한다. $a(\in[0,\ 4])$는 상수이다. f는 [0, 1]에서 [0, 1] 로의 함수이다. 이러한 함수를 logistic function이라 한다. 1주기에 대해 살펴보자. 1주기는 $f(x_0)=x_0$, $|f'(x_0)|<1$를 만족해야 한다. 즉 $f(x)=ax(1-x)=ax-ax^2=x$ 이다. $x=0$인 경우 $a<1$일 때 끌개이다.

$x\neq 0$인 경우는 $a-ax=1$이므로 x에 대해 정리하면 $x=\frac{a-1}{a}$이다. 또한 $|f'(x_0)|<1$을 만족해야 하므로 $|f'(x)|=|a-2ax|<1$ 이므로 정리하면 $\frac{a-1}{2a}<x<\frac{a+1}{2a}$이다. $x=\frac{a-1}{a}$ 이므

로 $\frac{a-1}{2a} < \frac{a-1}{a} < \frac{a+1}{2a}$ 이다. $\frac{a-1}{2a} < \frac{a-1}{a}$ 와 $\frac{a-1}{a} < \frac{a+1}{2a}$ 의 두가지 경우로 나누면 $1 < a < 3$일 때 끌개가 된다. $a > 3$일 때 밀개가 된다.

f(x)=	2.5	x(1-x)		초기치	0.1					
y=x	0	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45
ax(1-x)	0	0.119	0.225	0.319	0.4	0.469	0.525	0.569	0.6	0.619
orbit x	0.1	0.2	0.4	0.4	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6
orbit y	0	0.4	0.4	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6
xn(1-xn)	0.1	0.225	0.436	0.615	0.592	0.604	0.598	0.601	0.6	0.6



<그림 1> $f(x) = 2.5x(1-x)$

$a = 3$인 경우에 두 값 사이를 움직이는 이유를 살펴보자.

2주기는 $f^2(x_0) = x_1$ 이고 $f(x) \neq x$를 마족한다. 또한 $|\frac{d}{dx} f^2(x_0)| < 1$을 만족해야 한다.

따라서

$$\begin{aligned} f^2(x) - x &= f(ax - ax^2) - x \\ &= a(ax - ax^2)(1 - ax + ax^2) - x \\ &= -x + a^2x - a^2x^2 - a^3x^2 + 2a^3x^3 - a^3x^4 \\ &= x(1 - a + ax)(-1 - a + ax + a^2x - a^2x^2) \\ &= -(a^2x^2 - a^2x - ax + a + 1)x(1 - a + ax) \\ &= 0 \end{aligned}$$

1주기의 끌개인 점을 제외하면 다음 이차방정식을 얻는다.

$$(a^2x^2 - a^2x - ax + a + 1) = 0$$

양변을 a로 나누면

$$ax^2 - (a+1)x + (1 + \frac{1}{a}) = 0$$

근의 공식으로부터 두 개의 실근

$$x=\frac{1+a\pm\sqrt{a^2-2a-3}}{2}\ ,\ a>3$$

을 얻는다. 한 개의 실근 실근을 $x=\frac{1+a+\sqrt{a^2-2a-3}}{2}$ 라고 하면

$$x_1=f(x_0)=\frac{1+a\pm\sqrt{a^2-2a-3}}{2}$$

가 된다. 끌개가 되기 위해서는 $|\frac{d}{dx}f^2(x_0)|<1$을 만족해야 하므로

$|f'(x_0)f'(x_1)|\ <\ 1$을 만족하는 값을 구하여야 한다.

또한 x_0와 x_1은 $ax^2-(a+1)x+(1+\frac{1}{a})=0$의 근이다.

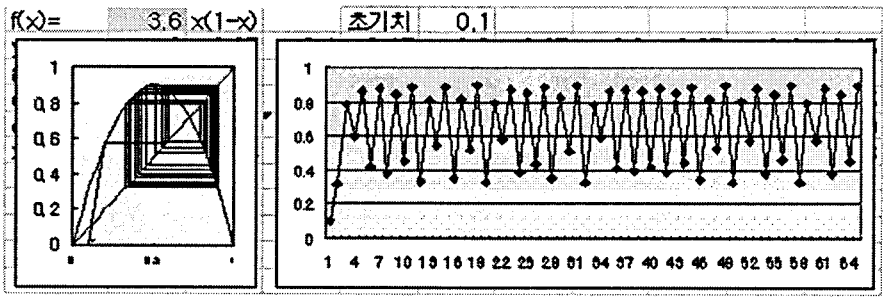
$$x_0+x_1=\frac{a+1}{a},\ x_0x_1=\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}$$

$$\begin{aligned}|f'(x_0)f'(x_1)| &= |(a-2ax_1)(a-2ax_0)| \\ &= |a^2-2a^2x_1-2a^2x_0+4a^2x_1x_0| \\ &= |a^2-2a^2(x_0+x_1)+4a^2x_0x_1| \\ &= |a^2-2a^2(\frac{a+1}{a})+4a^2(\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2})| \\ &= |-a^2+2a+4|<1\end{aligned}$$

