

시스템동정의 ALS법에 관한 연구 A Study on the ALS Method of System Identification

이 동 철

D. C. Lee

Key Words : System Identification(시스템동정), Consistent Estimation Method(일치추정법), Identification Problem(동정문제)

Abstract : A system identification is to estimate the mathematical model on the base of input output data and to measure the output in the presence of adequate input for the controlled system. In the traditional system control field, most identification problems have been thought as estimating the unknown modeling parameters on the assumption that the model structures are fixed. In the system identification, it is possible to estimate the true parameter values by the adjusted least squares method in the input output case of no observed noise, and it is possible to estimate the true parameter values by the total least squares method in the input output case with the observed noise. We suggest the adjusted least squares method as a consistent estimation method in the system identification in the case where there is observed noise only in the output. In this paper the adjusted least squares method has been developed from the least squares method and the efficiency of the estimating results was confirmed by the generating data with the computer simulations.

1. 서 론

제어이론을 실제 시스템에 적용하기 위하여 제어대상인 시스템의 수학적 모델이 필요하다. 그러나 대부분의 경우 시스템의 수학적 모델은 미지이며 시간에 따라 변화한다. 따라서 시스템의 특성을 나타내는 수학적 모델을 구축하는 것을 동정(Identification)이라 하며 시스템 이론의 기본이 된다¹⁻³⁾.

시스템동정이란 적당한 입력을 대상시스템에 주어 그 출력을 관측하고 그 입·출력 데이터에 기초하여 시스템의 수학적 모델을 추정하는 것이다^{4,5)}.

시스템의 동정문제는 다음의 3단계로 나눌 수 있다.

- 1) 모델구조의 가정
- 2) 입·출력 데이터로부터 미지 파라미터의 추정
- 3) 모델의 타당성 검정

종래의 시스템제어 분야에 있어서 동정문제의 대부분은 모델구조(차분방정식, 전달함수의 형)를

미리 정해두고 모델에 포함되는 미지 파라미터를 추정하는 문제로 취급했다.

파라미터 추정⁶⁾에 대하여 지금까지 여러 가지 방법이 제안되고 있지만, 그 대표적인 것은 최소2승법(Least square method, LS)이다⁷⁾.

시스템 동정에 있어서 입·출력에 관측잡음이 없는 경우는 LS법에 의해 파라미터 참값을 구할 수 있다. 한편, 입·출력에 관측잡음이 있는 경우는 TLS(Total least square, TLS)법⁸⁻¹⁰⁾에 의해 파라미터의 일치추정치(Consistent estimate)를 LS 법과 TLS법의 중간적인 방법으로서 ALS(Adjusted least square, ALS)법을 제안한다.

본 논문에서는 일반적으로 저주파 대역에서 부적합하고, 어느 정도 잡음이 크면 바이어스(bias)를 무시할 수 없는 종래의 최소2승법을 개선하여 ALS법에 대해 검토하고 컴퓨터 시뮬레이션에 의해 추정결과를 논하였다.

2. 최소2승법

2.1 문제 설정

Fig. 1에 나타낸 단일입력 단일출력의 선형 시

접수일: 2002년 10월 13일
이동철(책임저자) : 부경대학교 전기·제어계측공학부
E-mail : dclee@pknu.ac.kr Tel. 051-620-1430

시스템을 고려하자.

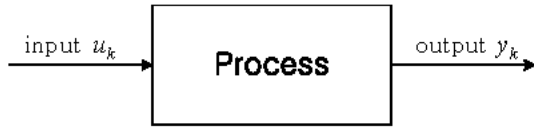


Fig. 1 Linear system model

이 시스템은 다음 차분방정식으로 나타낼 수 있다.

$$y_k = \beta_0 u_k + \beta_1 u_{k-1} + \dots + \beta_n u_{k-n} - \alpha_1 y_{k-1} - \dots - \alpha_n y_{k-n} \quad (1)$$

