

# 유한차분법과 특성곡선법을 이용한 파이프-오리피스계의 가스 유동 예측

## A Prediction of Gas Flow in a Pipe and Orifice System Using The Finite Difference Method and The Method of Characteristics

나홍섭 · 고대권 · 조규학 · 장세호 · 안수길

H. S. Na, D. K. Koh, K. H. Cho, S. H. Jang and S. K. Ahn

**Key Words** : Method of Characteristics(특성곡선법), MacCormack Scheme(MacCormack법), Pipe and Orifice System(파이프 오리피스계)

**Abstract** : Because of the advancement of digital computers and software technologies, simulation methods have been used to reduce time and costs.

A lot of simulation methods have been developed for the improvement of charging efficiency on the intake and exhaust system of engines. In this study, as a basic step for the development of the gas flow simulation program for the intake and exhaust system, the gas flow in a pipe-orifice system was calculated with three algorithms (Method of Characteristics, MacCormack Method for conservation, and MacCormack Method for nonconservation). The calculated results using three numerical algorithms were compared with measured result to verify the calculation accuracy.

### 기호 설명

- $A$  : 무차원 음속(=  $a / a_{ref}$ )
- $A_t$  : 밸브목에서의 무차원 음속
- $a_{ref}$  : 기준음속( m/s )
- $D$  : 파이프 직경( m )
- $F$  : 관의 단면적(  $m^2$  )
- $f$  : 관벽의 마찰계수
- $k$  : 비열비
- $p$  : 파이프내의 압력( bar )
- $T$  : 온도( K )
- $X$  : 길이 무차원( =  $x/L_{ref}$  )
- $x$  : 거리( m )
- $U$  : 가스의 무차원 유동 속도( =  $u/a_{ref}$  )
- $u$  : 가스의 유동 속도( m/s )

- $Z$  : 무차원시간( =  $a_{ref} \cdot t / L_{ref}$  )
- $\lambda, \beta$ : 리만 변수(Riemann variables)
- $\rho$  : 밀도(  $kg/m^3$  )
- $\mu$  : 점성계수(  $kg/m \cdot s$  )

### 1. 서 론

1950년대부터 컴퓨터의 획기적인 발전에 힘입어 공학의 여러 분야에서 컴퓨터를 이용한 학문의 발전이 계속적으로 이루어져 왔다. 특히, 전산해석기법을 유체역학에 응용하는 전산 유체역학은 기계, 항공, 조선, 토목, 해양, 기상, 환경, 화공, 핵공학 등에 널리 이용되어 오고 있다. 최근에 디지털 컴퓨터 및 소프트웨어의 기술의 발달로 인하여 점차 공학에서도 실험을 실시하기 이전에 시뮬레이션으로 타당성을 검토한 후 실험을 수행하여 시간 및 소요경비를 많이 줄이고 있다.

현재, 자동차용 디젤 기관은 전자시스템을 이용한 초고압 분사시스템이 상용화되었으며, 선박에서는 연료 펌프 및 흡·배기 밸브 구동 캠이 없는 캠리스기관(camless engine)이 상용화되고 있다. 캠리스기관 개발 과정에서 연료 분사 시기, 분사

---

접수일: 2002년 11월 22일  
 나홍섭(대표저자) : 부경대학교 대학원  
 E-mail : nhs9420@hanmail.net Tel: 051-620-1575  
 조규학 : 부경대학교 대학원  
 장세호 : 강원전문대학 동력기계시스템과  
 고대권, 안수길 : 부경대학교 기계공학부

압력, 흡·배기 밸브 개폐 시기 및 과급시스템제어 등 각 인자의 변화에 대한 기관 성능을 실험에 의해 검사할 경우 많은 시간과 막대한 경비가 소요된다. 이에 대해 기관 성능을 예측할 수 있는 성능 예측 프로그램을 이용하면 시간과 경비를 절감할 수 있다<sup>1,2)</sup>.