부등식을 만족하는 a 의 값을 구하면

$1-\sqrt{6}<a<1+\sqrt{6}=3.4495\cdots$

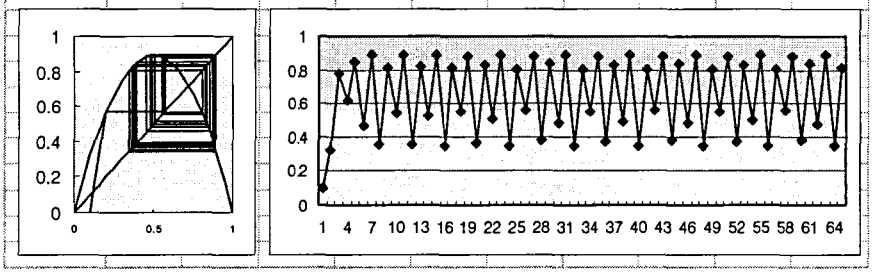
이 된다. $a=3.6$ 에서 3 주기를 확인할 수 있다.



<그림 2> 32 주기

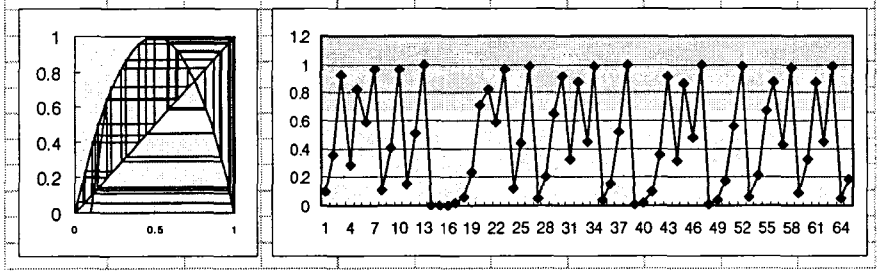
$a=1+\sqrt{6}$이면 4 주기가 된다. 같은 방법으로 $a=3.54490$에서 8 주기를 얻는다.
다음은 32주기이다.

f(x)=	3.569	x(1-x)		초기치	0.1					
y=x	0	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45
ax(1-x)	0	0.17	0.321	0.455	0.571	0.669	0.749	0.812	0.857	0.883
orbit x	0.1	0.2	0.571	0.571	0.874	0.874	0.392	0.392	0.851	0.851
orbit y	0	0.571	0.571	0.874	0.874	0.392	0.392	0.851	0.851	0.453
xn(1-xn)	0.1	0.321	0.778	0.616	0.844	0.47	0.889	0.352	0.814	0.54



<그림 3> 32주기

f(x)=	4	x(1-x)		초기치	0.1					
y=x	0	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45
ax(1-x)	0	0.19	0.36	0.51	0.64	0.75	0.84	0.91	0.96	0.99
orbit x	0.1	0.2	0.64	0.64	0.922	0.922	0.289	0.289	0.822	0.822
orbit y	0	0.64	0.64	0.922	0.922	0.289	0.289	0.822	0.822	0.585
xn(1-xn)	0.1	0.36	0.922	0.289	0.822	0.585	0.971	0.113	0.402	0.962

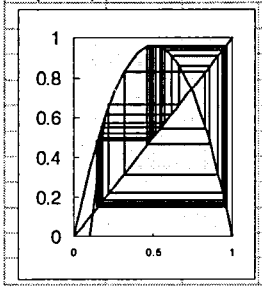


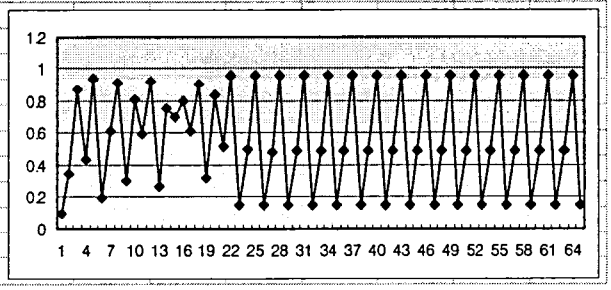
<그림 4> $f(x)=4x(1-x)$ 카오스

2^n 주기가 아닌 경우도 나타난다. $a=4$ 일 때는 주기를 갖지 않는 경우도 있다. 카오스 성질인 초기치의 민감성, 혼합성, 주기성이 나타난다.