여기서, 벡터를 식(2)와 식(3)과 같이 두면 식(1)은 식(4)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{m}_{Ak}^T = [u_k, u_{k-1}, \dots, u_{k-n}, -y_{k-1}, \dots, -y_{k-n}] \quad (2)$$

$$\mathbf{x}^T = [\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n] \quad (3)$$

$$y_k = \mathbf{m}_{Ak}^T \mathbf{x} \quad (4)$$

또 행렬벡터를 식(5), (6)과 같이 두면 식(1)의 관계는 식(7)과 같이 나타낼 수 있다.

$$A_m^T = [\mathbf{m}_{Ak+1}, \mathbf{m}_{Ak+2}, \dots, \mathbf{m}_{Ak+m}] \quad (5)$$

$$\mathbf{b}_m^T = [y_{k+1}, y_{k+2}, \dots, y_{k+m}] \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} A_m & -\mathbf{b}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (7)$$

출력에 관측잡음이 있는 경우의 입·출력관계를 Fig. 2에 나타냈다.

관측잡음이 있을 경우의 벡터 \mathbf{b}_m 을 식(8)과 같이 정의하면 식(9)를 얻을 수 있다.

$$\mathbf{b}_m^T = [z_{k+1}, z_{k+2}, \dots, z_{k+m}] \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} A_m & \mathbf{b}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{bmatrix} \simeq 0 \quad (9)$$

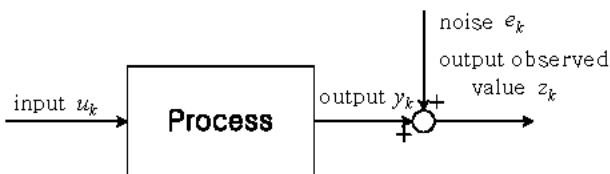


Fig. 2 System model with observed noise in output

2.2 최소 2승추정치

입력열 u_k , 출력열 z_k 가 관측되었다고 하자. 최소2승법은 식(9)에 대해 식(10)을 최소로 하는 x

를 구한다. 식(10)의 양변을 x 로 미분하면 식(11)이 된다.

$$J = [\mathbf{b} - A\mathbf{x}]^T [\mathbf{b} - A\mathbf{x}] = \|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|_2^2 \quad (10)$$

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}} = -2A^T [\mathbf{b} - A\mathbf{x}] \quad (11)$$

$$\left. \frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}_{LS}} = 0 \quad (12)$$

$$-2A^T [\mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}_{LS}] = 0 \quad (13)$$

따라서, 미지 파라미터의 최소2승추정치는 식(14)가 된다.

$$\hat{\mathbf{x}}_{LS} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b} \quad (14)$$

2.3 축차 최소2승법¹⁾

시시각각 데이터가 추가되는 경우 또는 시스템 파라미터가 시간과 함께 느리게 변하는 경우에는 오프 라인(Off line)법으로 파라미터에 의한 추정치의 계산은 곤란하다. 여기서 현재 추정치를 그 직전의 추정치와 새로운 데이터로부터 축차적으로 계산하는 온 라인(On line)법을 고려하자.

k 시각에서 새로운 데이터가 추가된다면 $k-1$ 시각과 k 시각의 행렬 $[A_m \quad -\mathbf{b}_m]$ 사이의 관계는 식(15)와 같다.

$$\begin{bmatrix} A_k & -\mathbf{b}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{k-1} & -\mathbf{b}_{k-1} \\ \mathbf{m}_{Ak}^T & -z_k \end{bmatrix} \quad (15)$$

식(14)는 식(16)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\hat{\mathbf{x}}_{LS(k)} = (A_k^T A_k)^{-1} A_k^T \mathbf{b}_k \quad (16)$$

여기서, P_k 를 식(17)과 같이 정의하면 식(18)이 된다.

$$P_k = (A_k^T A_k)^{-1} \quad (17)$$

$$= ([A_{k-1}^T \quad \mathbf{m}_{Ak}^T] \begin{bmatrix} A_{k-1} \\ \mathbf{m}_{Ak}^T \end{bmatrix})^{-1} = (P_{k-1}^{-1} + \mathbf{m}_{Ak} \mathbf{m}_{Ak}^T)^{-1} \quad (18)$$