왕복식 내연기관의 흡·배기관 가스유동에 대한 수치계산 방법에는 여러 가지가 있으나 본 논문에서는 유한차분법의 한 종류인 MacCormack법(MCK법)과 특성곡선법(MOC)을 함께 사용하고 있다. 특성곡선법은 질량의 보존성을 잃기 쉬운 결점이 있으나 각종 경계에서는 아주 유용하게 쓰이는 장점이 있다. 유한차분법은 특성곡선법에 비하여 질량의 보존성이 좋고 격자 생성이 간단하지만 경계조건의 정식화가 어려운 결점이 있다<sup>3,5)</sup>.

본 연구에서는 왕복식 내연기관의 흡·배기관 가스 유동 예측에 대한 기초 연구로서, 흡·배기관을 단순화한 파이프-오리피스계에서 파이프 내부는 유한차분법을 적용하고, 파이프 양쪽 끝단(경계)에는 특성곡선법을 적용한 혼합 수치계산 결과를 기존의 특성곡선법만을 적용한 계산 결과 및 실험값과 비교 분석하여 혼합수치 계산법의 유용성에 대해서 검증하고자 한다. 또한 혼합수치계산에서 보존형과 비보존형의 차이에 대해서도 고찰하고자 한다.

## 2. 이론 및 수치해석 방법

### 2.1 지배방정식

파이프 내의 가스 유동을 1차원, 압축성 유체, 비정상 흐름이라고 가정하고, 파이프 내부의 마찰, 엔트로피의 변화, 파이프 단면적 변화, 열 전달 등을 고려한 지배 방정식은 아래와 같다.

#### 2.1.1 비보존형 방정식

연속 방정식

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\rho u}{F} \cdot \frac{dF}{dx} = 0 \quad (1)$$

운동량 방정식

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + G = 0 \quad (2)$$

에너지 방정식

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( e + \frac{u^2}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho u \left( e + \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) \right] \\ & + \rho u \left( 2 + \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) \frac{1}{F} \frac{dF}{dx} - \rho q = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

### 2.1.2 보존형 방정식

연속 방정식

$$\frac{\partial(\rho F)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho F u)}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

운동량 방정식

$$\frac{\partial(\rho F u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho F u^2)}{\partial x} = -F \frac{\partial p}{\partial x} \quad (5)$$

에너지 방정식

$$\begin{aligned} & \frac{\partial[\rho(e + u^2/2)F]}{\partial t} \\ & + \frac{\partial[\rho(e + u^2/2)Fu + pFu]}{\partial x} = -\frac{\partial(pFu)}{\partial x} \end{aligned} \quad (6)$$

## 2.2 계산 알고리즘

서론에서 언급한 바와 같이 본 연구에서는 특성곡선법과 차분법의 장점들을 결합하여 파이프내의 유동해석은 유한차분법의 하나인 MCK법을 사용하였으며 경계(오리피스와 폐쇄단)에서는 특성곡선법을 사용하였다.

### 2.2.1 파이프내의 가스유동에 대한 수치해석

#### 1) MacCormack 법<sup>6)</sup>

파이프-오리피스 내부의 가스 유동에 대한 수치계산은 유한차분법의 한 종류인 MCK법을 사용하여 나타냈다. MCK법은 2차 정확도를 가지는 유한차분법으로서 예측 단계와 수정 단계의 두가지 과정을 거치는데, 수정 단계에서는 예측 단계의 1차 정확도를 2차 정확도로 만들어 준다.

MCK법은 수정 단계에서 전진 차분법을 사용하는 것이 가장 좋은 방법이라고 알려져 오고 있다. 즉, 불연속선이 오른쪽 방향으로 전파되고 있는 경우에는 예측 단계에서 전진 차분법을 수정 단계에서 후진 차분법을 사용하는 것이 좋다. 반대로 불연속선이 왼쪽으로 전파될 경우에는 예측 단계에서 후진 차분법을 수정 단계에서 전진 차분법을 사용하는 것이 좋다.