3주기를 나타내는 경우도 있다. 다음 그림은 3주기를 나타낸다. 6주기, 9주기 등의 주기 배가를 유도한다.

f(x)=	3.84	x(1-x)		초기치	0.1					
y=x	0	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45
ax(1-x)	0	0.182	0.346	0.49	0.614	0.72	0.806	0.874	0.922	0.95
orbit x	0.1	0.2	0.614	0.614	0.91	0.91	0.315	0.315	0.829	0.829
orbit y	0	0.614	0.614	0.91	0.91	0.315	0.315	0.829	0.829	0.544
xn(1-xn)	0.1	0.346	0.868	0.439	0.946	0.198	0.609	0.914	0.301	0.807

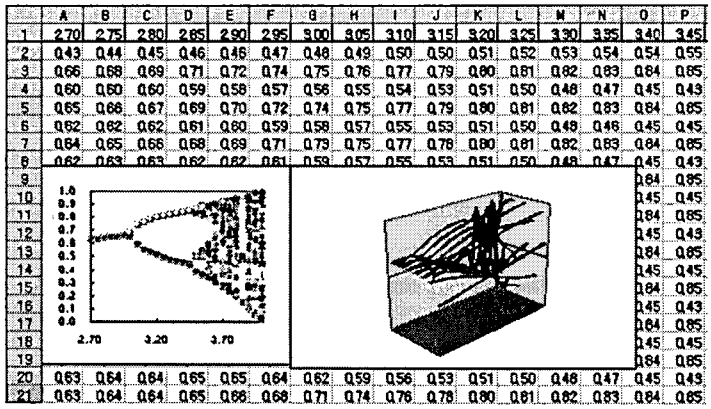




<그림 5> $f(x)=3.84x(1-x)$ 카오스

2. 파이겐바움 분기도와 상수

파이겐바바움 분기도를 나타낸다. 엑셀시트의 1행에 있는 숫자들을 살표보자. 2.7에서 4.0 까지의 값이다. 열방으로 값을 반복시켰다. 엑셀의 차트의 기능을 이용하여 그렸다. 일반적으로 파이겐바움 분기도는 프로그래밍을 통하여 그린다. 엑셀을 이용하면 셀에 값을 넣는 활동을 통하여 값과 분기도를 함께 관찰할 수 있다.

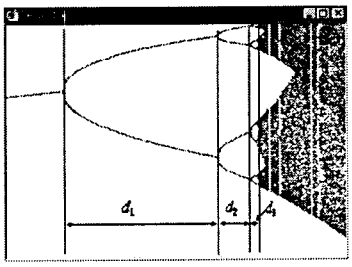


	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	2.70	2.75	2.80	2.85	2.90	2.95	3.00	3.05	3.10	3.15	3.20	3.25	3.30	3.35	3.40	3.45
2	0.43	0.44	0.45	0.46	0.46	0.47	0.48	0.49	0.50	0.50	0.51	0.52	0.53	0.54	0.54	0.55
3	0.66	0.68	0.69	0.71	0.72	0.74	0.75	0.76	0.77	0.79	0.80	0.81	0.82	0.83	0.84	0.85
4	0.60	0.60	0.60	0.59	0.58	0.57	0.56	0.55	0.54	0.53	0.51	0.50	0.48	0.47	0.45	0.43
5	0.65	0.66	0.67	0.69	0.70	0.72	0.74	0.75	0.77	0.79	0.80	0.81	0.82	0.83	0.84	0.85
6	0.62	0.62	0.62	0.61	0.60	0.59	0.58	0.57	0.55	0.53	0.51	0.50	0.48	0.46	0.45	0.45
7	0.64	0.65	0.66	0.68	0.69	0.71	0.73	0.75	0.77	0.78	0.80	0.81	0.82	0.83	0.84	0.85
8	0.62	0.63	0.63	0.62	0.62	0.61	0.59	0.57	0.55	0.53	0.51	0.50	0.48	0.47	0.45	0.43
9															0.84	0.85
10															0.45	0.45
11															0.84	0.85
12															0.45	0.43
13															0.84	0.85
14															0.45	0.45
15															0.84	0.85
16															0.45	0.43
17															0.84	0.85
18															0.45	0.45
19															0.84	0.85
20	0.63	0.64	0.64	0.65	0.65	0.64	0.62	0.59	0.56	0.53	0.51	0.50	0.48	0.47	0.45	0.43
21	0.63	0.64	0.64	0.65	0.66	0.68	0.71	0.74	0.76	0.78	0.80	0.81	0.82	0.83	0.84	0.85