식(18)에는 역행렬의 계산이 포함되어 있으므로 역행렬보제(Matrix inversion lemma) 식(19)를 이용하여 식(18)을 변형하면 식(20)과 같이 나타낼 수 있다.

$$(A + BC)^{-1} = A^{-1} - A^{-1} B \cdot (I + CA^{-1}B)^{-1} CA^{-1} \quad (19)$$

$$P_k = P_{k-1} - \frac{P_{k-1} \mathbf{m}_{Ak} \mathbf{m}_{Ak}^T P_{k-1}}{(1 + \mathbf{m}_{Ak}^T P_{k-1} \mathbf{m}_{Ak})} \quad (20)$$

식(16)에 식(15), (17), (20)을 대입하면 식(21)과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{LS(k)} &= (A_k^T A_k)^{-1} A_k^T \mathbf{b}_k \\ &= P_k A_k^T \mathbf{b}_k \\ &= \hat{\mathbf{x}}_{LS(k-1)} + \frac{P_{k-1} \mathbf{m}_{Ak}}{1 + \mathbf{m}_{Ak}^T P_{k-1} \mathbf{m}_{Ak}} \\ &\quad \cdot (z_k - \mathbf{m}_{Ak}^T \hat{\mathbf{x}}_{LS(k-1)}) \end{aligned} \quad (21)$$

식(20)과 식(21)은 축차 최소2승법의 알고리즘이다. 망각계수(Forgetting factor) φ 를 이용하면 축차 최소2승법의 알고리즘은 식(22), (23)과 같다.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{LS(k)} &= \hat{\mathbf{x}}_{LS(k-1)} + \frac{P_{k-1} \mathbf{m}_{Ak}}{\varphi + \mathbf{m}_{Ak}^T P_{k-1} \mathbf{m}_{Ak}} \\ &\quad \cdot (z_k - \mathbf{m}_{Ak}^T \hat{\mathbf{x}}_{LS(k-1)}) \end{aligned} \quad (22)$$

$$P_k = \frac{1}{\varphi} \left(I - \frac{P_{k-1} \mathbf{m}_{Ak} \mathbf{m}_{Ak}^T}{1 + \mathbf{m}_{Ak}^T P_{k-1} \mathbf{m}_{Ak}} \right) P_{k-1} \quad (23)$$

φ 값은 $0 \leq \varphi \leq 1$ 이지만, 일반적으로 1에 가까운 값, 예를 들면 0.95 또는 0.98이 이용된다.

2.4 직교변환(Orthogonal transformation)을 이용한 축차 최소2승법

여기서 행렬 $[A \quad -\mathbf{b}]$ 의 QR분해¹²⁾를 고려하자.

$$Q^T [A \quad -\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} R_A & \boldsymbol{\gamma} \\ 0 & \boldsymbol{\gamma} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

단, R_A , R 는 상삼각행렬(Upper triangular matrix)이며, Q 는 직교행렬(Orthogonal matrix)이다^{13,14)}.

$k-1$ 시각과 k 시각의 행렬 $[A_m \quad -b_m]$ 사이의 관계는 식(25)와 같다.

$$\begin{aligned} [A_{k-1} \quad -\mathbf{b}_k] \\ = \begin{bmatrix} A_{k-1} & -\mathbf{b}_{k-1} \\ \mathbf{m}_{Ak}^T & -z_k \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (25)$$

그리고 벡터 \mathbf{m}_k 를 식(26)과 같이 두고 행렬

$\begin{bmatrix} R_{k-1} \\ \mathbf{m}_k^T \end{bmatrix}$ 의 직교변환을 행하면 식(27)과 같이 나타낼 수 있다

$$\mathbf{m}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_{Ak} \\ -z_k \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$H \begin{bmatrix} R_{k-1} \\ \mathbf{m}_k^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_k \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{Ak} & \boldsymbol{\gamma}_k \\ 0 & \boldsymbol{\gamma} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

여기서, H 는 직교행렬이다.