예측 단계 :

$$\frac{W_i^{n+1} - W_i^n}{\Delta t} + \frac{F_{i+1}^n - F_i^n}{\Delta x} = 0 \quad (7)$$

수정 단계 :

$$\frac{W_i^{*n+1} - W_i^{n+\frac{1}{2}}}{\frac{\Delta t}{2}} + \frac{F_i^{*n+1} - F_{i-1}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} = 0 \quad (8)$$

여기서,  $F_i^{n+1}$ 은 'n+1' 시간레벨(time level)에서의 임시 값을 의미하고,  $n + \frac{1}{2}$ 은 n과  $n+1$  시간레벨의 산술평균을 취한다.

$$W_i^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (W_i^n + \overline{W_i^{n+1}}) \quad (9)$$

2.2 파이프-오리피스 경계에서의 지배방정식

Fig. 1에서 보는 바와 같이 파이프-오리피스 경계에서의 가스 유동에 대한 수치 계산은 특성곡선법을 사용하였다. 파이프 좌측 끝단은 폐쇄단 경계조건(closed end boundary)을 적용하고, 우측 끝단은 오리피스 경계조건(orifice boundary)을 적용하면 경계조건식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

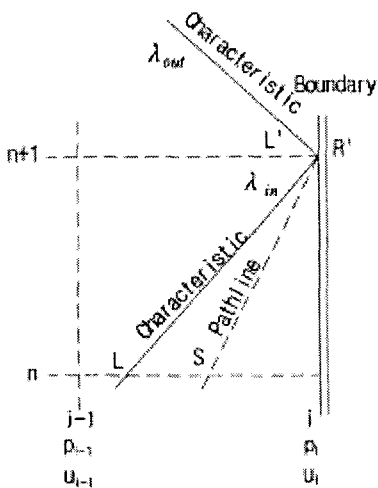


Fig. 1 General boundary conditions at pipe end, illustrating characteristic and pathline at boundary

2.2.1 폐쇄단 경계조건

좌측 폐쇄단에 압력과가 부딪치는 순간 입자의 속도( $u$ )가 0이므로 다음의 식이 유도된다.

$$\lambda_{in} = A + \frac{k-1}{2} U \quad (10)$$

$$\lambda_{out} = A - \frac{k-1}{2} U \quad (11)$$

$U = u/a_{ref}$ 이므로  $U$ 는 0이다. 그러므로

$$\lambda_{out} = \lambda_{in} \quad (12)$$

2.2.2 오리피스 경계조건

아음속 유동(subsonic flow)

$$U^2 = \frac{\frac{2}{k-1}(A^2-1)}{\left(\frac{A^{4/(k-1)}}{\phi^2} - 1\right)} \quad (13)$$

음속 유동(sonic flow)

$$\phi^2 = \left\{ \frac{k+1}{k-1} - \frac{2}{k-1} \left(\frac{A}{A_t}\right)_{cr}^2 \right\} \left(\frac{A}{A_t}\right)_{cr}^{4/(k-1)} \quad (14)$$

$$\frac{U}{A} = \phi \left(\frac{A_t}{A}\right)_{cr}^{(k+1)/(k-1)} \quad (15)$$

(10)식을  $U$ 에 대해서 정리하고, 양변을 제곱하면,

$$U^2 = \left(\frac{2}{k-1}\right)^2 (\lambda_{in} - A)^2 \quad (16)$$

(16)식을 (14)식에 대입하여  $A$ 에 대한 방정식으로 나타내면

$$f(A) = (A^{\frac{k}{k-1}} - \phi^2)(\lambda - A)^2 - \frac{k-1}{2}(A^2-1)\phi^2 = 0 \quad (17)$$

$$\lambda_{out} = 2A - \lambda_{in} \quad (18)$$

(17)식에서 이분법으로  $A$ 를 구한 후 (18)식에 대입하여  $\lambda_{out}$ 을 구한다.