	A	B	C	D
1	2.7	2.75	2.8	2.85
2	=A$1+A2*(1-A2)	=B$1+B2*(1-B2)	=C$1+C2*(1-C2)	=D$1+D2*(1-D2)
3	=A$1+A3*(1-A3)	=B$1+B3*(1-B3)	=C$1+C3*(1-C3)	=D$1+D3*(1-D3)
4	=A$1+A4*(1-A4)	=B$1+B4*(1-B4)	=C$1+C4*(1-C4)	=D$1+D4*(1-D4)
5	=A$1+A5*(1-A5)	=B$1+B5*(1-B5)	=C$1+C5*(1-C5)	=D$1+D5*(1-D5)
6	=A$1+A6*(1-A6)	=B$1+B6*(1-B6)	=C$1+C6*(1-C6)	=D$1+D6*(1-D6)

<그림 6> 엑셀차트기능을 이용한 파이겐바움 분기도

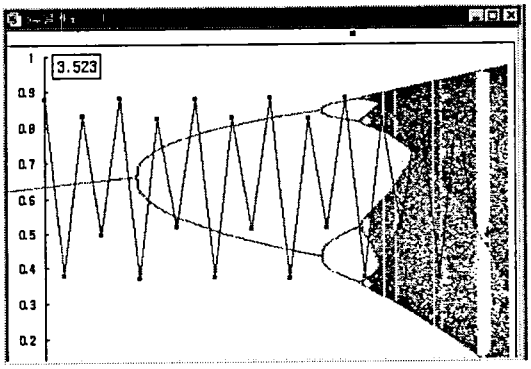
<그림 7>은 파이겐 바움 상수 δ를 구하는 방법을 나타낸다.



주기	n		a 값		d_n		$b_{n+1}-b_n$				$d_{n+1}-d_n$		δ
2	b_1	=	3										
4	b_2	=	3.44949		d_1	=	b_2-b_1	=	0.44949				
8	b_3	=	3.54409		d_2	=	b_3-b_2	=	0.0946	δ_1	= d_1/d_2	=	4.7514799
16	b_4	=	3.564407		d_3	=	b_4-b_3	=	0.020317	δ_2	= d_2/d_3	=	4.6561992
32	b_5	=	3.56875		d_4	=	b_5-b_4	=	0.004343	δ_3	= d_3/d_4	=	4.6781027
64	b_6	=	3.56969		d_5	=	b_6-b_5	=	0.00094	δ_4	= d_4/d_5	=	4.6202128
128	b_7	=	3.56989		d_6	=	b_7-b_6	=	0.0002	δ_5	= d_5/d_6	=	4.70000
256	b_8	=	3.569934		d_7	=	b_8-b_7	=	4.4E-05	δ_6	= d_6/d_7	=	4.5454545
512	b_9	=	3.569943		d_8	=	b_9-b_8	=	9E-06	δ_7	= d_7/d_8	=	4.8888889
1024	b_{10}	=	3.5699451		d_9	=	$b_{10}-b_9$	=	2.1E-06	δ_8	= d_8/d_9	=	4.2857143
2048	b_{11}	=	3.5699456		d_{10}	=	$b_{11}-b_{10}$	=	4.57E-07	δ_9	= d_9/d_{10}	=	4.595186

<그림 7> 파이겐바움 상수

파이겐바움 상수를 엑셀을 통해 자세히 관찰 할 수 있다. 2주기,4주기 등으로 주기가 배가 되면서 δ값의 변화를 살펴볼 수 있다. <그림 8>은 엑셀에서 분기도와 주기를 함께 관찰할 수 있도록 만든 것이다.



<그림 8>

Ⅲ. 결 론

파이겐바움 상수는 카오스를 이해하는데 중요한 개념이다. 보편상수를 이해하는 과정에서 끌개, 밀개, 주기, 주기배가 분기도등을 살펴보았다. 카오스를 탐구하는 데는 복잡한 계산이 많이 때문에 컴퓨터나, 계산기, 그래픽 계산기 등을 활용하고 있다. 여기서는 엑셀을 이용하는 탐구하는 과정을 제시했다. 파이겐바움 분기도를 프로그래밍을 하는 경우와 하지 않는 두 가지 경우로 파이겐바움 분기도를 그릴 수 있다. 프로그래밍을 하는 것은 쉽기 않다. 따라서 프로그래밍을 사용하는 경우와, 사용하지 않는 경우 카오스를 탐구할 수 있도록 하였다.

참 고 문 헌

국형태 · 신동준 (1996). 비주얼베이직과 프랙탈, 서울: 기전연구.

Peitgen, H.O.; Jurgens, H.; Saupe, D; Maletsky, E.; Perciante, T. & Yunker, L. (1992). *Frantals for the classroom : Part One*, New York: Springer- Verlag.