식(27)은 R_k 의 축차계산식이지만, 여기서 R_k^{-1} 의 축차계산을 고려하자.

벡터 \mathbf{S} 를 식(28)과 같이 정의하고, 식(29)를 만족하는 직교행렬 G 를 구한다.

$$\mathbf{S} = -R_{k-1}^{-T} \mathbf{m}_k \quad (28)$$

$$G \begin{bmatrix} \mathbf{S} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \delta \end{bmatrix};$$

$$GG^T = I; \quad \delta = (1 + \|\mathbf{S}\|_2^2)^{\frac{1}{2}} \quad (29)$$

R_k^{-1} 는 식(30)에 의해 얻어진다.

$$G \begin{bmatrix} R_{k-1}^{-T} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_k^{-T} \\ \mathbf{u}^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = R_{k-1}^{-1} \mathbf{S} / \delta \quad (30)$$

3. TLS법

3.1 문제설정

입·출력에 관측잡음이 있는 경우의 시스템을 Fig. 3에 나타내었다.

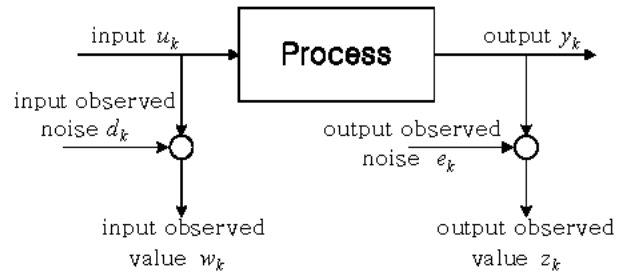


Fig. 3 System model with observed noises in input output

벡터와 행렬을 식(31)~(34)와 같이 정의한다.

$$\mathbf{x}^T = [\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n] \quad (31)$$

$$\mathbf{m}_{Ak}^T = [w_k, w_{k-1}, \dots, w_{k-n}, z_{k-1}, \dots, z_{k-n}] \quad (32)$$

$$A_k^T = [\mathbf{m}_{An}, \dots, \mathbf{m}_{Ak-1}, \mathbf{m}_{Ak}] \quad (33)$$

$$\mathbf{b}_k^T = [z_n, z_{n+1}, \dots, z_k] \quad (34)$$

TLS법은 식(35)와 같다.

$$[A \quad -\mathbf{b}] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{bmatrix} \cong 0 \quad (35)$$

단,

$$A \in \mathbf{R}^{m \times p}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^m, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^p, p=2n+1$$

어떤 행렬 $E \in \mathbf{R}^{m \times p}$ 와 벡터 $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbf{R}^m$ 에 대해 식(36)을 만족하고 $\| [E, \boldsymbol{\gamma}] \|_F$ 를 최소로 하는 E 와 $\boldsymbol{\gamma}$ 를 각각 E_0 와 $\boldsymbol{\gamma}_0$ 라 하면 식(37)을 만족하는 $\hat{\mathbf{x}}_{TLS}$ 를 구하는 방법이다.

$$\mathbf{b} + \boldsymbol{\gamma} \in \text{range}(A + E) \quad (36)$$

$$(A + E_0)\hat{\mathbf{x}}_{TLS} = \mathbf{b} + \boldsymbol{\gamma}_0 \quad (37)$$

3.2 TLS추정치

행렬 $[A \quad -\mathbf{b}]$ 가 식(38)과 같은 특이치분해(Singular value decomposition, SVD)¹⁵⁾가 된다.

$$U^T [A \quad -\mathbf{b}] V = \begin{bmatrix} \Sigma \\ 0 \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \text{단, } U^T U &= I, V^T V = I, \\ \Sigma &= \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{p+1}) \\ \sigma_1 &\geq \dots \geq \sigma_p \geq \sigma_{p+1} \end{aligned}$$