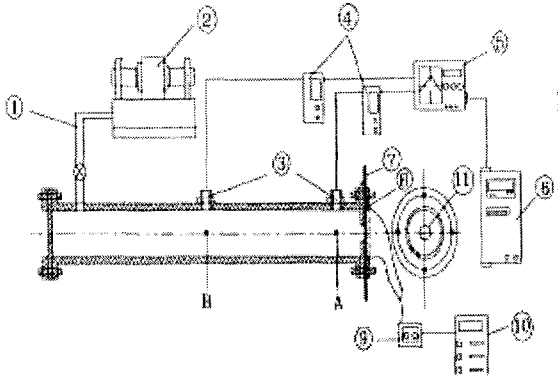
$$U_i^{n+1} = \frac{\lambda_{in} - \lambda_{out}}{k-1} \quad (19)$$

$$A_i^{n+1} = \frac{\lambda_{in} + \lambda_{out}}{2} \quad (20)$$

(19)식과 (20)식의  $U, A$ 값을 구해서 파이프 우측 경계(오리피스 경계)에서의 가스의 압력 및 속도를 계산하였다.

3. 실험장치 및 방법

Fig. 2는 공기를 유동 가스로 하는 파이프-오리피스계의 압력변화를 측정하기 위한 실험장치이다. 실험용 파이프는 내경 53.5 mm, 길이 1494 mm의 원관을 사용하였으며, 파이프의 좌측 끝단은 폐쇄하고, 우측 끝단에는 오리피스를 설치하여 오리피스 외측에 기밀을 유지하기 위한 박막을 부착하였다. 박막을 터트리기 위해 파이프 우측 끝단의 플랜지에 플랜지의 내경보다 큰 열선을 동심원으로 설치하였다. 파이프의 공기를 일정 압력이 될 때까지 충전한 후 열선에 전류를 흘려 박막이 파열되면 파이프내의 공기가 분출되어 파이프내의 압력이 급격히 변화하게 된다. 파이프내의 초기 공기 압력은 임계 압력 이하인 1.5 bar와 이상인 2.5 bar로 하였으며, 오리피스는 면적비(오리피스 직경 / 파이프 내경)가 0.25인 것을 사용하였다. 파이프내의 압력 변화는 오리피스 입구로부터 45.1 mm에 위치한 A점과 739.5 mm에 위치한 B점에서 피에조 저항식 압력센서를 사용하여 디지털 오실로스코프로 동시에 측정하였다.



- ① Air filling pipe                      ⑦ Thin film
- ② Air compressor                      ⑧ Nichrome wire
- ③ Pressure sensor                      ⑨ Switch
- ④ Amplifier                              ⑩ Power
- ⑤ Oscilloscope                         ⑪ Orifice
- ⑥ Computer

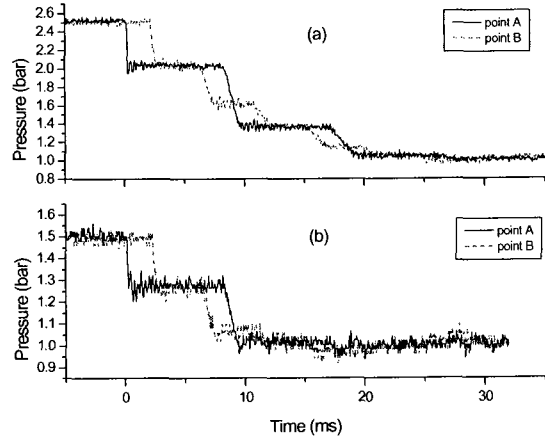
Fig. 2 Schematic diagram of experimental apparatus