이때 행렬 V 를 식(39), (40)과 같이 분할하면 파라미터 추정치는 식(41)에서 구할 수 있다.

$$V = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p, \mathbf{v}_{p+1}] = [V_1, \mathbf{v}_{p+1}] \quad (39)$$

$$\mathbf{v}_{p+1} = [v_1, \dots, v_{p+1}] \quad (40)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{TLS} \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{v_{p+1}} \mathbf{v}_{p+1} \quad (41)$$

3.3 RTLS(Recursive total least squares) 알고리즘

여기서, 행렬 $[A \quad -\mathbf{b}]$ 의 QR분해를 고려하자.

$$Q^T [A \quad -\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} R_A & \boldsymbol{\gamma} \\ 0 & \gamma \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} \quad (42)$$

단, R_A, R 는 상삼각행렬이며, Q 는 직교행렬이다.

식(17)에 의해 $k-1$ 시각과 k 시각의 행렬 $[A_m \quad -\mathbf{b}_m]$ 사이의 관계는 식(43)과 같다.

$$\begin{aligned} [A_k \quad -\mathbf{b}_k] \\ = \begin{bmatrix} A_{k-1} & -\mathbf{b}_{k-1} \\ \mathbf{m}_{Ak}^T & -z_k \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (43)$$

그리고 벡터 \mathbf{m}_k 를 식(44)와 같이 두고, 행렬

$$\begin{bmatrix} R_{k-1} \\ \mathbf{m}_k^T \end{bmatrix} \text{의 직교변환을 행하면 식(45)와 같다.}$$

$$\mathbf{m}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_{Ak} \\ -z_k \end{bmatrix} \quad (44)$$

$$H \begin{bmatrix} R_{k-1} \\ \mathbf{m}_k^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_k \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{Ak} & \boldsymbol{\gamma}_k \\ 0 & \gamma_k \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (45)$$

단, H 는 직교행렬이다.

한편, R_k^{-1} 의 축차계산은 식(46), (47), (48)과 같이 행해진다. 벡터 \mathbf{S} 는 식(46)과 같이 정의하고, 식(47)을 만족하는 직교행렬 G 를 구하고 R_k^{-1} 은 식(48)에 의해 구할 수 있다.

$$\mathbf{S} = -R_{k-1}^{-1} \mathbf{m}_k \quad (46)$$

$$\begin{aligned} G \begin{bmatrix} \mathbf{S} \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \delta \end{bmatrix}, G^T G = I \\ \delta &= (1 + \|\mathbf{S}\|_2^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (47)$$

$$G \begin{bmatrix} R_{k-1}^{-T} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_k^{-T} \\ \mathbf{u}^T \end{bmatrix}, \mathbf{u} = R_{k-1}^{-1} \mathbf{S} / \delta \quad (48)$$

4. ALS법

4.1 문제설정

$$[A \quad -\mathbf{b}] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{bmatrix} \cong 0 \quad (49)$$

단,

$$A \in \mathbf{R}^{m \times p}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^m, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^p, p=2n+1$$

여기서, 식(49)의 최적해를 구하는 방법을 고려하자.

출력에만 관측잡음이 있는 시스템을 Fig. 4에 나타냈다.

ALS법에서는 입력에 관측잡음이 없는 경우를 고려한다.

식(49)의 행렬 A 와 벡터 \mathbf{x} 를 식(50)과 같이 분할할 수 있다.

$$[A_\beta \quad A_\alpha \quad -\mathbf{b}] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_\beta \\ \mathbf{x}_\alpha \\ 1 \end{bmatrix} \cong 0 \quad (50)$$

단, $A_\beta \in \mathbf{R}^{m \times (n+1)}, A_\alpha \in \mathbf{R}^{m \times n},$

$$\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m, \mathbf{x}_\beta \in \mathbf{R}^{n+1}, \mathbf{x}_\alpha \in \mathbf{R}^n$$

A_β 에는 입력관측치 밖에 들어있지 않기 때문에 즉, 잡음이 없으므로 입력에 관한 파라미터 \mathbf{x}_β 를 LS법으로 계산한다. 한편, A_α 에는 출력관측치가 들어있기 때문에 즉, 잡음이 있으므로 출력에 관한

파라미터 \mathbf{x}_α 를 TLS법에 의해 구한다. 이를 고려하면 ALS법이라 하는 방법을 얻을 수 있다.