#### 4. 계산결과 및 고찰

##### 4.1 파이프내의 압력변화

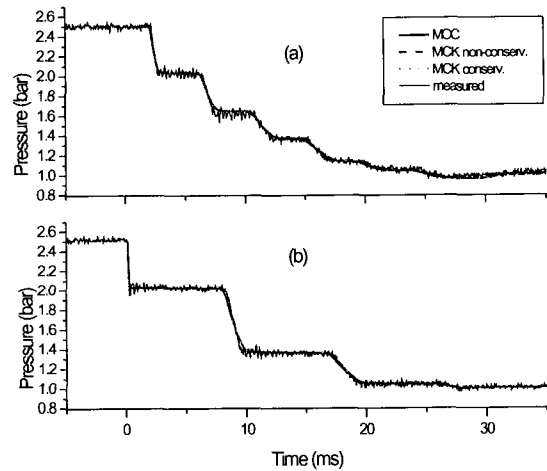
Fig. 3은 파이프내의 초기 공기압력이 임계압력 이하인 1.5 bar와 임계 압력 이상인 2.5 bar에서 박막이 파괴된 후, 파이프 내의 압력 변화를 A점과 B점에서 측정된 실험값을 나타낸 것이다. 박막이 순간적으로 파열되면 오리피스 입구측에서 순간적으로 압력이 떨어져 팽창과가 발생하여 폐쇄단 쪽으로 전파되고, 폐쇄단에서 다시 반사되어 오리피스쪽으로 전파되어 오리피스단에서 일부는 대기중으로 방출되고 일부는 다시 반사되어 폐쇄단 쪽으로 진행되는 과정을 반복하는 것을 알 수 있다.

Fig. 4는 초기 공기압력이 2.5 bar일 때 A점 및 B점에서 시간의 변화에 따른 공기압력의 실험값과 계산값을 나타낸 그림이다. 그림에서 실험값과 계산값을 비교해 매우 잘 일치함을 알 수 있으나, A점의 압력은 오리피스 박막 파열후 약 8 ms~10.5 ms 동안 실험값이 계산값보다 약 0.05 bar 작게 나타나고 있는데, 이것은 오리피스의 유량계수는 속도, 온도, 압력, 밀도의 값에 따라 변하는데 고정된 상수값을 사용한 때문인 것 같다. 또한 시간이 증가할수록 팽창과의 기울기가 작아지는 것을 알 수 있는데, 이와 같은 현상은 파의 전파속도가 압력의 제곱근에 비례하기 때문이다.



(a) initial pressure : 2.5 bar  
(b) initial pressure : 1.5 bar

Fig. 3 Measured pressure-time histories at point A and point B



(a) point B                                      (b) point A

Fig. 4 Comparison of calculated and measured pressure-time histories at 2.5 bar

Fig. 5는 초기 공기압력이 1.5 bar일 때 A점 및 B점에서 시간의 변화에 따른 공기압력의 실험값과 계산값을 나타낸 그림이다. 그림 개형을 조사해 보면 실험값과 계산값이 매우 잘 일치함을 알 수 있다.

Fig. 6은 초기 공기압력이 1.5 bar에서 파이프 내의 가스 분출이 시작된 후 경과 시간이 3 ms, 7 ms, 11 ms, 15 ms에서 파이프 내의 압력변화에 대한 비보존형 지배방정식을 이용한 MacCormack (비보존형 MCK법) 수치계산 결과를 나타낸 것이다. x축의 0.0 m은 오리피스 입구측 이고, 약 1.5 m는 폐쇄단 위치이다. 1.5 3 ms에서는 팽창과가 오리피스단에서 약 1.04 m까지 영향을 미치는 것

을 알 수 있으며, 초기 팽창파의 속도를 계산하면 약 347 m/s 임을 알 수 있다. 7 ms에서 팽창파가 폐쇄단에서 반사되는 것을 알 수 있으며, 15 ms에서는 폐쇄단에서 약 0.43 m까지 대기압보다 작은 약 0.985 bar이므로 파이프 외부의 공기가 역류해서 파이프 내부로 들어오는 것을 예측할 수 있다. 20 ms에서는 약 0.36 m ~ 0.77 m 사이에서 압축파가 발생하는 것을 알 수 있다.

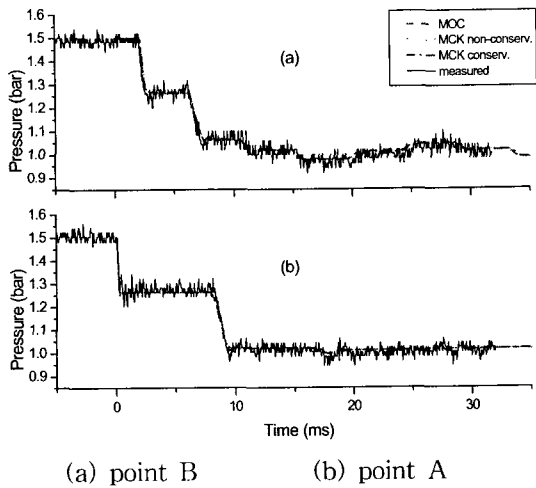


Fig. 5 Comparison of calculated and measured pressure-time histories at 1.5 bar

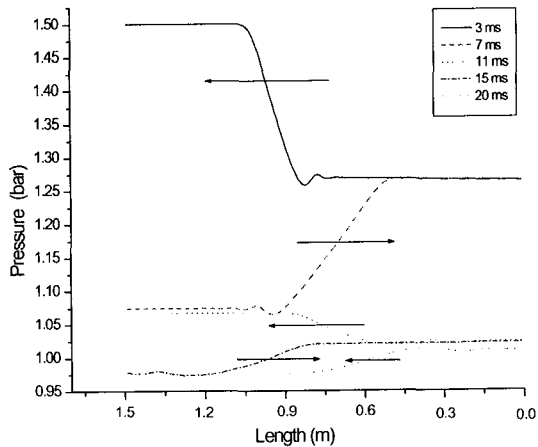


Fig. 6 Pressure-distance histories by using MacCormack nonconservation at 1.5 bar

#### 4.2 파이프 내부의 입자속도

Fig. 7은 초기 공기압력이 2.5 bar일 때 A점에서 시간의 변화에 따른 입자속도를 특성곡선법(MOC)과 비보존형 MCK법 및 보존형 MCK법을 이용하여 나타낸 그림이다. 전체적인 개형을 살펴보면 MOC와 비보존형 MCK법 및 보존형 MCK법이 유사한 개형을 가지는 것을 알 수 있다. 세 개 계산

값을 비교해 보면 약 19.5 ms까지는 세 개의 계산값이 매우 잘 일치함을 알 수 있으며, 19.5 ms 이후에는 MOC와 MCK법과는 약간 상이함을 알 수 있다. 특히 저속에서는 많은 차이가 남을 알 수 있다. 실험을 수행하여 속도를 측정하지 못하여 세 개의 계산값의 정확성을 분석하지 못하였지만, 선행된 연구 결과<sup>7)</sup>에 의하면 MOC의 경우 질량, 에너지 및 운동량의 손실이 생겨서 오차가 발생하므로 MCK법의 가스 속도값이 더욱 정확한 것으로 밝혀져 있다. 약 0.1 ms, 10 ms, 19.5 ms에서 MCK법에서 비물리적인 현상인 진동(oscillation)이 발생함을 알 수 있고, 약 17 ms~27 ms, 약 36 ms~46 ms 및 약 55 ms~60 ms에서 속도가 음수인 구간이 존재하며 이 구간에서 파이프 외부의 공기가 내부로 역류해 들어오는 것을 알 수 있다.

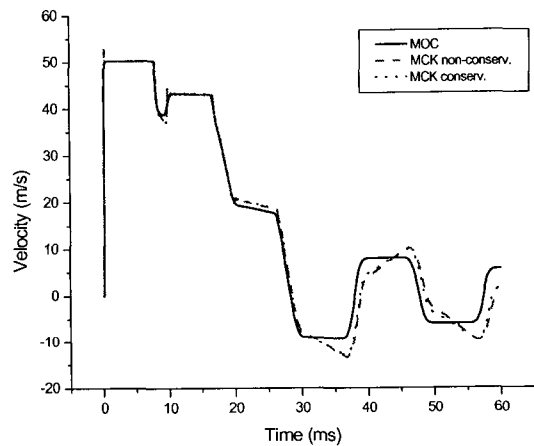


Fig. 7 Comparison of calculated velocity-time histories by using MOC and MacCormack schemes at 2.5 bar, point A