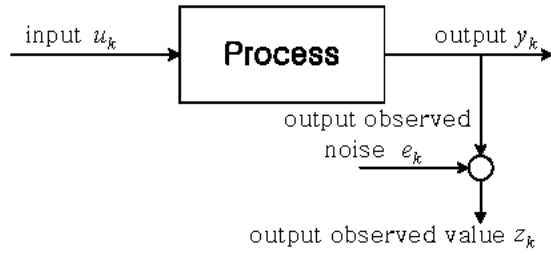


Fig. 4 System model with observed noise in output

4.2 출력만에 관측잡음이 있는 경우

어떤 행렬 $E \in \mathbf{R}^{m \times n}$ 과 벡터 $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbf{R}^m$ 에 대해 식(51)을 만족하고 $\| [E, \boldsymbol{\gamma}] \|_F$ 를 최소로 하는 E 와 $\boldsymbol{\gamma}$ 를 각각 E_0 와 $\boldsymbol{\gamma}_0$ 라 하면 식(52)를 만족하는 $\hat{\mathbf{x}}_\alpha$ 와 $\hat{\mathbf{x}}_\beta$ 를 구한다.

$$\mathbf{b} + \boldsymbol{\gamma} \in \text{range}([A_\beta \quad (A_\alpha + E)]) \quad (51)$$

$$[A_\beta \quad (A_\alpha + E_0) \quad -(\mathbf{b} + \boldsymbol{\gamma}_0)] \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_\beta \\ \hat{\mathbf{x}}_\alpha \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (52)$$

4.3 ALS추정치

행렬 $[A \quad -\mathbf{b}]$ 의 QR분해를 고려하자.

$$Q^T [A \quad -\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} R_A & \boldsymbol{\gamma} \\ 0 & \gamma \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = [R] \quad (53)$$

단, R_A, R 는 상삼각행렬이며, Q 는 직교행렬이다. 직교변환의 성질에 의해 식(49)와 식(54)는 같은 최소2승해를 가진다.

$$R \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{bmatrix} \cong 0 \quad (54)$$

다음은 행렬 R 과 벡터 \mathbf{x} 를 식(55)와 같이 분할한다.

$$\begin{bmatrix} R_\beta & W_\alpha \\ 0 & R_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_\beta \\ \mathbf{x}_\alpha \\ 1 \end{bmatrix} \cong 0 \quad (55)$$

단, $R_\alpha, R_\beta, W_\alpha \in \mathbf{R}^{(n+1) \times (n+1)}$,

$$\mathbf{x}_\alpha \in \mathbf{R}^n, \mathbf{x}_\beta \in \mathbf{R}^{n+1}$$

식(55)는 식(56), (57)과 같이 나눌 수 있다.

$$R_\beta \mathbf{x}_\beta + W_\alpha \begin{bmatrix} \mathbf{x}_\alpha \\ 1 \end{bmatrix} \cong 0 \quad (56)$$

$$R_\alpha \begin{bmatrix} \mathbf{x}_\alpha \\ 1 \end{bmatrix} \cong 0 \quad (57)$$

식(57)의 R_α 를 SVD분해하면 식(58)과 같다.

$$U_\alpha^T R_\alpha V_\alpha = \Sigma_\alpha \quad (58)$$

$$\text{단, } U_\alpha^T U_\alpha = I, V_\alpha^T V_\alpha = I,$$

$$\Sigma_\alpha = \text{diag}(\sigma_{\alpha 1}, \dots, \sigma_{\alpha n}, \sigma_{\alpha n+1})$$

$$\sigma_{\alpha 1} \geq \dots \geq \sigma_{\alpha n} \geq \sigma_{\alpha n+1}$$

V_α 를 식(59), (60)과 같이 분할하면 $\hat{\mathbf{x}}_\alpha$ 는 식(61)에 의해 구할 수 있다.