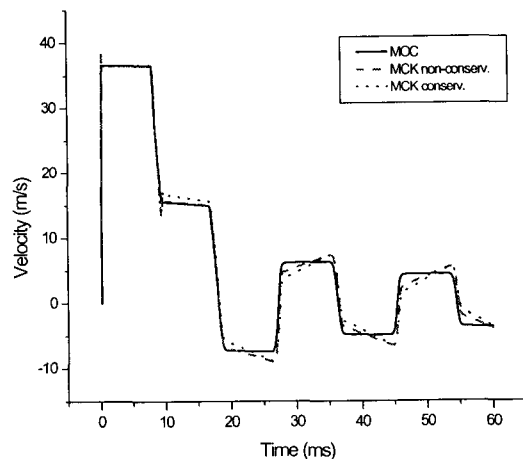


Fig. 8 Comparison of calculated velocity-time histories by using MOC and MacCormack schemes at 1.5 bar, point A

Fig. 8은 초기 공기압력이 1.5 bar일 때 A점에서 시간의 변화에 따른 입자 속도 변화를 MOC와 비보존형 MCK법 및 보존형 MCK법을 이용하여 계산한 결과이다. 전체적인 개형을 살펴보면 세 개의 계산값이 유사함을 알 수 있다. 세 개의 계산값을 비교해 보면 약 9 ms까지는 모두 일치하며, 9 ms 이후에는 MOC와 MCK법이 약간 상이함을 알 수 있으며, 또한 보존형 MCK법과 비보존형 MCK법이 약간 상이함을 알 수 있다. 약 20 ms 부근과 40 ms 부근에 속도가 음수인 구간이 존재한다. 이와 같은 현상으로 파이프 외부의 공기가 내부로 역류해 들어오는 것을 알 수 있다.

## 5. 결 론

본 연구는 내연기관 흡·배기관 내의 가스 유동을 수치해석하기 위한 기초 연구로 수행되었다. 파이프 내부 공기유동 현상의 실험결과와 계산결과는 다음과 같다.

1. 보존형 MCK법과 비보존형 MCK법 및 특성곡선법의 압력 계산결과와 실험결과는 잘 일치 하였다.
2. 보존형 MCK법과 비보존형 MCK법을 이용한 계산결과는 압력은 일치하였으나 속도는 약간의 차이를 보였다.
3. 압력 거동 계산 결과에서 좋은 결과를 보여준 보존형 MCK법은 왕복동 내연기관의 흡·배기관 가스유동 프로그램으로 유용하게 사용될 것으로 기대된다.

## 참고 문헌

1. J. Benajes, J. M. Lujan, V. Bermudez and J. R. Serrand, 2002, "Modelling of Turbocharged Diesel Engines in Transient Operation. Part 1: Insight into the Relevant Physical Phenomena", IMechE D06401.
2. F. Payri, J. Benajes, J Galindo and J. R. Serrano, 2002, "Modelling of Turbocharged Diesel Engines in Transient Operation in a High Speed Direct Injection Engine", IMechE D06501
3. M. D. Bassett and D. E. Winterbone, 2000,

"Modelling Engines with Puls Converted Exhaust Manifolds Using One-Dimensional Techniques", SAE 2000-01-0290

4. R. S. Benson and N. D Whitehouse, 1979, "The Thermodynamics and Gas Dynamics of Internal Combustion Engines", Pergamon Press, pp. 13~435.
5. P. H. Oosthuizen and W. E. Carscallen, 1996, "Compressible Fluid Flow" McGRAW-HILL, pp. 332~361.
6. J. D. Anderson, "Computational Fluid Dynamics", McGraw-Hill, pp. 125~167, 1995
7. D. E. Winterbone and R. J. Pearson, 2000, "Theory of Engine Mandifold Design Wave Aaction Methods for IC Engines", Professional Engineering Publishing, pp. 18~177.