$$V_\alpha = [\mathbf{v}_{\alpha 1}, \dots, \mathbf{v}_{\alpha n}, \mathbf{v}_{\alpha n+1}] \\ = [V_{\alpha 1}, \mathbf{v}_{\alpha n+1}] \quad (59)$$

$$\mathbf{v}_{\alpha n+1} = [v_{\alpha 1}, \dots, v_{\alpha n+1}]^T \quad (60)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_\alpha \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{v_{\alpha n+1}} \mathbf{v}_{\alpha n+1} \quad (61)$$

식(61)을 식(56)에 대입하면 $\hat{\mathbf{x}}_\beta$ 를 계산하는 식이 구해진다.

4.4 RALS(Recursive adjusted least squares)알고리즘

R_k 의 축차계산법은 식(62)와 같다.

$$H \begin{bmatrix} R_{k-1} \\ \mathbf{m}_k^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_k \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{Ak} & \boldsymbol{\gamma}_k \\ 0 & \gamma \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (62)$$

단, H 는 직교행렬이다.

5. 컴퓨터 시뮬레이션

5.1 시스템동정

아래의 모델에 대해 RTLS와 RALS추정법을 이용하여 파라미터 추정을 행하였다.

$$\text{모델 I: } G_1(z) = \frac{z^{-1} + 0.5z^{-2}}{1 - 1.5z^{-1} + 0.7z^{-2}}$$

$$\text{모델 II: } G_2(z) =$$

$$\frac{1.08z^{-1} - 0.75z^{-2} + 0.45z^{-3} - 0.25z^{-4} + 0.12z^{-5}}{1 - 1.19z^{-1} + 0.81z^{-2} - 0.52z^{-3} + 0.35z^{-4} - 0.12z^{-5}}$$

시스템은 Fig. 5에 나타냈다. 입력신호 u_k 와 출력관측잡음 e_k 는 서로 무상관 정규성 백색잡음이며, $u_k \sim N(0, 1)$, e_k 의 평균치는 0, 표준편차는

출력신호의 $\frac{1}{10}$ 을 취한다.

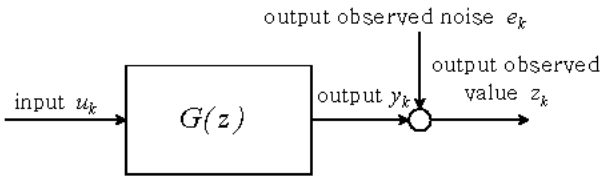


Fig. 5 System model of simulation

각 모델의 시뮬레이션 결과를 다음과 같이 나타냈다.

5. 2 시뮬레이션 결과

5.2.1 모델 I에 대한 시뮬레이션 결과

모델 I: $G_1(z) = \frac{z^{-1} + 0.5z^{-2}}{1 - 1.5z^{-1} + 0.7z^{-2}}$

Table 5.1 Parameters and estimates

Parameter	a_1	a_2	b_1	b_2	mean $\hat{\nu}$ value	standard deviator
True value	1.5	0.7	1.0	0.5		
RTLS estimate	1.4463	0.6543	1.1077	0.6131	0.0616	0.3731
RALS estimate	1.4967	0.6983	1.0090	0.5098	0.0028	0.0367

Fig. 8 $y \hat{y}_{RTLS}$

Fig. 6 Parameter estimation by RTLS method

Fig. 9 $y y_{ALS}$

5.2.2 모델 II에 대한 시뮬레이션 결과

모델 II: $G_2(z) =$

$$\frac{1.08z^{-1} - 0.75z^{-2} + 0.45z^{-3} - 0.25z^{-4} + 0.12z^{-5}}{1 - 1.19z^{-1} + 0.81z^{-2} - 0.52z^{-3} + 0.35z^{-4} - 0.12z^{-5}}$$

Fig. 7 Parameter estimation by RALS method

Fig. 10 Parameter estimation by RTLS method

Fig. 12 y \hat{y}_{TLS}

Fig. 11 Parameter estimation by RALS method

Fig. 13 y \hat{y}_{ALS}

Table 5.2 Parameters and estimates

Parameter	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
True value	1.19	0.81	0.52	0.35	0.12
RTLS estimate	0.4585	0.1587	0.2750	0.0718	0.0635
RALS estimate	1.2127	0.7752	0.4751	0.3204	0.1164

b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	mean \hat{y} value	standard deviation
1.0816	0.75	0.45	0.25	0.12		
1.0806	1.0335	0.6275	0.6138	0.3216		
1.0806	0.7748	0.3945	0.2171	0.0927	6.7300e-005	0.0087

6. 결 론

본 논문에서는 출력에만 관측잡음이 있는 경우의 일치추정법으로서 LS법과 TLS법의 중간적 방법인 ALS법과 반복알고리즘에 대해 검토했고, 컴퓨터 시뮬레이션에 의해 추정결과를 나타냈다.

잡음이 적을 경우는, TLS법과 ALS법의 추정치가 대개 같지만, 잡음이 클 경우는 ALS법의 추정치가 TLS법의 추정치보다 참값에 근접하고 있다. 특히 5차모델의 경우, TLS법의 추정치보다 ALS법의 추정치가 바이아스가 적고 매우 양호하다.

또 ALS법은 특이치분해를 행하는 행렬이 작기 때문에 속도는 TLS법보다 빠르다. 출력에만 관측잡음이 있는 경우, ALS법은 파라미터의 일치추정치가 얻어졌고, 또 TLS법보다 정도(Precision)가 양호한 값이 얻어지므로 유용하다고 사료된다.

참 고 문 헌

1. G. C. Goodwin and R. L. Payne, "Theory and Practice of Recursive Identification", The MIT Press, 1981

2. L. Ljung, "System Identification Theory for The User", Prentice Hall, 1987
3. M. Aoki, "State Space Modeling of Time Series(2nd ed.)", Springer, 1990
4. A. J. Helmicki, C. A. Jacobson, C. N. Nett, "Control Oriented System Identification : A Worst Case/Deterministic Approach in H_∞ ", IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. 39, No. 10, pp. 1163~1176, 1991
5. T. Soderstrom and P. Stoica, "System Identification", Prentice Hall, 1989
6. P. Eykhoff and P. C. Parks, "Special Issue on Identification and System Parameter Estimation", Automatica, Vol. 26, No. 1, pp. 1~194, 1990
7. T. Nakamizo, "Signal Analysis and System Identification", Corona Publishing Co. LTD., 1988
8. T. Uchiyama, J. Imai, K. Wada, "A Study on Robust Identification in the Presence of Noise", JSICE, Vol. 43, No. 10, pp. 1374~1379, 1998
9. Y. Inoue and H. Tsuchiya, "Identificarion of Linear Systems using Input Output Cummulants," Int. J. Control, Vol. 53, No. 6, pp. 1431~1448, 1991
10. 吳陽, 片山徹, "バイアス報償法による入出力雑音を受ける線形システムの同定", システム制御情報學會論文誌, pp. 454~460, Vol. 5, No. 11, 1992
11. B. Friedlander, "A Modified Prefilter for Some Recursive Estimation Algorithms", IEEE Trans., Automat. Contr., Vol. 27, No. 1, pp. 232~235, 1982
12. 片山 徹, "システム同定入門", p. 25, 朝倉書店, 1994
13. G. H. Golub and C. F. Van Loan, "Matrix Computation", The Johns Hopkins Univer sity Press, U. S. A., 1991
14. F. R. Gantmacher, "The Theory of Matrices", Chelsea Publishing Co., New York, 1960
15. 伊理, 兒玉, 須田, "特異値分解とそのシステムへの應用", Vol. 21, No. 8, pp. 763~772, 1982